نظرية الاحتمالات

إعداد
دكتورة / ثروت محمد عبد المنعم



مكتبة الأنجلو المصرية

نظرية الاحتمالات

إعداد
د. ثروت محمد عبد المنعم
أستاذ مساعد بكلية العلوم بالدمام
قسم الرياضيات
المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى
١٤٢١ هـ - ٢٠٠٠ م

الناشر



مكتبة الأنجلو المصرية
١٦٥ ش محمد فريد - القاهرة

اسم الكتاب : نظرية الاحتمالات

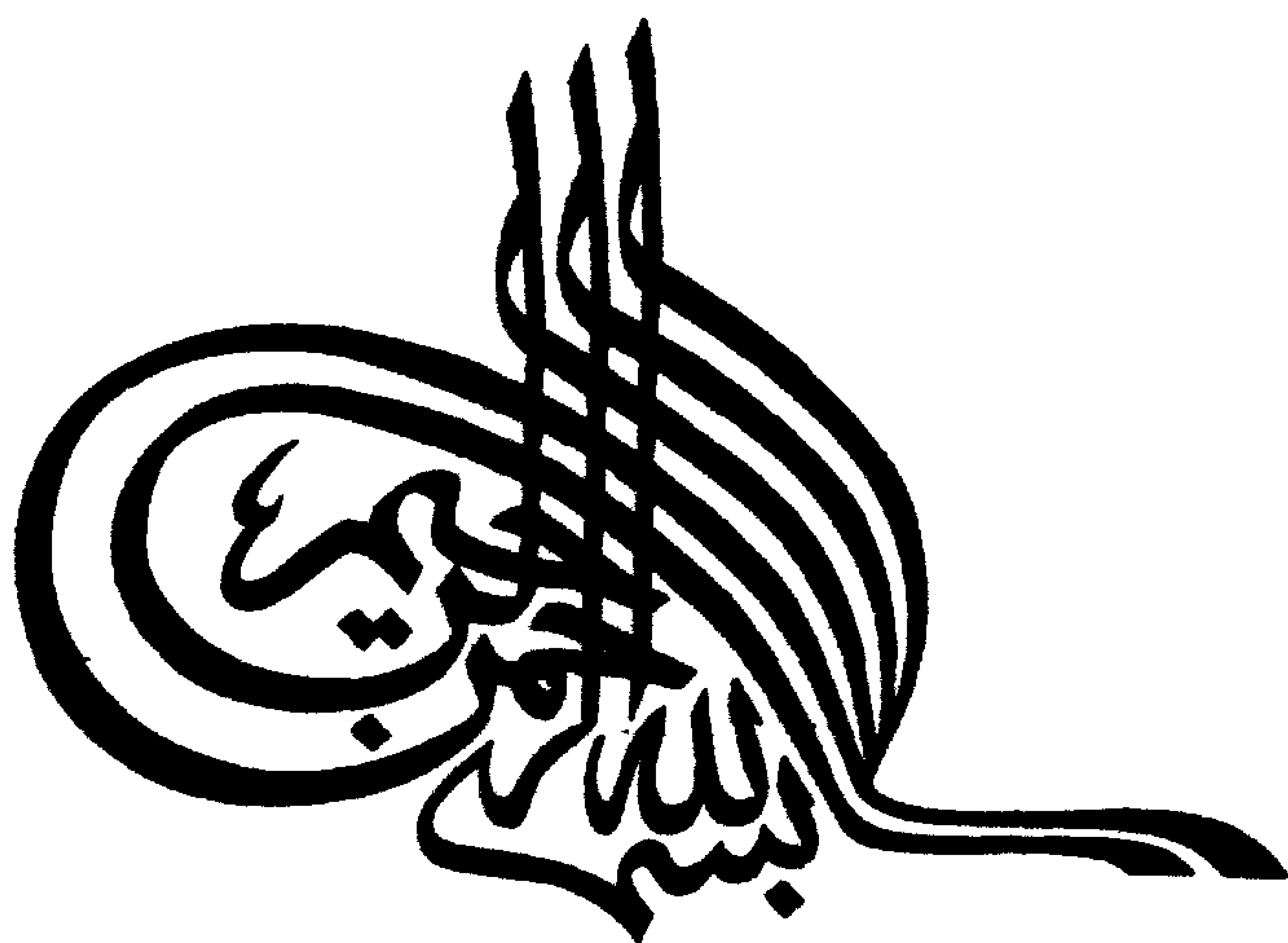
اسم المؤلف : د. ثروت محمد عبد المنعم

الناشـــــر : مكتبة الأنجلو المصرية

الطبـــاعة : مطبعة أبناء وهبه حسان

رقم الإيـــداع : ١٩٦١٨ لسنة ٢٠٠٠

الترقيم الدولى : I.S.B.N. 977-05-1798-4



وَقُل رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا

الإهداء

إلى أمي التي علمتني العطاء.

إلى والدي الذي علمني الخلق الكريم.

إلى أستاذي ا.د.أحمد حسن الموازيني الذي علمني أن الثقة بالنفس أول خطوات النجاح.

إلى أستاذي ا.د.سمير كامل عاشور و أستاذتي ا.د.الهام شكري اللذان علماني أن تشجيع الأستاذ لتلميذه دافع قوي له على التقدم.

إلى أستاذي المرحوم ا.د.علي يحي الذي علمني أنه لا يوجد صعب في العلم. إلى أخوتي فهم سندى في الحياة

إلى أخواتي في الله د.سارة و د.أميرة اللتان علمتاني أن الأخوة ليست فقط في الرحم.

إلى كل من شجعني في حياتي و أعطاني دفعة نحو الأمام.

تقديم

الحمد لله رب العالمين الذى علّم الإنسان ما لم يعلم ، والصلاة والسلام علي أشرف خلقه سيدنا محمد وعلي آله وصحبه أجمعين ومن اهتدي بهداه إلي يوم الدين . يعالج هذا الكتاب موضوعات إحصائية متقدمة في مجال الإحصاء الرياضي ونظرية الإحصاء حيث اعتمد المؤلف في صياغتها علي المنطق الفكري السليم والتحليل الإحصائي بأسلوب سهل وبسيط رغم صعوبة فهم تلك الموضوعات ، وهذا يرجع إلي أن المؤلف له خبرة طويلة في مجال تدريس الإحصاء لمستويات تعليمية مختلفة . وقد تعرض المؤلف إلي أهم الموضوعات الإحصائية التى تهم الكثير من الباحثين والطلاب ، وقد استند في شرحه علي عدد كبير من الأمثلة المدعمة بالتمارين الكثيرة التي تلى كل فصل . فالكتاب يقدم موضوعات مختلفة فى الاحتمالات ونظرية التوزيعات الاحتمالية والتوزيعات العينية كما أنه مدعم بعدد كبير من الجداول الإحصائية التى تساعد الباحثين في اتخاذ القرار المناسب . ويعتبر الكتاب أساس لمواد كثيرة في مجال نظرية الإحصاء وإضافة قيمة للمكتبة العربية فى مجال الاحتمالات والإحصاء . وفى الختام لا يسعنى إلا أن أحيى هذا الجهد وأقدم جزيل الشكر إلي المؤلف على ما بذله من جهد صادق ومخلص من أجل إحراج الكتاب بصورته الحالية .

أ. د. عثمان على شلبى

أستاذ الإحصاء الرياضى

ورئيس قسم الإحصاء والتأمين

بكلية التجارة جامعة الزقازيق

مقدمة

بسم الله الخالق البارئ المصور و الحمد لله حمد الشاكرين و الصلاة والسلام على خاتم المرسلين محمد الأمين.

- يجرى العديد من الباحثين دراسات لظواهر شتى في مجالات تشمل أنواع العلوم من اقتصاد أو طب أو زراعة..أو غيرها. لدراسة هذه الظواهر لا بد من إجراء التجارب العشوائية و هي تجارب تعتمد على عوامل الصدفة و لا يمكن التنبوء بها بشيء من التأكيد ، ولذلك تهدف نظرية الاحتمالات إلى بناء النماذج الرياضية التي تصف هذه الظواهر العشوائية ،وهذه النماذج هي التي تمكن الباحث من عمل الاستدلال و وضع الاستنتاجات عن الظواهر تحت الدراسة و ذلك باستخدام نظرية الإحصاء الرياضي و التي تعد من أهم فروع الرياضيات التطبيقية.
- ومع أهمية نظرية الاحتمالات في جميع المجالات العلمية و العملية و التطبيقية أقدمت على إعداد هذا الكتاب مساهمة متواضعة مني في إثراء المكتبة العلمية التي تندر فيها الكتب العربية التي تناولت نظرية الاحتمالات مقابل عدد كبير من الكتب الأجنبية .
- و يأتي هذا الكتاب خلاصة لخبرتي في التدريس على مدى خمسة عشر عاما ،أبحرت خلالها في عديد من المراجع العربية و الأجنبية التي تناولت هذه النظرية ، و قدمت فيها أبحاث واستشارات إحصائية مستعينة بأحدث برامج الحاسب الآلي الرياضية والإحصائية.
- هذا الكتاب موجه إلى طلاب المرحلة الجامعية والدراسات العليا سواء كانوا متخصصين في دراسة الإحصاء أو في التخصصات العلمية التطبيقية المختلفة. يتطلب من دارس هذا الكتاب أن يكون ملماً بعلم الرياضيات و خاصة علم التفاضل و التكامل وأساسيات الإحصاء.
- ولقد حاولت صياغة الكتاب بأسلوب إحصائي مبسط و مترابط ، و استعنت بعدد كبير من الرسوم البيانية التي أعددتها باستخدام برامج الحاسب الآلي الحديثة مثل الرسام ، Mathematica ، Statistica ، واشتمل الكتاب على مجموعة كبيرة من الأمثلة التوضيحية المتنوعة ،و يلتحق بكل فصل عدد كبير من التمارين .

- يحتوي هذا الكتاب على عشرة فصول يعرض الفصل الأول منها المفاهيم الأساسية للاحتمال ،ويوضح الفصل الثاني والثالث المتغيرات العشوائية بأنواعها مع توزيعاتها الاحتمالية. و يبين الفصل الرابع مفهوم الدوال المولدة للعزوم.أما الفصل الخامس والسادس ففيهما دراسة شاملة و وافية لأهم التوزيعات الشائعة الاستخدام في التطبيقات الإحصائية . وقد ركزت الدراسة في الفصل السابع على مفهوم التوزيعات المشتركة و الشرطية وخصائصها.و أهتم الفصل الثامن بدراسة توزيعات دوال المتغيرات العشوائية ،و خصص الفصل التاسع لدراسة نهايات التوزيعات و أهتم بالتقارب التصادفي.وأخيرا تناول الفصل العاشر موضوع المعاينة وذلك لأهميته .

- كل ما أتمنى أن يقدم هذا الكتاب المنفعة و الفائدة للدارسين لنظرية الاحتمالات ، و أن يلبي حاجة الطلبة و الباحثين .كما ارحب بأي نقد يهدف إلى الأفضل و الكمال لله وحده.

- ختاما أقدم شكري للدار النشر لتفضلها بنشر هذا الكتاب و الله من وراء القصد .

المحتويات

(١-١) نظرية الفئة Set Theory

الفئة هي مجموعة من الأشياء المعروفة تماماً ، على سبيل المثال الفئة لأول عشرة أرقام صحيحة موجبة معرفة تماماً حيث يمكننا القول أن الرقمين $\frac{1}{5}$, 13 غير موجودين في الفئة بينما الرقم 4 موجود في هذه الفئة . عندما ينتمي شيء إلى فئة ما فإننا نقول أنه عنصر element في هذه الفئة . على سبيل المثال إذا كانت A تمثل الفئة من الأعداد الحقيقية x حيث $0 \le x \le 1$ فإن الرقم $\frac{1}{4}$ عنصر في الفئة A ويعبر عن ذلك بالصيغة $\frac{1}{4} \in A$.

عموماً $a \in A$ تعني أن a عنصر في الفئة A .

تعريف : إذا كان كل عنصر في الفئة A هو عنصر في الفئة B فإن الفئة A تسمى فئة جزئيه subset من الفئة B . ويمكننا توضيح ذلك بكتابة $A \subset B$. إذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$ فإن الفئتين يحتويان على نفس العناصر ويمكننا توضيح ذلك بكتابة $A = B$.

مثال (١-١) إذا كان : $A = \{x | \ 0 \le x \le 2\}$

وكان $B = \{x | \ -1 \le x \le 3\}$

فإن $A \subset B$.

مثال (١-٢) إذا كان : $A = \{(x,y) | \ 0 \le x = y \le 1\}$

وكان : $B = \{(x,y) | \ 0 \le x \le 1 \ , 0 \ \le y \le 1\}$

فإن $A \subset B$.

تعريف : إذا كانت الفئة A لا تحتوي على أي عناصر فإن A تسمى فئة العدم null set وتوضح بكتابة $A = \phi$.

تعريف : الفئة من كل العناصر التي تنتمي على الأقل لواحدة من الفئتين A , B تسمى اتحاد A , B . الاتحاد بين A , B يوضح بكتابة $A \cup B$ الاتحاد لعدة فئات $A_1, A_2, A_3, \ldots$ هو الفئة من كل العناصر التي تنتمي على الأقل لواحدة من الفئات المتعددة . وهذا الاتحاد يوضح بالصيغة :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

أو

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$$

إذا كان عدد الفئات منتهي ويساوى k .

مثال (١-٣) إذا كان : $A = \{x|\ x = 0,1,...,10\}$

وكان :

$$B = \left\{ x|\ x = 8,9,10,11\ ,\text{or}\ 11 < x \le 12 \right\}.$$

فإن :

$$A \cup B = \{x|\ x = 0,1,...,8,9,10,11,\ \text{or}\ 11 < x \le 12\}$$

$$= \{x|\ x = 0,1,...,8,9,10,\ \text{or}\ 11 \le x \le 12\}$$

مثال (١-٤) إذا كان A , B معرفتين كما في المثال (١-١) فإن $A \cup B = B$.

مثال (١-٥) إذا كان $B = \phi$ فإن $A \cup B = A$ وذلك لأي فئة A .

مثال (١-٦) لأي فئة A فإن $A \cup A = A$

مثال (١-٧) إذا كان :

$$A_k = \{x|\ 1/(k+1) \le x \le 1\}, k = 1,2,3,...$$

فإن :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... = \{x|\ 0 < x \le 1\}$$

يلاحظ أن الصفر لا ينتمي لهذه الفئة وذلك لأنه ليس عنصر في واحدة من الفئات $A_1 , A_2 , A_3 ,...$.

تعريف : الفئة من كل العناصر التي تنتمي لكل من الفئة B , A تسمى التقاطع للفئتين A , B يمكننا توضيح هذا التقاطع بكتابة $A \cap B$. التقاطع لعدة فئات $A_1 , A_2 , A_3 ,...$ هو الفئة من كل العناصر التي تنتمي إلى كل من الفئات $A_1 , A_2 , A_3 ,...$ ويمكننا توضيح هذا التقاطع بكتابة $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ...$ أو $A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_k$ وذلك إذا كان اهتمامنا بعدد k من الفئات .

مثال (١-٨) إذا كان :

$$A = \{(x,y)|\ (x,y) = (0,0),(0,1),(1,1)\},$$

$$B = \{(x,y)|\ (x,y) = (1,1),(1,2),(2,1)\}$$

فإن : .....

$$A \cap B = \{(x,y)|\ (x,y) = (1,1)\}.$$

مثال (١-٩) إذا كان :

$$A = \{ (x , y) | 0 \le (x + y) \le 1 \},$$

$$B = \{ (x , y) | 1 < (x , y) \}.$$

فإن A , B لا يحتويان على أي عناصر مشتركة بينهما وعلى ذلك $A \cap B = \phi$.

تعريف : إذا كان $A \cap B = \phi$ يقال للفئتين A , B أنهما منفصلتين disjoint أي لا يوجد أي عناصر مشتركة بينهما .

مثال (١-١٠) لأي فئة A فإن $A \cap A = A$ و $A \cap \phi = \phi$

مثال (١ -١١) إذا كان :

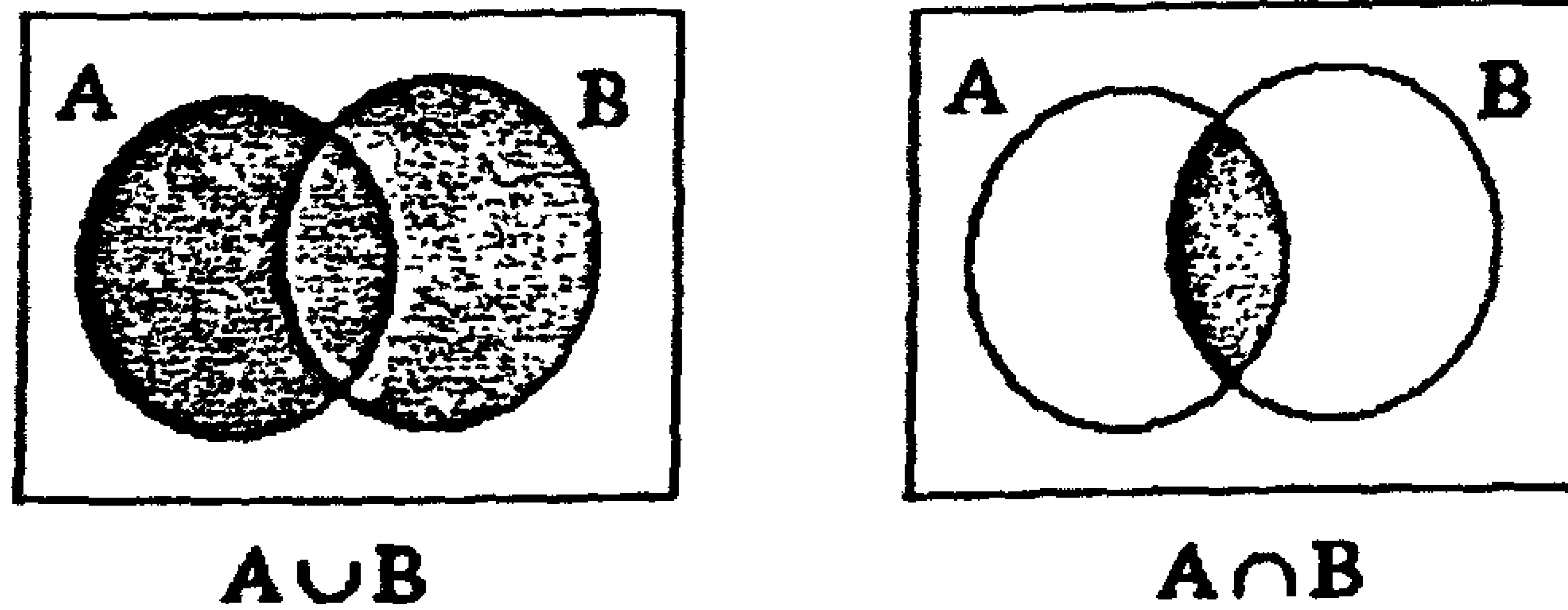
$$A_k = \{x|\ 0 < x < 1/k\}, k = 1,2,3,...$$

فإن $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ...$ هي فئة العدم وذلك لعدم وجود عناصر مشتركة تنتمي إلي كل من الفئات $A_1, A_2, A_3 ...$

في كل المناقشات كل الفئات تعتبر فئات جزئية من فئة واحدة خاصة ، هذه الفئة تسمي الفئة الشاملة universal set ويرمز لها بالرمز U .

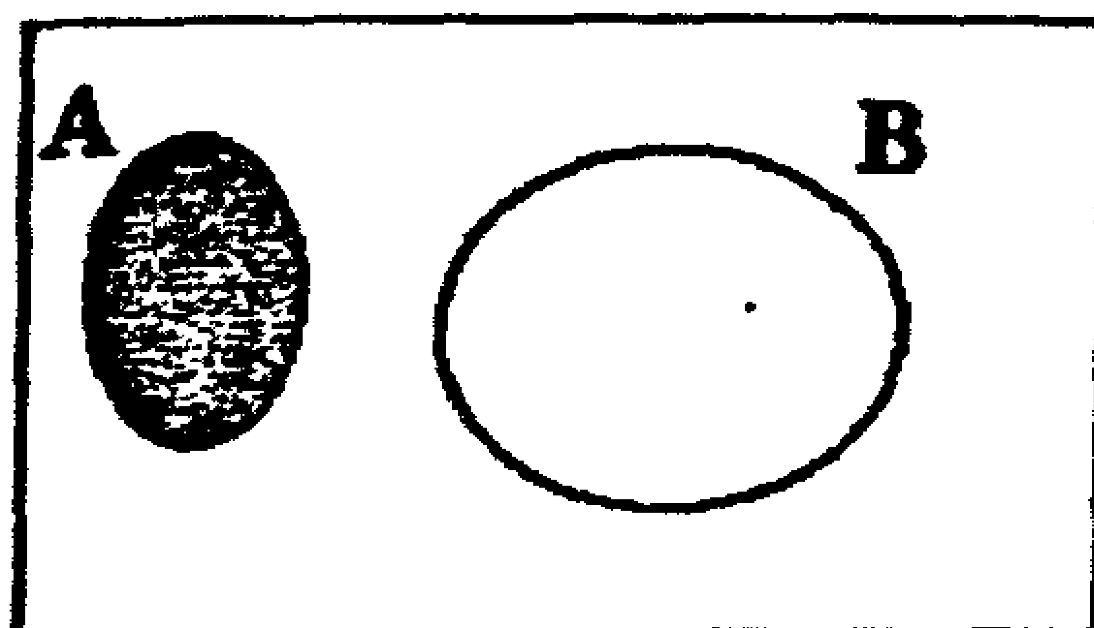
مثال (١-١٢) كل الفئات الجزئية من الفئة الشاملة $U = \{4, 5, 6\}$ هي :
ϕ , $\{4, 5, 6\}$, $\{5, 6\}$, $\{4, 6\}$ $\{4, 5\}$, $\{6\}$, $\{5\}$, $\{4\}$.

العلاقة بين الفئات الجزئية والفئة الشاملة يمكن توضحها بما يسمي شكل فن Venn diagram حيث تمثل الفئة الشاملة بمستطيل والفئات الجزئية بدوائر داخل المستطيل . على سبيل المثال بفرض أن A , B فئتين فإن الفئتين $A \cup B, A \cap B$ يمكن تمثيلهما بالمنطقتين المظللين في شكل (١-١)



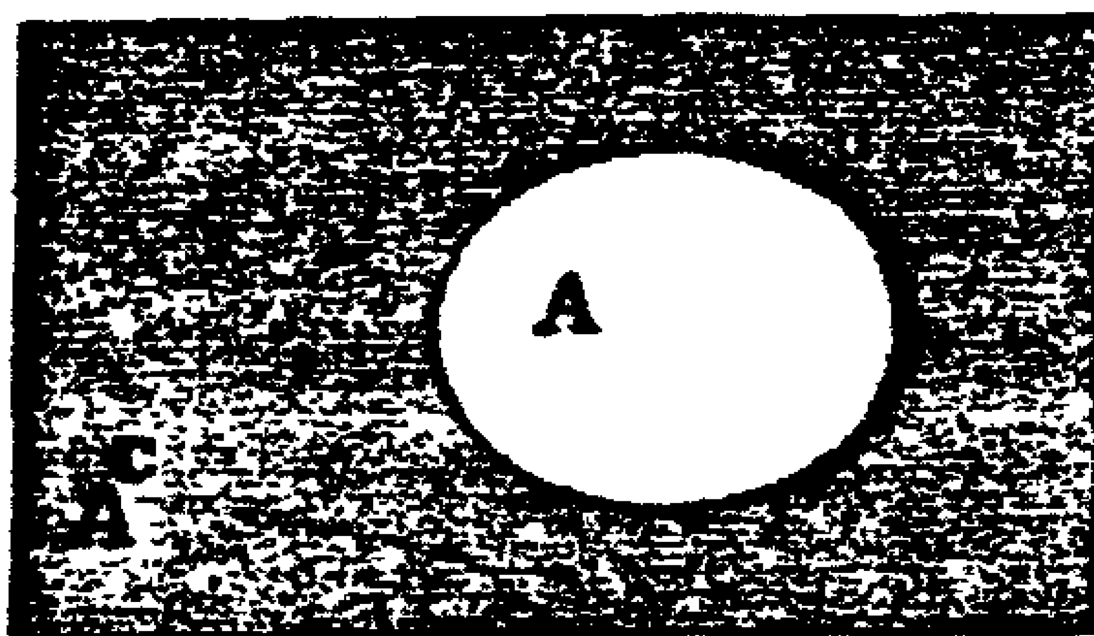
شكل (١- ١)

مثال (١-١٣) إذا كان A , B فئتين منفصلتين أي أن $A \cap B = \phi$ فإن الفئتين A , B موضحتان في شكل (١-٢)



شكل (١- ٢)

تعريف : إذا كانت A فئة جزئية من الفئة الشاملة U ، فإن مكمل الفئـــة A هــو الفئــة مــن العناصر في U والغير موجودة في A و سوف نرمز لمكمل الفئة A بـــالرمز A^c . يوضـــح شكل (١-٣) الفئة المكملة بالمساحة المظللة .



شكل (١-٣)

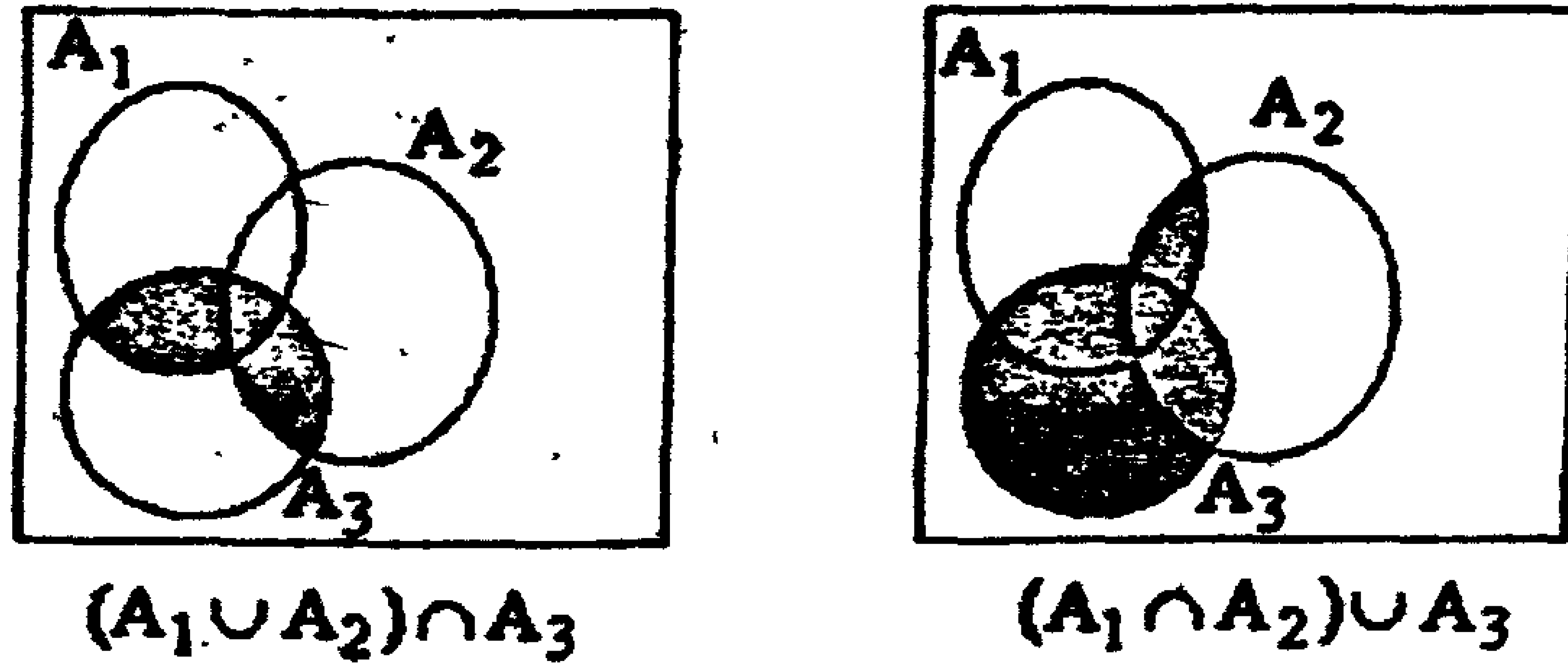
مثال (١-١٤) للفئات :

$$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\},\quad A=\{1,2,3\}$$

فإن :

$$A^c=\{4,5,6,7,8,9,10\}.$$

مثـــال (١-١٥) بفـرض أن A_1 , A_2 , A_3 ثلاثــة فئــات ، فــإن الفئتيـــن $(A_1 \cap A_2) \cup A_3$, $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ موضحتان بالمساحة المظللة في شـــكل (١-٤)



$(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ $(A_1 \cap A_2) \cup A_3$

شكل (١ - ٤)

وفيما يلي بعض العلاقات المفيدة لأي فئات $A, A_1, A_2, \ldots , A_k$:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A_1 \cup (A_2 \cup \ldots \cup A_k),$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = A_1 \cap (A_2 \cap \ldots \cap A_k),$$

$$A \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = (A \cup A_1) \cap (A \cup A_2) \cap \ldots \cap (A \cup A_k),$$

$$A \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_k) = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \ldots \cup (A \cap A_k),$$

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_k^c,$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_k^c.$$

العلاقتان الأخيرتين يطلق عليهما قانوني دى مورجان .

(١-٢) دوال الفئة Set Functions

يتناول علم التفاضل والتكامل دراسة دوال مختلفة مثل :

$$f(x) = x^2 \quad , \quad -\infty < x < \infty,$$

أو :

$$g(x,y)=e^{-x-y} \quad , \quad 0<x<\infty,$$
$$0<y<\infty,$$
$$=0 \quad \text{elsewhere} \ ,$$

أو :

$$h(x_1, x_2, ..., x_n) = 5\, x_1 x_2 ... x_n ,$$
$$0 \le x_i \le 1, \quad i = 1, 2, ..., n,$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

القيمة $f(x)$ عند النقطة " $x=1$ " هي $f(1) = 1$. أيضا القيمة للدالة $g(x,y)$ عند النقطة $(-1, 3)$ هي $g(-1, 3) = 0$. وأخيرا القيمة للدالة $h(x_1, x_2, ..., x_n)$ عند النقطة $(1, 1, ..., 1)$ هي 5 .

تسمى الدوال السابقة دوال النقطة point functions وذلك لأنها تقدر (إذا أعطيت القيمة) عند النقطة في الفضاء المعطي سواء في البعد الأول أو البعد الثاني أو البعد الثالث ... الخ .

هناك دوال تقدر ، ليس بالضروري عند نقطة ، ولكن عند فئة من النقط وتسمى دوال الفئة set functions . سوف نعطي بعض الأمثلة عن دوال الفئة وسوف نقدرهم لبعض الفئات البسيطة .

مثال (١-١٦) بفرض أن A فئة في فضاء البعد الأول . بفرض أن $Q(A)$ تمثل عدد النقط في A والتي تحقق الشروط أنها موجبة وصحيحة أي أن $Q(A)$ دالة في A . وعلى ذلك :

إذا كانت $A = \{x | \ 0 < x < 6\}$ فإن $Q(A) = 5$

وإذا كانت $A = \{x | \ x = -2, -1\}$ فإن $Q(A) = 0$

وإذا كانت $A = \{x | \ -\infty < x < 9\}$ فإن $Q(A) = 8$

مثال (١-١٧) إذا كانت A فئة في البعد الثاني وكان $Q(A)$ هي مساحة A حيث A لها مساحة محددة ، وغير ذلك فإن $Q(A)$ غير معرفة (تساوى صفراً) . إذا كانت :

$$A = \{(x,y) | \ x^2 + y^2 \le 1\}$$

فإن $Q(A) = \pi$، وإذا كانت :

$$A = \{(x,y) | \ (x,y) = (0,0),(1,1),(0,1)\}.$$

فإن $Q(A)=0$. وإذا كانت :

$$A=\{(x,y)|\ 0\le x, 0\le y, x+y\le 1\}$$

فإن : $Q(A)=\frac{1}{2}$.

مثال (١-١٨) إذا كانت A هي فئة في البعد الأول وكانت :

$$Q(A)=\sum_{A} f(x).$$

حيث :

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}, x=1,2,3,\ldots,$$
$$=0 \text{ elsewhere.}$$

وإذا كانت :

$$A=\{x|\ 0\le x\le 3\}$$

$$Q(A)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{7}{8}.$$

مثال (١-١٩) إذا كانت $Q(A)=\sum_{A} f(x)$

حيث :

$$f(x)=p^{x}(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1,$$
$$=0 \text{ elsewhere.}$$

وإذا كانت $A=\{x|\ x=0\}$ فإن :

$$Q(A)=\sum_{x=0}^{x=0} p^{x}(1-p)^{1-x}=1-p.$$

وإذا كانت $A=\{x|\ 1\le x\le 2\}$ فإن :

$$Q(A)=f(1)=p.$$

مثال (١-٢٠) إذا كانت A فئة في البعد الأول وكان :

$$Q(A)=\int_{A} \bar{e}^{x}\, dx,$$

وإذا كانت $A=\{x\ |\ 0\le x\le \infty\}$ فإن :

$$Q(A)=\int_0^{\infty} \bar{e}^{x}\ dx=1,$$

وإذا كانت $A=\{x|\ 1\le x\le 2\}$ فإن :

$$Q(A)=\int_1^{2} \bar{e}^{x}\ dx=\bar{e}^{1}-\bar{e}^{2},$$

وإذا كانت :

$$A=\{x|\ 0\le x\le 1\}$$
$$B=\{x|\ 1<x\le 3\}.$$

فإن :

$$Q(A\cup B)=\int_0^{3} \bar{e}^{x}\ dx$$
$$=\int_0^{1} \bar{e}^{x}\ dx+\int_1^{3} \bar{e}^{x}\ dx$$
$$=Q(A)+Q(B).$$

إذا كانت $C=A\cup B$ حيث :

$$A=\{x|\ 0\le x\le 2\}\ ,\ \ B=\{x|\ 1\le x\le 3\}$$

فإن :

$$Q(C)=Q(A\cup B)=\int_0^{3} \bar{e}^{x}\ dx$$
$$=\int_0^{2} \bar{e}^{x}\ dx+\int_1^{3} \bar{e}^{x}\ dx-\int_1^{2} \bar{e}^{x}\ dx$$
$$=Q(A)+Q(B)-Q(A\cap B).$$

مثال (١-٢١) إذا كانت A فئة في فضاء البعد n حيث :

$$Q(A)=\int\limits_{A}\cdots\int dx_1\ dx_2\ldots dx_n.$$

وإذا كانت :

$$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n|\ 0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le 1\}$$

فإن :

$$Q(A)=\int_0^{1}\int_0^{x_n}\ldots\int_0^{x_3}\int_0^{x_2} dx_1 dx_2\ldots dx_{n-1}\ dx_n=\frac{1}{n!}$$

حيـث :

$$n! = n\,(n-1)\ \dots\ 3.2.1.$$

(١-٣) فضاء (فراغ) العينة والأحداث Sample Space and Events

تجرى الأبحاث في مجالات كثيرة ، ففي مجال الطب يهتم باحث بدراسة تـأثير دواء معين على الشفاء من مرض ما ، وفي مجال الاقتصاد قد يهتم باحث بدراسـة تـأثير أسـعار ثلاث سلع مختلفة في فترات زمنية مختلفة ، وفي مجال الزراعة قد يهتم باحث بدراسة تـأثير سماد كيميائي على كمية المحصول .الطريق الوحيد للباحث للحصول علـى معلومـات عـن الظاهرة موضع الدراسة هو إجراء تجربـة experiment . أي تجربـة تنتـهي بنتيجـة outcome ولكن تتميز التجارب العلمية بأن النتيجة لا يمكن التنبؤ بها بشيء من التأكيد قبـل إجراء التجربة . بفرض أن لدينا مثل هذه التجربة ، فإن نتيجة التجربة لا يمكـن التنبـؤ بـها بشيء من التأكيد ولكن يمكننا وصف فئة كل النتائج الممكنة لها قبـل إجرائـها . إذا أمكـن تكرار مثل هذه التجربة تحت نفس الظـروف فإنـها تسـمى تجربـة عشـوائية random experiment .

تعريف : التجربة العشوائية هي أي أجراء نعلم مسبقاً جميع النتائج الممكنـة لـه وإن كنـا لا نستطيع أن نتنبأ أي من هذه النتائج سوف يتحقق فعلاً في محاولة trial معينة .

ومن أمثلة التجارب العشوائية وزن رغيف خبز ، حساب الزمن للذهاب من المنزل إلـى العمل في يوم ما ، الحصول على فصائل الدم لمجموعة من الأشخاص ، قياس قـوة الضغـط لأنواع مختلفة من الحديد الصلب .

تعريف : الفئة التي عناصرها تمثل جميع النتائج الممكنة لتجربـة عشـوائية تسـمى فضـاء (فراغ) العينة sample space وسوف نرمز له بالرمز S .

مثال (١-٢٢) عند اختبار صمام كهربائي لمعرفة ما إذا كان تالف أو سليم فإن فضاء العينـة سوف يكون $S = \{D', D\}$

حيث D' ترمز إلي سليم و D ترمز إلي تالف .

مثال (١-٢٣) عند اختبار ثلاث صمامات في متتابعة وملاحظة النتيجة لكل صمام فإن فضـاء العينة سوف يكون :

$$S=\{D'D'D', D'D'D, D'D D', D D'D', D D D', D D'D, D'D D, D D D\}.$$

مثال (١-٢٤) يوجد محطتان للغاز الطبيعي في منطقة ما وكل محطة لها 6 أنابيب . في تجربة لتقدير عدد الأنابيب الصالحة للاستخدام لكل من المحطتين وذلك عند زمن معين من يوم ما . واحدة من النتائج سوف تكون (2,2) أي أنبوبتين صالحتين للمحطة الأولى ومثلهما للمحطة الثانية . وأخرى سوف تكون (1 , 4) أي أربعة أنابيب صالحة للمحطة الأولي وأنبوبة واحدة صالحة للمحطة الثانية وهكذا. يعطى الجدول التالي فضاء العينة لهذه التجربة والذي يحتوى على 49 نتيجة .

المحطة الأولي	المحطة الثانية						
	0	1	2	3	4	5	6
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,0)	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

هذا ويمكن الحصول على فضاء تجربة إلقاء زهرتي نرد مره واحدة من الجدول السابق وذلك بعد حذف العمود الأول والصف الأول .

مثال (١-٢٥) تُصنف البطاريات من نوع ما إلى تالفة F إذا كانت البطارية لها فولت خارج حدود معينة وتصنف سليمة F' إذا كانت البطارية لها فولت خلال فترة محددة مسبقاً. بفرض تجربة لاختبار كل بطارية في خط الإنتاج حتى الحصول على أول بطارية سليمة. واحدة من نتائج هذه التجربة هو الحصول على 10 (أو 100 أو 1000 أو ...) من نوع F والتالية من نوع F'. أي أنه لأي عدد صحيح موجب n سوف نختبر n من البطاريات قبل الوصول إلي أول F'. فضاء العينة في هذه الحالة هو :

$$S=\{F', \; FF', FFF', \; FFFF', \; ...\} \; .$$

نفس الفضاء يناسب التجربة التي فيها يسجل الجنس لكل مولود جديد (رضيـــع) حتـى ولادة طفل ذكر .

مثال (١-٢٦) عند إلقاء عملتين مره واحدة فإن فراغ العينة سوف يكون :

$$S=\{HH,\ HT,\ TH,\ TT\}.$$

حيث H ترمز إلي ظهور صورة head و T ترمز إلي ظهور كتابة tail . هنـاك طريقـة بديلة لتمثيل فراغ العينة ، في هذا المثال ، وذلك بعمل قائمة بكل الأزواج المرتبة للرقميـن 1 , 0 حيث :

$$S' = \{ (1, 1) , (1, 0) , (0, 1) , (0, 0)\} .$$

حيث ، على سبيل المثال ، (1, 0) تدل على ظهور صورة على العملة الأولي وكتابة علـى العملة الثانية .

مثال (١-٢٧) بفرض أن اهتمامنا في المثال (١-٢٦) ليس في كل النتائج الممكنـة لعمليـة إلقاء عملتين مرة واحدة ولكن في العدد الكلي للصور . فضاء العينة في هذه الحالـة سـوف يصبح :

$$S^* = \{ 0, 1, 2 \}$$

وعلى ذلك يمكن القول أنه لنفس التجربة يمكننا الحصول على فضاءات عينة مختلفـة وذلـك حسب الخاصية موضع الاهتمام .

مثال (١-٢٨) إذا تكرر إلقاء عمله حتى ظهور صورة فإن فضاء العينة لهذه التجربة سـوف يكون فئة كل الأعداد الصحيحة الموجبة . أي أن :

$$S^* = \{ 1, 2 , \ldots \} .$$

حيث تمثل النتائج عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول صورة .

مثال (١-٢٩) إذا وضع مصباح كهربائي في الخدمة وتم قياس الزمن من ابتـداء الإضـاءة حتى الفشل . فضاء العينة لهذه التجربة يمثل فئة كل الأعداد الحقيقية الغير سالبة . أي أن

$$S=\{t| \quad 0\le t<\infty\}.$$

ويجب أن نتذكر أنه إذا تم قياس زمن البقاء (عمر المصباح) لأقرب ساعة ، فإن فضاء العينـة لزمن البقاء سوف يمثل فئة كل الأعداد الصحيحة الغير سالبة أي أن :

$$S^* = \{ 0, 1, 2, 3\ldots \} .$$

مثال (١-٣٠) بفرض كل المستطيلات التى لها الطول x والعرض y حيث كل من x , y أكبر من 6. فضاء العينة لاختبار مستطيل يتوفر فيه هذه الصفات هو :

$$S = \{(x,y)|\ x > 6, y > 6\}.$$

مثال (١-٣١) بفرض أن شخص يريد قياس العمر (بالسنوات) للزواج في بلد ما. بفرض أن باحث قام بسؤال زوجين وكانت الإجابة (24, 22) حيث عمر الزوج 24 وعمر الزوجة 22 بفرض أن الباحث اعتبر سن الزواج يقع بين 200 – 1 . عدد الأزواج المرتبة في هذه الحالة يكون كبير جدا 40000 = (200)(200) . يمكن التعبير عن فضاء العينة بصورة أخرى أسهل وهي :

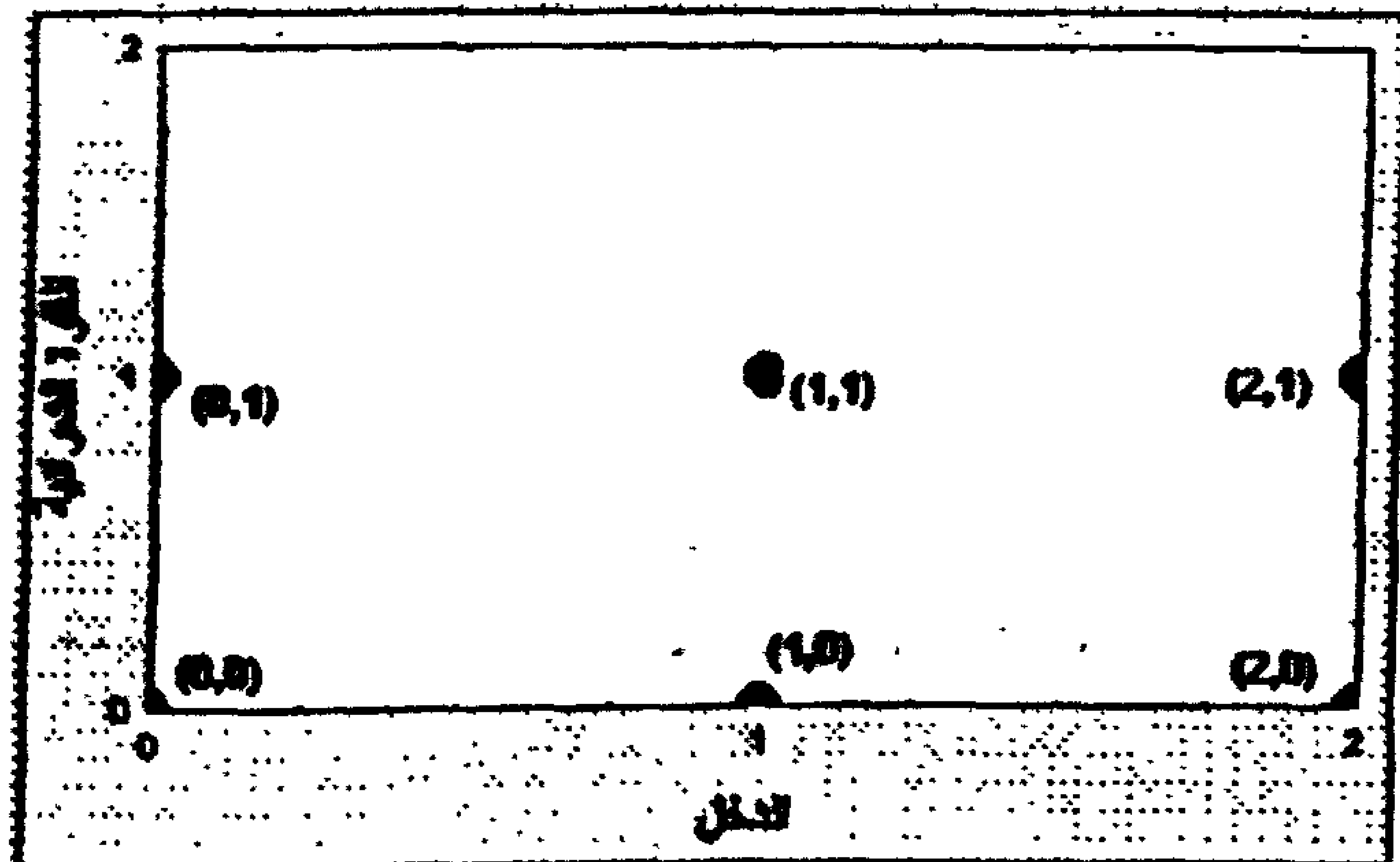
$$S = \{(x,y)|\ x \ \text{ is an integer } 1-200,$$
$$y \ \text{ is an integer } 1-200\}.$$

مثال (١-٣٢) قام باحث متخصص في التسويق بتصنيف العملاء إلى ثلاث مجموعات حسب الدخل : منخفض 0 ومتوسط 1 وعالي 2 . كما قام بتصنيفهم تبعا لخاصيه أخرى وهي القوة الشرائية إلي (لا يشترى 0) و (يشتري ولو مرة واحدة في الشهر 1). عرف فضاء العينة .

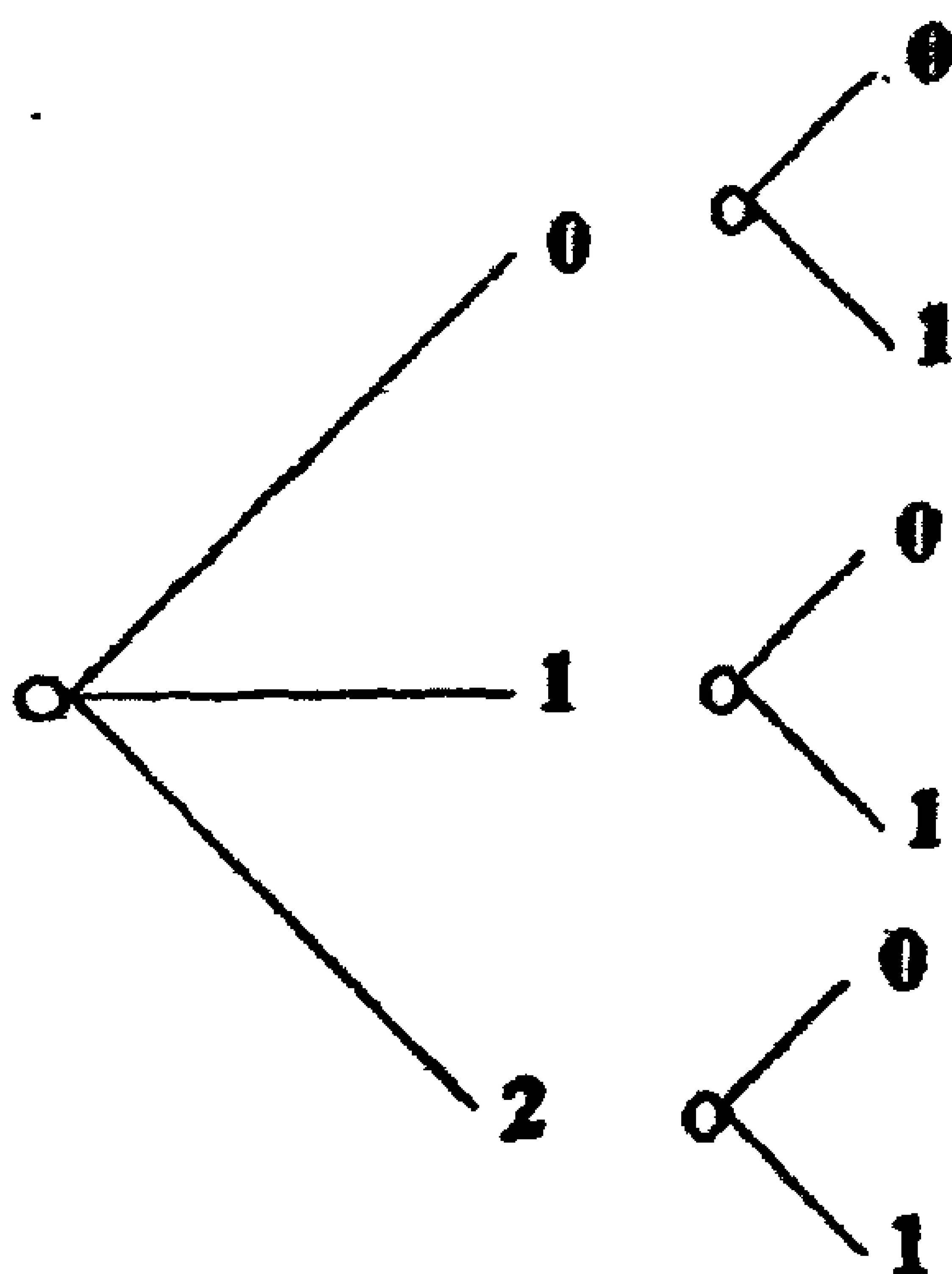
الحل : فضاء العينة يمكن تعريفه كالآتي :

$$S = \{ (0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1) \}$$

أو بيانيا كما هو موضح في شكل (١-٥) أو باستخدام شكل الشجرة كما هو موضح في شكل (١-٦) .



شكل (١-٥)



شكل (١-٦)

يقال لفضاء العينة S انه منتهى finite إذا احتوى على عدد محدود من النتائج ، أي أن :

$$S = \{a_1, a_2, ..., a_k\} .$$

ويقال لفضاء العينة (غير منتهى) لا نهائى قابل للعد (معدود) infinite countable إذا كان هناك تقابل بين النتائج في فضاء العينة وفئة الأعداد الطبيعية أي أن :

$$S = \{a_1, a_2, a_3, ...\} .$$

ويقال لفضاء العينة أنه لا نهائى غير قابل للعد infinite إذا احتوى على عدد لا نهائى من النتائج .

تعريف : إذا كان فضاء العينة منتهي أو غير منتهي قابل للعد فإنه يسمى فضاء منفصل [متقطع] discrete sample space. الفضاءات للأمثلة (١-٢٢) و (١-٢٣) و (١-٢٤) منتهية ، بينما الفضاءات للأمثلة (١-٢٥) و (١-٢٨) لا نهائية قابلة للعد . إذا كان فضاء

العينة لا نهائي وغير قابل للعد يسمى فضاء متصـــل (مسـتمر) continuous sample space . فضاء العينة في المثال (١-٣٠) متصل . كمثال آخر بفـــرض دائـــرة والمطلـــوب التصويب نحو الهدف (المركز) ، فضاء العينة لهذه التجربة متصل .

تعريف : يسمى أي عنصر في فضاء العينة نقطة عينة sample space .

فعلى سبيل المثال تعتبر (0, 1) نقطة عينة في مثال (١-٢٤) .

تعريف : الحادثة event هي أي فئة جزئية من فضاء العينة S .

إذا كانت A تمثل حادثة ما في فضاء لعينة S فإننا نقول أن A وقعت إذا ظهر أحد نتائجـــها عند إجراء التجربة . لتوضيح هذا المفهوم ومن مثال (١-٢٦) والخاص بإلقاء عملتين مـــرة واحدة فإن الفئة الجزئية { A={HH, HT, TH تحتوى على كل النتائج المقابلـــة للحادثـــه "على الأقل صورة واحدة ".أيضاً { B = {HT, TH, TT تحتوى على النتائج المقابلة للحادثة " على الأقل كتابة واحدة " .

مثال (١-٣٣) بفرض أن تجربة تمثل ثلاث سيارات تسير في طريق صحـــراوي وســوف تتجه ناحية اليمين (R) أو اليسار (L) وذلك عند نهاية الطريق . النتائج الممكنـــة (الثمانيـــة) لفضاء العينة S هم :

$$S = \{LLL, RLL, LLR, LRL, RRL, LRR, RLR, RRR\}$$

حيث :

$$A_1 = \{ RLL , LRL, LLR \}$$

تمثل الحادثة " بالضبط واحدة من السيارات تتجه نحو اليمين " . أيضا :

$A_2 = \{LLL, RRR\}$ تمثل الحادثة " السيارات الثلاثة يتجهون في نفس الاتجاه ".

تعريف : إذا كانت الفئة الجزئية من فضاء العينة تحتوى على عنصر واحد فقط تسمى حادثـــة بسيطة simple event . أما الحادثة المركبة فهي التي تنتج من اتحاد أحداث بسيطة .

في المثال (١-٣٣) $A_3 = \{ LLL \}$ والتي تمثل الحادثة " كل السيارات يتجهون ناحيـــة اليسار " تعتبر حادثة بسيطة بينما $A_4 = \{LLL, RLL, LRL, LLR\}$ والتي تمثل الحادثة " على الأكثر واحدة من السيارات تتجه نحو اليمين " تعتبر حادثة مركبة.

العمليات على الفئات مثل الاتحاد والتقاطع والمكمل يعطي وسيلة مفيدة للحصـــول علـــى أحداث جديدة من أحداث موجودة أصلاً. فعلى سبيل المثال في تجربة إلقاء عملتين مرة واحدة فإن الحادثة E " على الأقل صورة واحدة وعلى الأقل كتابة واحدة " يمكـــن التعبـــير عنـــها

بتقاطع الفئتين $A = \{HH, HT, TH\}$ والتي تمثل الحادثة " على الأقل صورة واحـدة " و $B = \{TT, HT, TH\}$ والتي تمثل الحادثة " على الأقل كتابـــة واحـــدة " وعلـــى ذلـــك $E = A \cap B = \{HT, TH\}$. بنفس الشكل الحادثة " على الأقل صورة واحدة أو على الأقـــل كتابة واحدة " يمكن التعبير عنها كاتحاد B , A أي أن: $A \cup B = \{HH, HT, TH, TT\}$. الحادثة " عدم ظهور صورة " يمكن التعبير عنها كمكمل للحادثة A بالنسبة لفضاء العينـــة S حيث $A^c = \{TT\}$.

مثال (١-٣٤) للمثال (١-٢٤) والخاص بتجربـــة ملاحظـــة عـــدد الأنـــابيب الصالحـــة لمحطتين. الآن بفرض أن اهتمامنا بعدد الأنابيب الصالحة لمحطة واحدة . ليكن

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad , \quad B = \{3, 4, 5, 6\},$$
$$E = \{1,3,5\} \quad , \quad A \cap B = \{3,4\} \quad , \quad A \cap E = \{1,3\}$$
$$A^c = \{5,6\} \quad (A \cup E)^c = \{6\}.$$

مثال (١-٣٥) في المثال (١-٢٥) والخاص بتجربة ملاحظة بطارية يمكن تعريف A, B, E كالآتي :

$$A = \{F', FF', FFF'\}, B = \{F', FF', FFFFF'\},$$
$$E = \{FF', FFFF', FFFFFF', \ldots\},$$

وعلى ذلك :

$$A \cup B = \{F', FF', FFF', FFFFF'\}, A \cap B = \{F', FF'\},$$
$$B^c = \{FFF', FFFF', FFFFFF', \ldots\},$$

$$A^c = \{FFFF', FFFFF', FFFFFF', \ldots\},$$
$$E^c = \{F', FFF', FFFFF', \ldots\}$$

والتي تمثل عدد البطاريات المختبرة ذات الرقم الفردي .

عموما ، بفرض أن S فضاء عينة لتجربة ما وكان B , A حادثين ،التقاطع $A \cap B$ يمثل النتائج للحادثة " B , A " بينما الاتحاد يمثـــل الحادثـــة " A أو B ". المكمـــل A^c يقـــابل الحادثة " ليس A". أيضا هناك العديد من الأحداث والتي يمكـــن تمثيلـــها بدلالـــه التقاطعـــات والاتحادات والمكملات . على سبيل المثال ، يقال للحادثة A وليس B أنها تقـــع إذا كـــانت نتيجة التجربة تنتمي إلى $A \cap B^c$. كما يقال للحادثة " بالضبط واحدة من " B , A " أنها تقع

إذا كانت نتيجة التجربة تنتمي إلي $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$. الفئة $A^c \cap B^c$ تقابل الحادثة " ليس A وليس B " . الحادثة $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ و الحادثة $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ وذلك طبقا لقانوني دي مورجان .

عموما إذا كان $A_1 , A_2 , \ldots , A_k$ عدد محدود (منتهي) من الأحداث فإن وقوع نتيجة في التقاطع $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$ (أو $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$) يقابل وقوع الحادثة " كل A_i " حيث $i = 1,2,\ldots,k$ أيضا وقوع نتيجة في $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ يقابل وقوع الحادثة " على الأقل واحدة من A_i " حيث $i = 1,2,\ldots,k$. بنفس الشكل يمكن تطبيق الصيغ السابقة في حالة الأحداث اللانهائية (غير منتهية) $A_1, A_2, \ldots$ حيث $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$ (أو $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$) للتقاطع و $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ (أو $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$) للاتحاد .

سوف نعتبر فضاء العينة حادثة خاصة تسمى الحادثة المؤكدة sure event. أيضا سوف نعتبر الفئة الخالية ϕ حادثه مستحيلة الحدوث . فعلى سبيل المثال الحادثة ظهور 7 عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة تعتبر حادثة مستحيلة الحدوث .

تعريف : يقال أن A , B حادثتان مانعتين (متنافيتان) mutually exclusive إذا كان وقوع إحداهما يمنع وقوع الأخرى وفي هذه الحالة فإن $A \cap B = \phi$.

على سبيل المثال عند إلقاء عملة مرة واحدة فإن ظهور الصورة يمنع ظهور الكتابة .

(١-٤) التكرار النسبي Relative Frequency

إذا كان S فضاء العينة لتجربة عشوائية فإنه يكون من الطبيعي طرح السؤال التالي .. هل حادثة معينة سوف تقع ؟ عادة نستخدم في هذه الحالة الجملة " احتمال probability " أو " فرصة chance " أو إمكانية likelihood . في هذا الجزء سوف نستعرض طريقة لتعيين (تخصيص) قيمة رقمية تقيس احتمال وقوع حادثة ما. هذه الطريقة تسمى طريقة التكرار النسبي relative frequency approach والتي تعتبر الطريقة الأكثر شيوعا لتقدير قيمة تقيس احتمال وقوع حادثة ما. تتطلب هذه الطريقة ملاحظة التجربة العشوائية في سلسلة كبيرة من المحاولات تم تسجيل نتيجة كل محاولة . إذا كان عدد مرات وقوع الحادثة A هو

وذلك في المحاولات التي عددها N فإن التكرار النسبي للحادثة A هو ببساطة n(A) . $f_A=n(A)/N$ عادة تكون قيم التكرار النسبي غريبة الأطوار للقيم الصغيرة من N ولكن عندما تزيد قيم N فقد أثبتت الخبرة أن n(A) / N تكتسب بعض الانتظام وتستقر حول قيمة ثابتة ، ولذلك عرف الاحتمال بأنه نهاية التكرار النسبي عندما يزداد عدد المحاولات أو التجارب ويؤول إلي ما لانهاية أي أن:

$$P(A)=\lim_{N\to\infty} n(A)/N$$

حيث P(A) تسمى احتمال وقوع الحادثة A أو مقياس احتمال probability measure .
وحيث أن عدد المحاولات نادرا ما يؤول إلي ما لانهاية فإننا نستخدم التكرار النسبى كتقدير لقيم الاحتمال ، يسمى الاحتمال المقدر بهذه الطريقة بالاحتمالى البعدي أو الاحتمال التجريبي experiment probability لأنه يعتمد على البيانات الملاحظة .

مثال (١-٣٦) بفرض أن S فضاء عينة لتجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحدة وبفرض أن A الحادثة " مجموع النقط على سطح الزهرتين تساوى 7 " وعلى ذلك :

$$A=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$$

وبفرض أن التجربة أجريت 400 مرة أي أن N = 400 وإذا كان عدد مرات وقوع الحادثة A هو 60 وعلى ذلك n(A) = 60

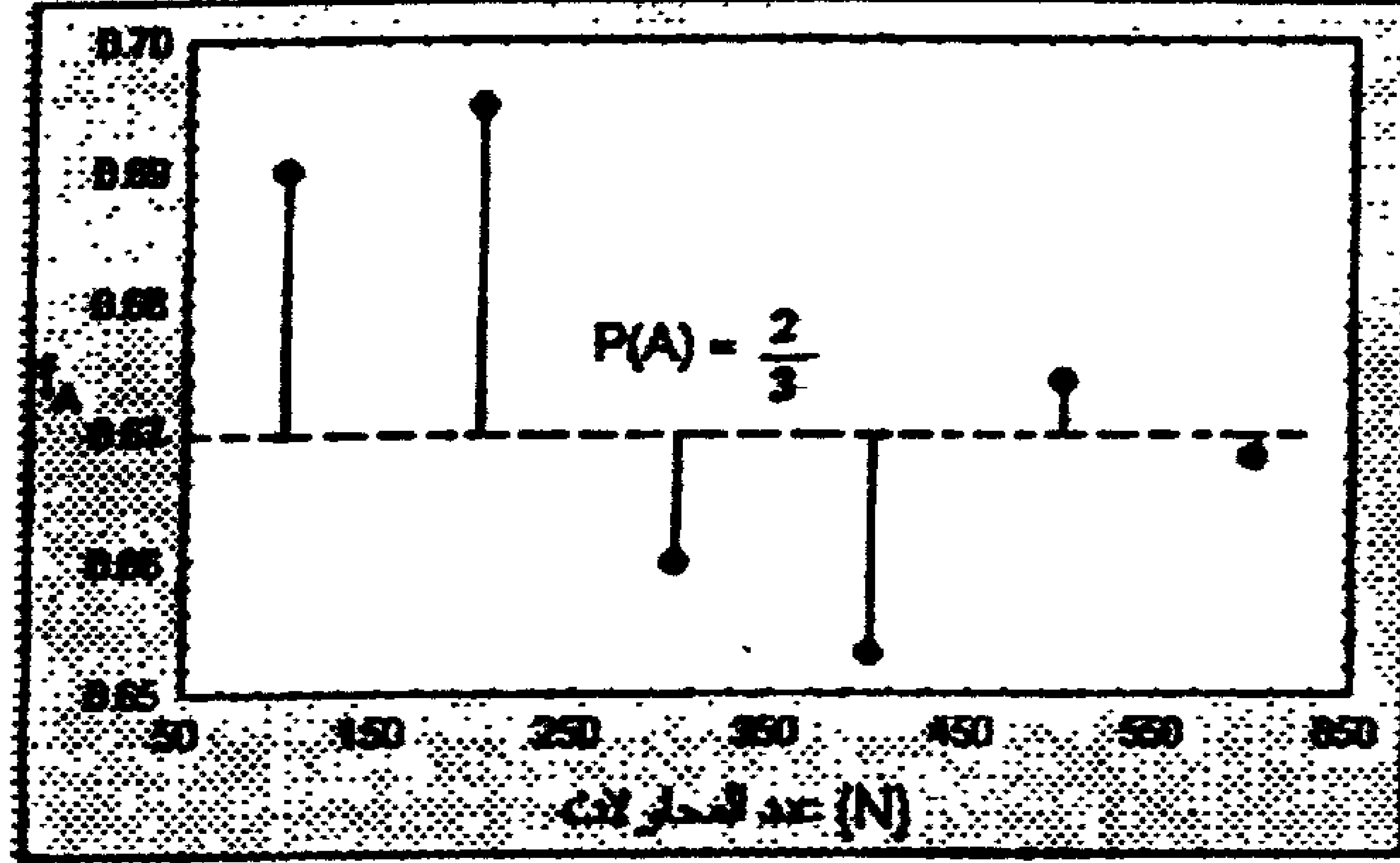
$$f_A=\frac{n(A)}{N}=\frac{60}{400}=.15.$$

وهذا يعني أن الحادثة A يرتبط بها العدد P(A) والذي يقترب من 15. أي أن $P(A)\approx .15$

مثال (١-٣٧) يعطى الجدول التالى نتيجة 600 محاولة لتجربة سحب كرة من وعاء يحتوي على أربع كرات بيضاء واثنين حمراء حيث A " حادثة ظهور كرة بيضاء " .

التكرار النسبي للحادثة A	عدد المحاولات	عدد الكرات البيضاء	عدد المحاولات
0.690	1-100	69	1-100
0.695	1-200	70	101-200
0.660	1-300	59	201-300
0.653	1-400	63	301-400
0.674	1-500	76	401-500
0.668	1-600	64	501-600

يلاحظ من الجدول السابق أنه بزيادة عدد المحاولات فإن التكرار النسبي للحادثـــة A يســتقر حول قيمة ثابتة $\frac{2}{3}$ والتي أثبتت الخبرة أنه يمكن الحصول عليها عند إجراء التجربـــة عـــدد كبير جدا من المرات ويمكن توضيح ذلك بيانيا كما في شكل (١-٧) .



عدد المحاولات

شكل (١-٧)

مثال (١-٣٨) وعاء يحتوي على M من الكرات حيث M عدد كبير غير معلــوم وبعــض الكرات حمراء . قام باحث بتعريف الحادثة A " الحصول على كرة حمراء " ويرغـــب فـــي حساب P(A) بطريقة التكرار النسبي . لذلك سحب N من الكرات من الوعاء بحيث أن كـــل كرة لها نفس الفرصة في الاختيار وتسجيل عدد الكرات الحمراء ثم يعيد الكرات إلى الوعـــاء ويرج الوعاء جيدا وقد كرر التجربة 5 مرات وقد لاحظ الباحث بعـد سـحب الكـرات فـي المحاولة الخامسة أن الوعاء أصبح خالي وبناء على ذلك أوقف التجربة وقـــد حصـــل علـــى البيانات التالية :

المحاولة الأولي :

$$f_A = \frac{n(A)}{N} = \frac{4}{10} = .4 \approx P(A)$$

المحاولة الثانية :

$$f_A = \frac{n(A)}{N} = \frac{38}{100} = .380 \approx P(A)$$

المحاولة الثالثة :

$$f_A = \frac{n(A)}{N} = \frac{388}{1000} = .388 \approx P(A)$$

المحاولة الرابعة :

$$f_A = \frac{n(A)}{N} = \frac{3840}{10000} = .384 \approx P(A)$$

المحاولة الخامسة :

$$f_A = \frac{n(A)}{N} = \frac{n(A)}{M} = \frac{38500}{100000} = .385 = P(A)$$

النتيجة الأخيرة تمثل الاحتمال المضبوط وسوف تتفق مع ما نتناوله في البند (١-٨) .

سوف نستفيد من خصائص التكرارات النسبية في الوصول إلي مسلمات الاحتمال. إذا كان S فضاء العينة و A حادثة ما فإن $N = n(S), 0 \le n(A)$ وذلك لأن $n(A)$ تمثل عدد مرات وقوع الحادثة A في N من المحاولات و S تحدث في كل محاولة . أكثر من ذلك إذا كانت A و B حادثتين مانعتين فإن النتائج في A منفصلة عن النتائج في B وعلى ذلك $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. عموما إذا كانت $A_1, A_2, A_3, \ldots$ أحداث مانعة لبعضها البعض $(A_i \cap A_j = \phi, i \ne j)$ فإن :

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + \ldots$$

وعلى ذلك :

$$0 \le f_A,$$
$$f_S = 1,$$
$$f_{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots} = f_{A_1} + f_{A_2} + f_{A_3} + \ldots$$

تحت شرط أن $A_1, A_2, A_3, \ldots$ أحداث مانعة لبعضها البعض .

في بعض الأحيان يتم تقدير قيم الاحتمال بناء على درجة الثقة في وقوع حادثة ما والمقررة من قبل شخص ما بناء على دليل متوفر لديه . هذا الدليل قد يكون معلومات كمية أو غير كمية . على سبيل المثال قد يحدد الشخص القائم على المشتريات في شركة ما الاحتمال 25. للحادثة أن شحنة ما تحتوي على الأكثر 2% وحدات تالفة . أيضا قد يصرح المدير الأول في شركة ما بأن احتمالات زيادة ميزانية الشركة أو انخفاضها أو بقائها على

حالها هو 04. , 0.13 , 0.83 على التوالي . ويجب ملاحظة أن الاحتمال المقدر بناء على التقدير الشخصي يختلف من شخص إلي آخر وذلك لعوامل كثيرة منها الخبرة .يسمى الاحتمال في هذه الحالة بالاحتمال الشخصي subject probability .

(١-٥) دالة الفئة الإحتمالية Probability Set Function

لتكن تجربة لفضاء عينة S ، يكون الهدف الأول هو تعيين ، لكل حادثة A ، رقم حقيقي P(A) يسمى احتمال A ، الذي يعطي مقياس لامكانية وقوع A عند إجراء التجربة. رياضيا ، يمكن أن نفكر في P(A) كدالة فئة . بمعنى أخر فهي دالة مجالها فضاء العينة ومداها فئة من الأعداد الحقيقية وتسمى دالة الفئة الاحتمالية probability set function .

بعض دوال الفئة قد تكون غير مناسبة لتعيين الاحتمالات للأحداث . لتكن تجربة بفضاء عينة S وإذا كان $A_1, A_2, A_3, \ldots$ تمثل الأحداث الممكنة فإن دالة الفئة والتي تربط قيمة حقيقية P(A) لكل حادثة A تسمى دالة فئة احتمالية حيث P(A) تسمى الاحتمال للحادثة A إذا تحققت الشروط التالية :

$0 \le P(A)$ لأي حادثة A (١-١)

$$P(S) = 1 \quad (١-٢)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (١-٣)$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \ldots$ أحداث مانعة لبعضها البعض .

(١-٦) بعض خواص الاحتمال Some Properties of Probability

من مسلمات دالة الفئة الاحتمالية يمكننا اشتقاق بعض الخواص المفيدة للاحتمال وذلك لأي فئتين A , B على فضاء تجربة عشوائية S :

نظرية (١-١) .

$$P(\phi) = 0$$

البرهان : بما أن $A \cap \phi = \phi$ لأي حادثة A ، ومن (١-٣) فإن :

$$P(A) = P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi)$$

وبطرح P(A) من الطرفين فإن $P(\phi) = 0$.

نظرية (١-٢) إذا كانت $A \subset B$ فإن $P(A) \le P(B)$.

البرهان : بما أن $A \subset B$ فإنه يمكننا كتابة B على الشكل $B = A \cup (B \cap A^c)$
حيث $A \cap (B \cap A^c) = \phi$ ومن (١-٣) فإن :

$$P(B) = P(A \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B \cap A^c).$$

ومن (١-١) فإن $P(B \cap A^c)$ غير سالبة وعلى ذلك بما أن $P(A)$ بالإضافة إلـــي مقــدار، أكبر أو يساوى صفر ، تساوى $P(B)$ وبالتالي فإن $P(A)$ لا يمكن أن تزيـــد عــن $P(B)$ ومنها فإن : $P(A) \le P(B)$.

نظرية (١-٣) $P(A^c) = 1 - P(A)$

البرهان : بما أن $S = A \cup A^c$, $A \cap A^c = \phi$ ومن (١-٢) و (١-٣) فإن :

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

وبطرح $P(A)$ من الطرفين نصل إلي النتيجة المطلوبة .

نظرية (١-٤) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

البرهان : سوف نعبر عن الحادثتين $A, A \cup B$ كاتحاد لحادثتين متنافيتين (مانعتين) حيث :

$$(A \cup B) = (A \cap B^c) \cup B,$$
$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

كما يتضح من شكل (١-٨) حيث $(A \cap B^c) \cap B = \phi$, $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \phi$
ومن (١-٣) فإن :

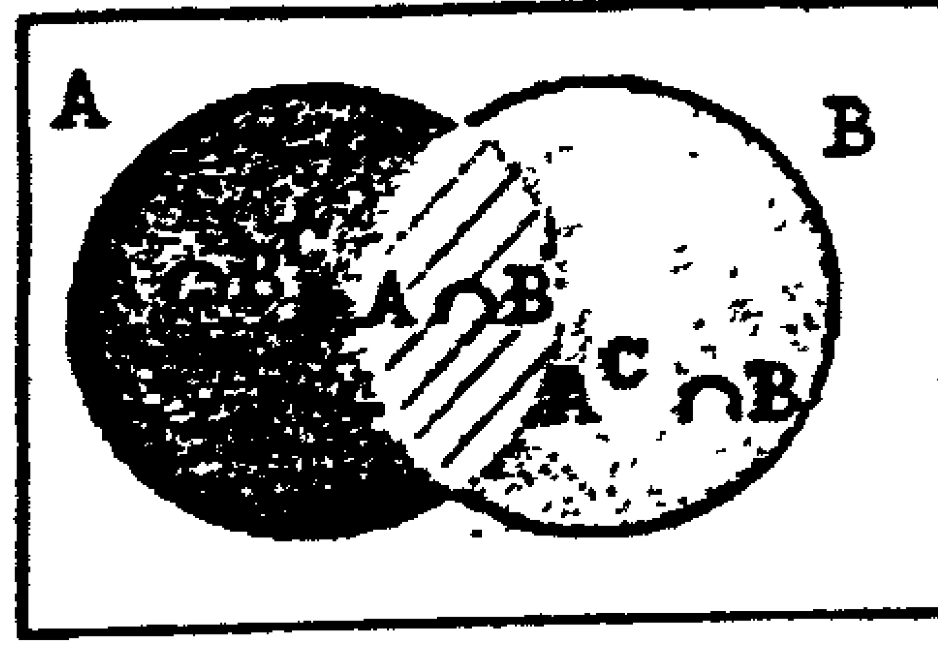
$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B),$$

وبنفس الشكل :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

وعلى ذلك تتحقق النظرية من المعادلة التالية :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B^c) + P(B) \\ &= [P(A) - P(A \cap B)] + P(B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$



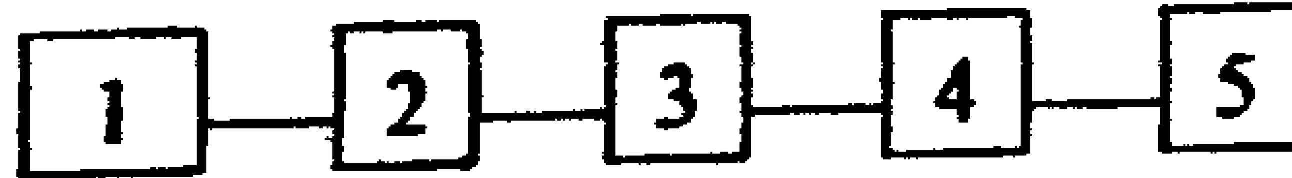
شكل (١-٨)

نظرية (١-٥) لأي حادثة A فإن $P(A) \le 1$.

البرهان : من نظرية (١-٣) فإن $P(A) = 1 - P(A^c)$.

أيضا من (١-١) فإن $P(A^c) \ge 0$ وعلى ذلك $P(A) \le 1$ وبتطبيق هذه النظرية مع (١-١) فإن $0 \le P(A) \le 1$.

مثال (١-٣٩) يتكون نظام من 5 مكونات مستقلة متصلة على التوالي (من الممكن أن تكون المكونات مصابيح كهربائية) وذلك كما هو موضح في شكل (١-٩) .



شكل (١-٩)

لكل مكون بفرض أن D ترمز إلي فشلة و `D ترمز إلي عدم فشلة (نجاح ) . بفرض أن A الحادثة " النظام يفشل " . لوقوع ذلك لا بد من فشل على الأقل واحدة من المكونات . النتائج في A قد تكون `D`D` DD`D ( 1, 2, 4, 5 تعمل و 3 تفشل) أو `DDD`D`D ... الخ) في الحقيقة يوجد في A (31) نتيجة مختلفة بينما الحادثة A^c تحتوى على نتيجة واحدة DDDDD فإذا كان $P(A^c) = 0.9^5 = 0.59$ فإن:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.59 = .41.$$

مثال (١-٤٠) وجد باحث في مجال الشرطة ، في مدينة ما ، أن 9% من السيارات التي تسرق عمرها أكثر من 10 سنوات و 11% عمرها من 5 إلي 9 سنوات و 15% عمرها من

3 إلي 4 سنوات و 20% عمرها سنتين و 20% عمرها سنة و 25% عمرها أقل من سنة وبفرض أن $A_i = \{a_i\}, i = 1,2,\ldots,6$ ، حيث :

أكثر من $a_1 = 10$ ، $a_2 = 5 - 9$ ، $a_3 = 3\text{-}4$ ، $a_4 = 2$ $a_5 = 1$ و

أقل من 1 $= a_6$ ولاحتمالاتها معطاة في الجدول التالي :

أعمار السيارات	أكثر من 10	5 – 9	3 – 4	2	1	أقل من 1
الحادثة	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
الاحتمال	.09	.11	.15	.20	.20	.25

أوجد احتمال أن سيارة تسرق عمرها على الأقل سنة .

الحل : بفرض أن A الحادثة " سيارة تسرق عمرها على الأقل سنة " وحيث أن الأحداث $A_i, i = 1,2,\ldots,6$ مانعة لبعضها البعض فإنه يمكن الحصول على الحل بطريقة أسهل باستخدام نظرية (١-٣) حيث $A = A_6^c$ وعلى ذلك :

$$P(A) = P(A_6^c) = 1 - P(A_6)$$
$$= 1 - .25 = .75.$$

مثال (١-٤١) في استطلاع للرأي وجد أن 75% من الأفراد يحصلون على الأخبار من التليفزيون و 35% يحصلون على الأخبار من الراديو و 25% يحصلون على الأخبار من التليفزيون والراديو . ما هي النسبة المئوية من الأشخاص في البحث الذين يحصلون على الأخبار من التليفزيون أو الراديو .

الحل : إذا كان A الحادثة " الشخص يحصل على الأخبار من التليفزيون و B الحادثة " الشخص يحصل على الأخبار من الراديو " فإن :

$$P(A \cap B) = 0.25 \quad \text{و} \quad P(B) = 0.35 \ , \ P(A) = 0.75$$

ومن نظرية (١-٤) فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= .75 + .35 - .25$$
$$= .85.$$

أي أن 85% = (.85) (100) من الأشخاص في البحث يحصلون على الأخبار إما من التليفزيون أو الراديو .

(١-٧) الاحتمال في الفضاء المتقطع Probability in Discrete Space

إن تعيين الاحتمال في حالة الفضاء المتقطع يمكن اختزاله إلى تعيين الاحتمالات للأحداث البسيطة ، وخصوصا إذا كان عدد الأحداث البسيطة كبيرا . بفرض أن لكل حادثة بسيطة $\{a_i\}$ فإننا نعين عدد حقيقي p_i ، بحيث أن $P(\{a_i\}) = p_i$. ولكي نحقق دالة الفئة الاحتمالية في (١-١) و (١-٢) و (١-٣) يكون من الضروري أن :

$$p_i \geq 0 \qquad \text{لكل } i \qquad (١-٤)$$

$$\sum_i p_i = 1 \qquad (١-٥)$$

ولأن كل حد في (١-٥) يقابل نتيجة في S فإن المجموع في (١-٥) يكون مجموع عادى إذا كانت S منتهية ، بينما يمثل مسلسلة إذا كانت S لا نهائية قابلة للعد . الاحتمال لأي حادثة مركبة يمكن تقديره وذلك بتمثيل الحادثة كاتحاد لأحداث بسيطة في فضاء العينة S . أي أن احتمال الحادثة A هو :

$$P(A) = \sum_{a_i \in A} P(\{a_i\})$$

مثال (١-٤٢) بفرض أن $\{6\}, \{5\}, \{4\}, \{3\}, \{2\}, \{1\}$ هي الأحداث البسيطة والمرتبطة بتجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحدة والمقابلة للأحداث $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ على التوالي . بفرض أن الزهرة صنعت بحيث أن إمكانية وقوع أي نتيجة من النتائج الزوجية ضعف إمكانية وقوع أي نتيجة من النتائج الفردية . وعلى ذلك :

$$P(A_2) = P(A_4) = P(A_6) = \frac{2}{9},$$

$$P(A_1) = P(A_3) = P(A_5) = \frac{1}{9}.$$

الحادثة A ظهور رقم زوجي هي :

$$A = A_2 \cup A_4 \cup A_6$$

وعلى ذلك :

$$P(A) = P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

الحادثة B " ظهور رقم أقل من أو يساوى 3 " هو :

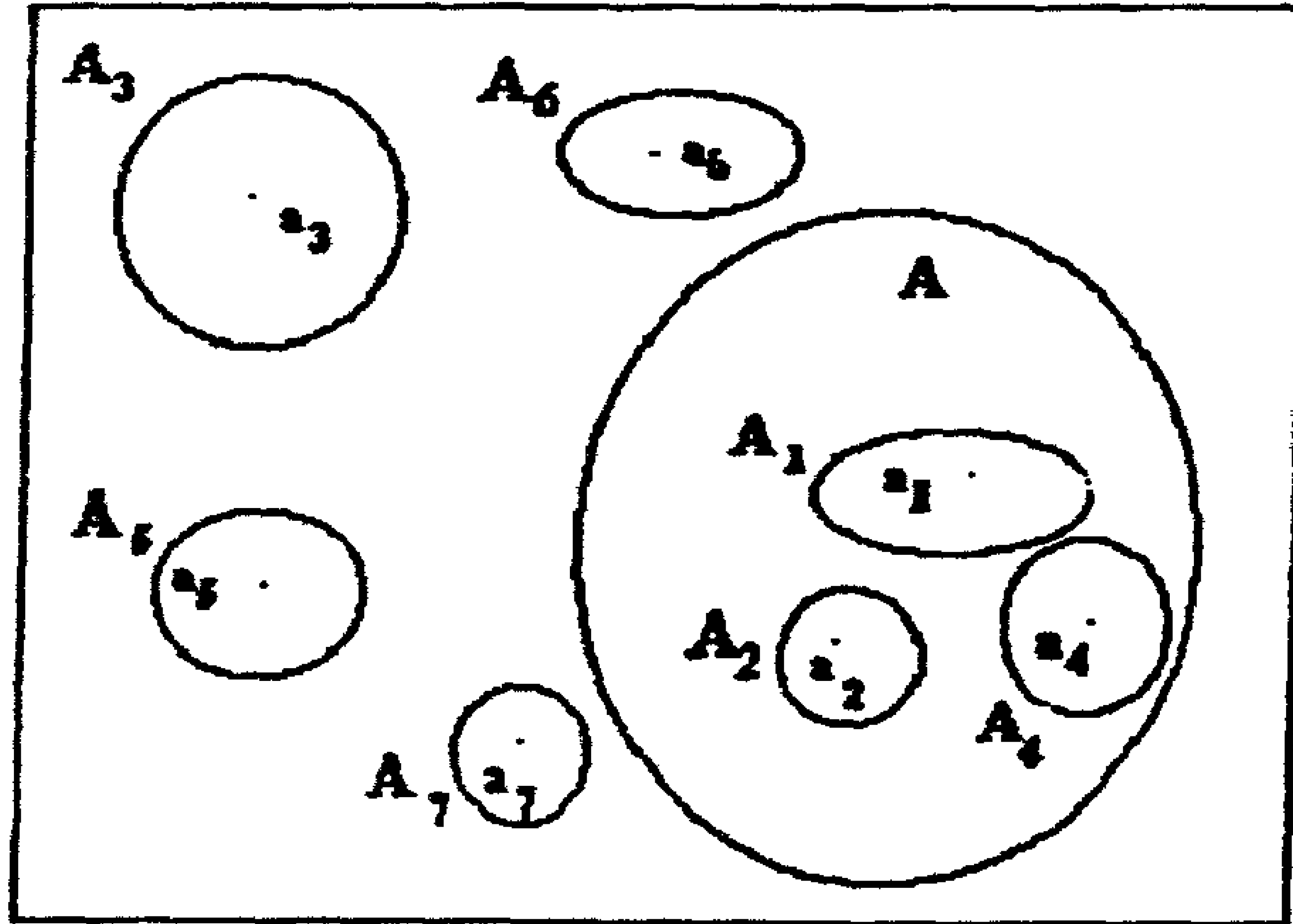
$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

وعلى ذلك :

$$P(B)=P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}.$$

مثال (١-٤٣) يعطى الجدول التالي الاحتمالات المختلفة لفضاء العينة الموضح في شكل (١-١٠) .

الحادثة البسيطة	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
الاحتمال	.08	.25	.33	.04	.16	.05	.09



شكل (١-١٠)

بفرض أن A الحادثة الناتجة من اتحاد A_1 , A_2 , A_4 أي أن :

$$A=A_1 \cup A_2 \cup A_4$$

وعلى ذلك :

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_4)$$
$$=.08+.25+.04=.37.$$

مثال (١-٤٤) وعاء به كرات حمراء (R) وكرات بيضاء (W) وبفرض أن شخص سحب كرتين من الوعاء واحدة تلو الأخرى من الوعاء وبدون إرجاع الكره بعد سحبها من الوعاء .

الاحتمالات للأحداث البسيطة $\{a_i\}, i = 1,2,3,4$ معطاة في الجدول التالي :

$\{a_i\}$	{WW}	{W R}	{R W }	{R R}
$P(\{a_i\})$	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

إذا كان A الحادثة أن الكره الأولي بيضاء فإن $A = \{ W W , W R \}$ وعلى ذلك :

$$P(A) = P(\{W W\}) + P(\{W R\}).$$
$$= \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

مثال (١-٤٥) ألقيت عملة حتى ظهور أول صورة . الأحداث البسيطة لهذه التجربة هي متتابعات وكل متتابعة عنصرها الأخير لا بد أن يكون H أي :

H , TH , TTH, TTTH, TTTTH,....

أن تعيين الاحتمالات لهذه النتائج سوف يكون تبعا للصيغة :

$$P(TTT...TH) = \frac{1}{2^k},$$

حيث k تمثل عدد مرات إلقاء العملة (عدد المحاولات حتى ظهور أول صورة) حيث $k = 1, 2, 3,...$. تبعا لصيغة المجموع لمسلسلة هندسية فإن مجموع الاحتمالات لابد أن يساوى واحد أي أن

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

بفرض أن A الحادثة " أول صورة تظهر بعد ثلاث محاولات على الأكثر " وعلى ذلك :

$$P(A) = P(H) + P(TH) + P(TTH)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

الحادثة B " أول صورة تظهر عندما تكون عدد المحاولات زوجي "

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$$
$$= \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

(١-٨) النتائج المتساوية في إمكانية الحدوث Equally Likely Outcomes

في كثير من التجارب التي تحتوي على M من النتائج ، يكون من الضروري تعيين احتمالات متساوية لكل الأحداث البسيطة التي عددها M والأمثلة على ذلك كثيرة ، مثل إلقاء عملة متزنة مرة أو إلقاء زهرة متزنة مرة حيث $p = P(\{a_i\})$ لكل i وعلى ذلك :

$$1 = \sum_{i=1}^{M} P(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{M} p = M.p$$

وعلى ذلك $p = \frac{1}{M}$.

أي أنه إذا كان لدينا M من النواتج الممكنة والمتساوية في إمكانية الحدوث فإن الاحتمال الذي يعين لكل نتيجة هو 1/M . بفرض A حادثه و m(A) تمثل عدد النتائج في A فإن :

$$P(A) = \sum_{a_i \in A} P(\{a_i\}) = \sum_{a_i \in A} \frac{1}{M}$$

$$= \frac{m(A)}{M}.$$

يسمى الاحتمال المقدر بهذه الطريقة ، والموضوع من قبل Laplace ، الاحتمال القديم أو الاحتمال الكلاسيكي classical probability ، كما يسمي أيضا الاحتمال القبلي وذلك لأنه يعين قبل إجراء التجربة . يلاحظ أن Laplace هنا لم يأخذ في الحسبان كلا من التجارب التي لها عدد لا نهائى غير معدود من النتائج «فضاء متصل» أو التجارب العشوائية التي لها عدد محدود من نقاط العينة ولكن الأحداث البسيطة غير متساوية في إمكانية الحدوث .

للمشاكل التي تناسب هذه الطريقة في حساب الاحتمال يكون من السهولة إثبات أن مسلمات دالة الاحتمال تتحقق . على سبيل المثال للحادثة A :

$$P(A) = \frac{m(A)}{M} \geq 0,$$

$$P(S) = \frac{m(S)}{M} = \frac{M}{M} = 1,$$

$$P(A \cup B) = \frac{m(A \cup B)}{M}$$

$$= \frac{m(A) + m(B)}{M}$$

$$= P(A) + P(B).$$

حيث A و B حادثتين مانعتين . يسمى الفضاء في هذه الحالة بالفضاء المنتظم uniform space .التطبيق الأساسي للاحتمال الكلاسيكي يظهر عند اختيار عنصر أو فئة من العناصر عشوائيا at random من مجموعة من العناصر (الأشياء) .

تعريف : إذا اختير عنصر من تجمع منتهي من العناصر المميزة بحيث أن كل عنصر له نفس الاحتمال في الاختيار ، في هذه الحالة نقول أن العنصر اختير عشوائيا . وبنفس الشكل إذا اختيرت فئة جزئية من العناصر بحيث أن كل فئة جزئية من نفس الحجم لها نفس الاحتمال في الاختيار ، في هذه الحالة نقول أن الفئة الجزئية مختارة عشوائيا .

مثال (١-٤٦) في تجربة تعليمية يوضع فأر في خليه لها 10 أبواب متماثلة 2 منهم تؤدي إلي مكان للطعام . بفرض أن الفأر لا يعلم أي مكان يؤدى إلي الطعام فإن كل الأبواب لها نفس الاحتمال في الاختيار. بفرض أن A الحادثة أن الفأر ينجح في الوصول إلي مكان الطعام وعلى ذلك :

$$P(A)=\frac{m(A)}{M}=\frac{2}{10}=.2$$

حيث m(A) ترمز لعدد الأبواب التي تؤدي إلي مكان الطعام .

مثال (١-٤٧) احسب احتمال ظهور صورة واحدة بالضبط عند إلقاء عملتين .

الحل : فضاء العينة لهذه التجربة يمكن الحصول عليها من الجدول التالي :

الحادثة	العملة الأولي	العملة الثانية	$P(A_i)$
A_1	H	H	¼
A_2	H	T	¼
A_3	T	H	¼
A_4	T	T	¼

بفرض أن A الحادثة " بالضبط صورة واحدة " وعلى ذلك :

$$P(A)=P(A_2)+P(A_3)=1/4+1/4=\frac{1}{2}.$$

مثال (١-٤٨) التجربة التالية تشتمل على وعاءين الوعاء I يحتوي على كرتين لونهما أبيض وكرة ملونة . الوعاء الثاني يحتوي على كرة بيضاء . سحبت كرة من الوعاء I

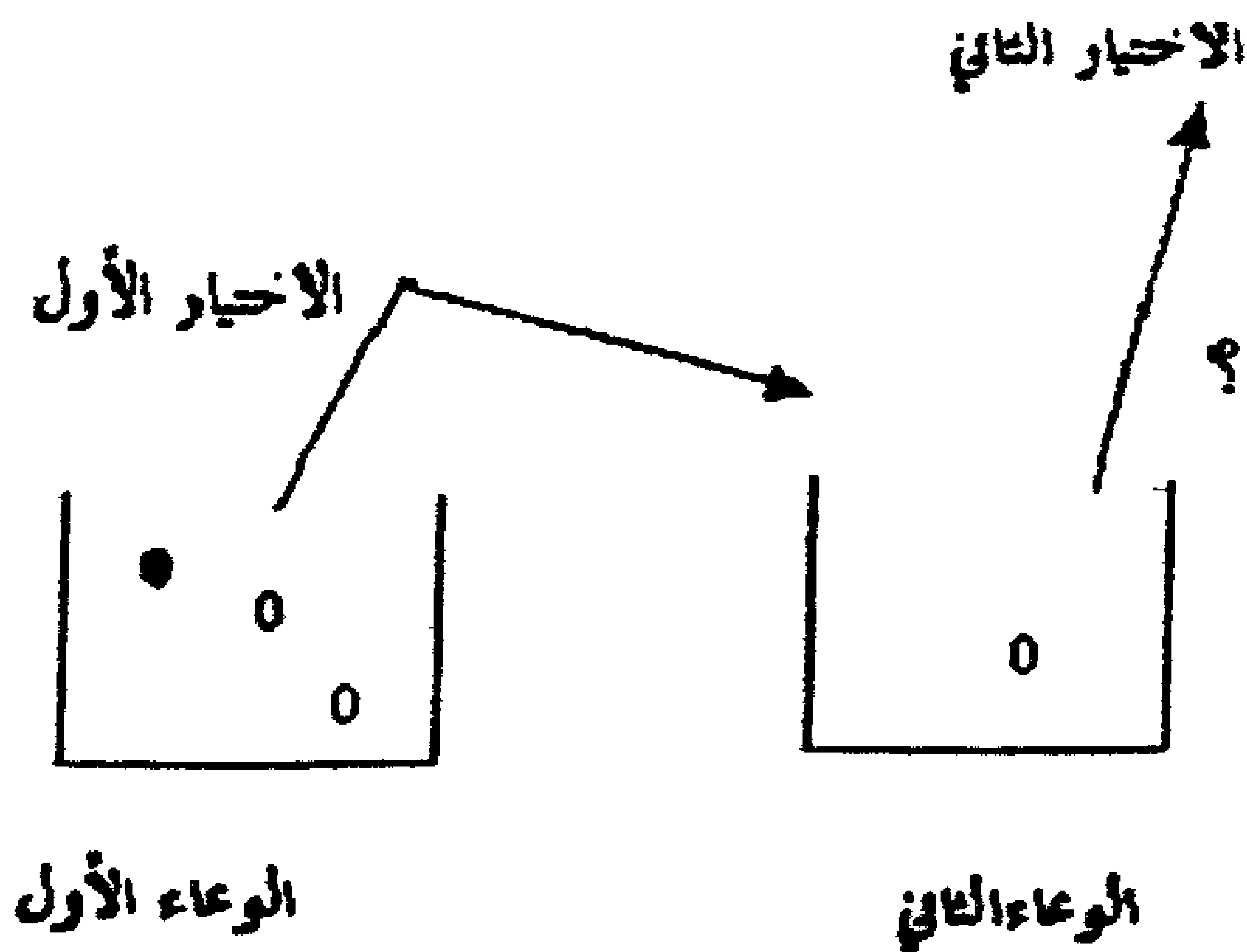
ووضعت في الوعاء 2 ثم سحبت كرة من الوعاء الثاني . مـــا هــو الاحتمـــال أن الكـــرة المختارة من الوعاء الثاني بيضاء ؟ أنظر شكل (١-١١) .

الحل : يمكن تسهيل المشكلة بوضع قائمة بنقاط العينة . ليكن الكرات البيضاء في الوعـــاء 1 مرقمة بالأرقام 1 ,2 والرقم 3 للكرة البيضاء في الوعاء 2 و B للكرة الملونـــة .يعطـــى الجدول التالى نقاط العينة حيث a_i ترمز للكرة البيضاء رقم i حيث $i=1,2,3$.

السحب من :			
الحادثة	الوعاء 1	الوعاء 2	$P(A_i)$
A_1	a_1	a_1	1/6
A_2	a_1	a_3	1/6
A_3	a_2	a_2	1/6
A_4	a_2	a_3	1/6
A_5	B	B	1/6
A_6	B	a_3	1/6

الحادثة A " اختيار كرة بيضاء من الوعاء 2 " تقع إذا وقعت الأحداث A_1 , A_2 , A_3 , A_4 أو A_6 . تحت فرض أن الأحداث البسيطة في فضاء العينة متساوية في إمكانية الحدوث فإننـــا نعين الاحتمال 1/6 لكل نقطة عينة . وعلى ذلك :

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_6)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$



شكل (١-١١)

مثال (١-٤٩) ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة . يتكون فضاء العينة من 36 نقطة عينة . بفرض أن كل زهرة متزنة فإن :

$$P(A_i)=\frac{1}{36}, i=1,2,\ldots,36.$$

وعلى ذلك للحادثة A " مجموع النقاط على سطح النردين 7 " والموضحة في شكل (١-١٢) حيث :

$$A=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$$

فإن :

$$P(A)=\frac{m(A)}{M}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

شكل (١-١٢)

مثال (١-٥٠) وعاء يحتوي على كرات مرقمة كالآتي 1, 2, 3, ..., 36, 0, 00 . بفرض أن الأحداث البسيطة معرفة كالتالي : A_i = { تختار i } و $i=1,2,\ldots,36$ و A_{37} = { تختار 0 } و A_{38} = { يختار 00 } . إذا كان A الحادثة " ظهور رقم زوجي " فإن

$$A=A_2\cup A_4\cup \ldots\cup A_{36},$$
$$P(A)=P(A_2)+P(A_4)+\ldots+P(A_{36})$$
$$=\frac{18}{38}.$$

مثال (١-٥١) بفرض أن A الحادثة " يوم 13 في شهر مختار هو يوم الجمعة " أوجد احتمال للحادثة A وذلك بالاعتماد على البيانات المعطاة في الجدول التالي لـ 4800 تاريخ يوافق يوم 13 من أي شهر وذلك للسنوات من 1600 حتى 2000 .

الحادثة	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت
الاحتمال .	$\frac{687}{4800}$	$\frac{685}{4800}$	$\frac{685}{4800}$	$\frac{687}{4800}$	$\frac{684}{4800}$	$\frac{688}{4800}$	$\frac{684}{4800}$

الحل :

$$P(A)=\frac{m(A)}{M}=\frac{688}{4800}.$$

مثال (١-٥٢) بفرض أن اللوحة المعدنية لرقم السيارة في بلد ما يبدأ من 1 . بفرض وجود 3000000 لوحة معدنية. ما هو احتمال أن الرقم الأول في اللوحة المعدنية لسيارة مختارة سوف يكون 1 وذلك بالاعتماد على البيانات في الجدول التالى :

كل الألواح المعدنية في الفترات التالية تحتوى على أرقام تبدأ بالرقم واحد .	عدد الأرقام التي تبدأ بواحد في هذه الفترة
1	1
10-19	10
100-199	100
1000-1999	1000
10000-19999	10000
100000-199999	100000
1000000-1999999	1000000

الحـــل :

$$P(A)=\frac{m(A)}{M}=\frac{1111111}{3000000}$$
$$=0.37037.$$

مثال (١-٥٣) وعاء يحتوي على 10 كرات حمراء (R) و 6 بيضاء (W) و 3 لونهم أصفر (Y) و 5 لونهم أخضر (G) . في تجربة لسحب كرة من الوعاء فإن فضـــاء العينـــة ســـوف يكون :

$$S=\{R, W, G, Y\}.$$

وحيث أن الوعاء به 24 كرة فإنه من المنطقي تعيين الاحتمالات الآتية لنقاط العينة :

$$p_1 = P(R) = \frac{10}{24},$$
$$p_2 = P(W) = \frac{6}{24},$$
$$p_3 = P(G) = \frac{5}{24},$$
$$p_4 = P(Y) = \frac{3}{24}.$$

إذا كان A الحادثة " أن الكرة المختارة حمراء أو بيضاء " فإن :

$$A = \{R, W\}$$
$$P(A) = P(R) + P(W)$$
$$= \frac{10}{24} + \frac{6}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

إذا كانت B الحادثة " ليست صفراء " أي أن :

$$B = \{R, W, G\}$$

وعلى ذلك :

$$P(B) = P(R) + P(W) + P(G)$$
$$= \frac{10}{24} + \frac{6}{24} + \frac{5}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}.$$

(١-٩) فضاء العينة اللانهائـي (الغير قابل للعد)

Infinite Sample Space (Uncountable)

في كثير من التجارب يكون فضاء العينة لا نهائي غير قابل للعد . في هذه الحالة يمكـن تعريف فضاء العينة هندسياً وسوف يكون لفضاء العينة بعض القياسات $m(S)$ مثل الطول أو العرض أو المساحة أو الحجم . في الغالب تكون الأحداث البسيطة في هذا الفضـاء متسـاوية في إمكانية الحدوث ويمكن حساب احتمال الحادثة A كالآتي :

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)}$$

فعلى سبيل المثال :

$$P(A) = \frac{\text{طول } A}{\text{طول } S}$$

أو

$$P(A)=\frac{A \text{ مساحة}}{S \text{ مساحة}}$$

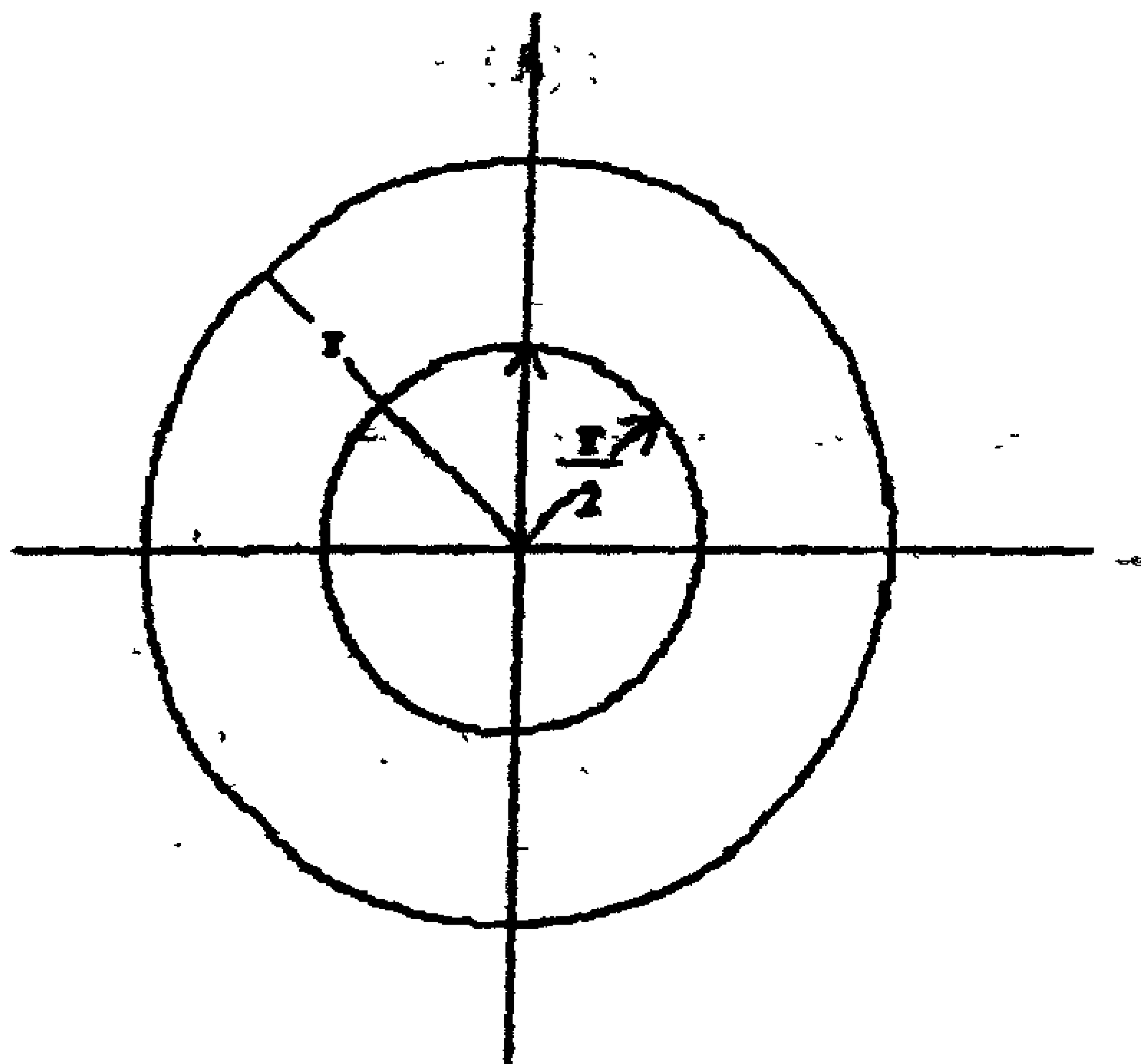
مثال (١-٥٤) من المفروض أن يغادر قطار في مدينة ما المحطة الساعة 30 : 7 ولكن القطار يغادر المحطة بأزمنة منتظمة تتراوح بين الساعة 25 : 7 و 40 : 7 . يقوم شخص على بعد 5 دقائق من محطة القطار ويغادر منزلة الساعة 30 : 7 . فضاء العينة في هذه الحالة هو الفترة [40 : 7 , 25 : 7] والتي طولها 15 دقيقة والتي تمثل أزمنة المغادرة. أوجد احتمال أن يلحق الشخص القطار .

الحل : بفرض أن الحادثة " الشخص يلحق القطار" تقابل الفترة [40 : 7 , 35 : 7] والتي طولها 5 دقائق وعلى ذلك :

$$P(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

مثال (١-٥٥) صوب شخص سهم ناحية هدف دائري ونرغب في حساب احتمال أن التصويب يكون أقرب إلي مركز الدائرة من محيطها . سوف نفترض أن الشخص غير مدرب (نموذج منتظم). بفرض أن الهدف له نصف قطر r ، وعلى ذلك فإن فضاء العينة سوف يتكون من كل النقاط في الهدف (الدائرة) . مساحة الدائرة سوف تكون πr^2 . الحادثة A " التصويب أقرب إلي مركز الدائرة من محيطها " تمثل بدائرة مركزها هو مركز الهدف ونصف قطرها r/2 (موضح في شكل (١-١٣)) وعلى ذلك مساحة الحادثة A هو $\pi(r/2)^2$ ومنها :

$$P(A)=(\pi r^2/4)/\pi r^2=\frac{1}{4}.$$



شكل (١-١٣)

مثال (١-٥٦) اختيرت نقطتان a , b بطريقة عشوائية علي خط الأعداد الحقيقية R بحيث أن :

$$-2 < b \leq 0 \quad , \quad 0 \leq a \leq 3$$

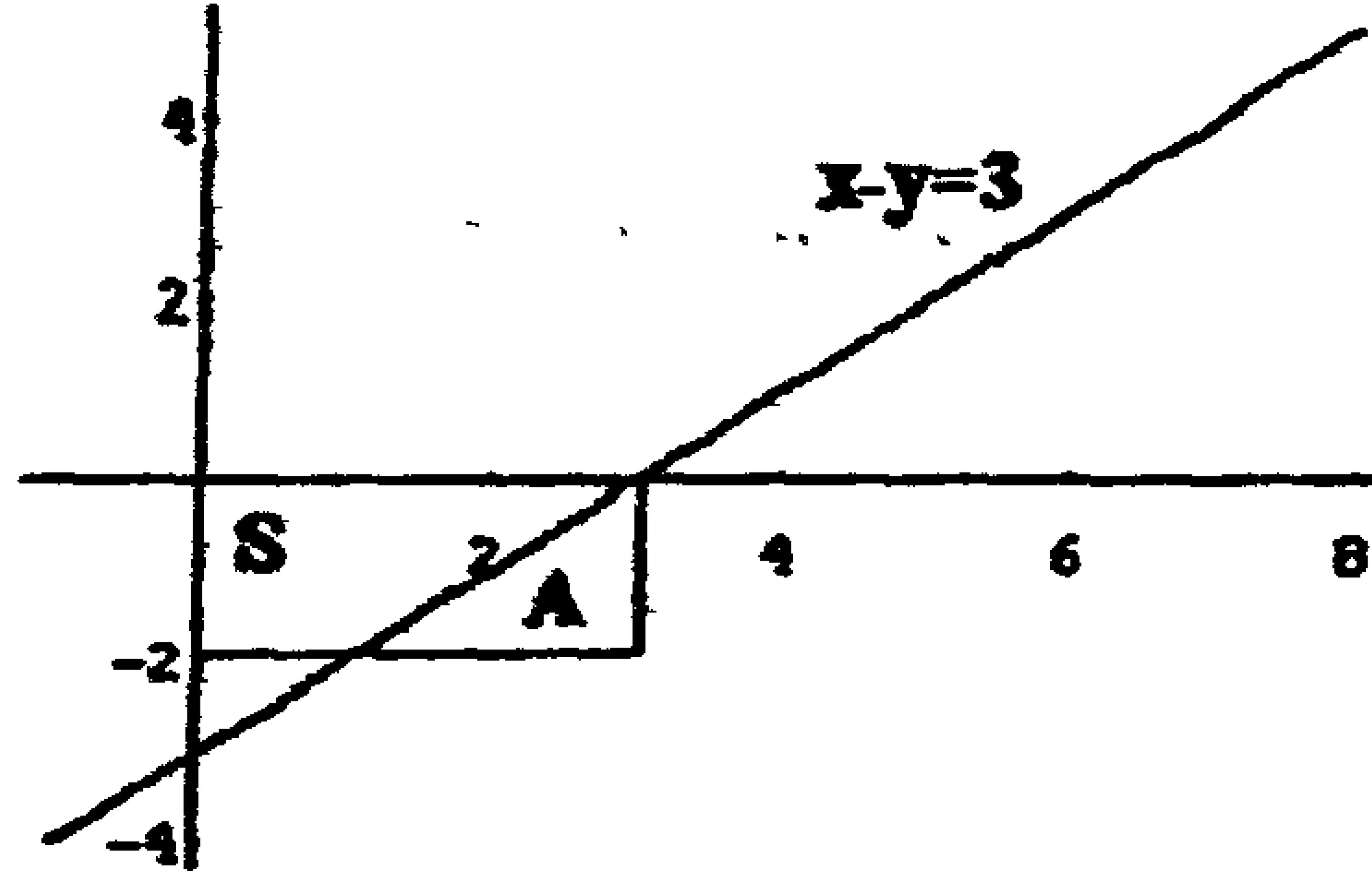
المطلوب إيجاد احتمال أن المسافة بين a , b أكبر من 3 .

الحل : بفرض أن فضاء العينة ممثل بمستطيل كما في شكل (١-١٤) حيث :

$$S = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 3, -2 < y \leq 0\}$$

اختيار النقطتين a, b تكافئ اختيار نقطة (a, b) في S . إذا كانت d تمثل الفرق بين a , b فإن الحادثة $A = \{ d > 3 \}$ تتكون من كل النقاط في المثلث أسفل الخط x-y= 3 كما هو موضح في شكل (١-١٤) وحيث أن مساحة فضاء العينة يساوى ، 6 = 2.3 بينما المساحة المقابلة للحادثة A هي 2 = 2.2 .½ ومنها :

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$



شكل (١-١٤)

مثال (١-٥٧) عصاه طولها L فإذا تم كسرها بطريقة عشوائية عند نقطة فإن ذلـــك يكـافئ اختيار نقطة عشوائية في فضاء العينة $[0, L]$ فإذا كانت $0 \le a < b \le L$ فـإن الكسـر يحدث بين a و b باحتمال $(b - a) / L$ ما هو الاحتمال أن الكسر سوف يحدث عند نقطـة خاصة لتكن C ؟

الحل : نفرض أن :

$$\{C\} \subseteq (C - \frac{1}{n}, C + \frac{1}{n}).$$

حيث n أي قيمة وبفرض أن الفترة $C - (1/n), C + (1/n)$ تمثل حادثة وعلى ذلـك وتبعـا لنظرية (١-٢) فإن :

$$P(\{C\}) \le P(C - \frac{1}{n},\ C + \frac{1}{n}) = \frac{2/n}{L} = \frac{2}{nL}.$$

وعلى ذلك :

$$P(\{C\}) \le \frac{2}{nL}$$

لأي قيمة n وبما أن :

$$\lim_{n\to\infty} (2/n\ L)=0$$

وتبعا لذلك فإن $P(\{C\})$ لابد أن تساوي صفــر . وعلى ذلك بالرغم من أنه من المحتمــل أن يكون الكسر عند هذه النقطة فاحتمال حدوث ذلك يساوى صفر .

(١٠-١) طرق العـد Counting Techniques

في كثير من التجارب ذات الفضاء المنتهي (كما ذكرنا في البند الســابق) يكــون مــن المناسب وضع الفرض أن الأحداث البسيطة في فضاء العينة متساوية في إمكانية الحـــدوث . في هذه الحالة نحصل على النموذج الرياضي بإتباع الطريقة الكلاسيكية ، أي تعيين لاحتمـــال حادثة ما ، A ، بالصيغة $P(A)=\dfrac{m(A)}{M}$ حيث $m(A)$ و M هما عدد نقاط العينة فــي A و S على التوالي ($M = m(S)$) . عملية حصر عدد الطرق التي تقــع بــها أي حادثــة سوف تكون مشكلة صعبة في التجارب المركبة . بعض أساسيات العد ســوف نناقشــها فــي الجزء التالي :

(١-١٠-١) قاعـدة الضــرب Counting Rule

تنص قاعدة الضرب على : إذا أمكن إجراء عملية ما بطرق عددها N_1 وإذا أمكن إجــراء عملية ثانية بطرق عددها N_2 وإذا أمكن إجراء عملية k بطرق عددها N_k فإنه يمكن إجــراء العمليات معا بطرق عددها :

$$N_1 \,.\, N_2 \ldots N_k$$

عندما $k = 2$ فإن الصيغة السابقة تصبح :

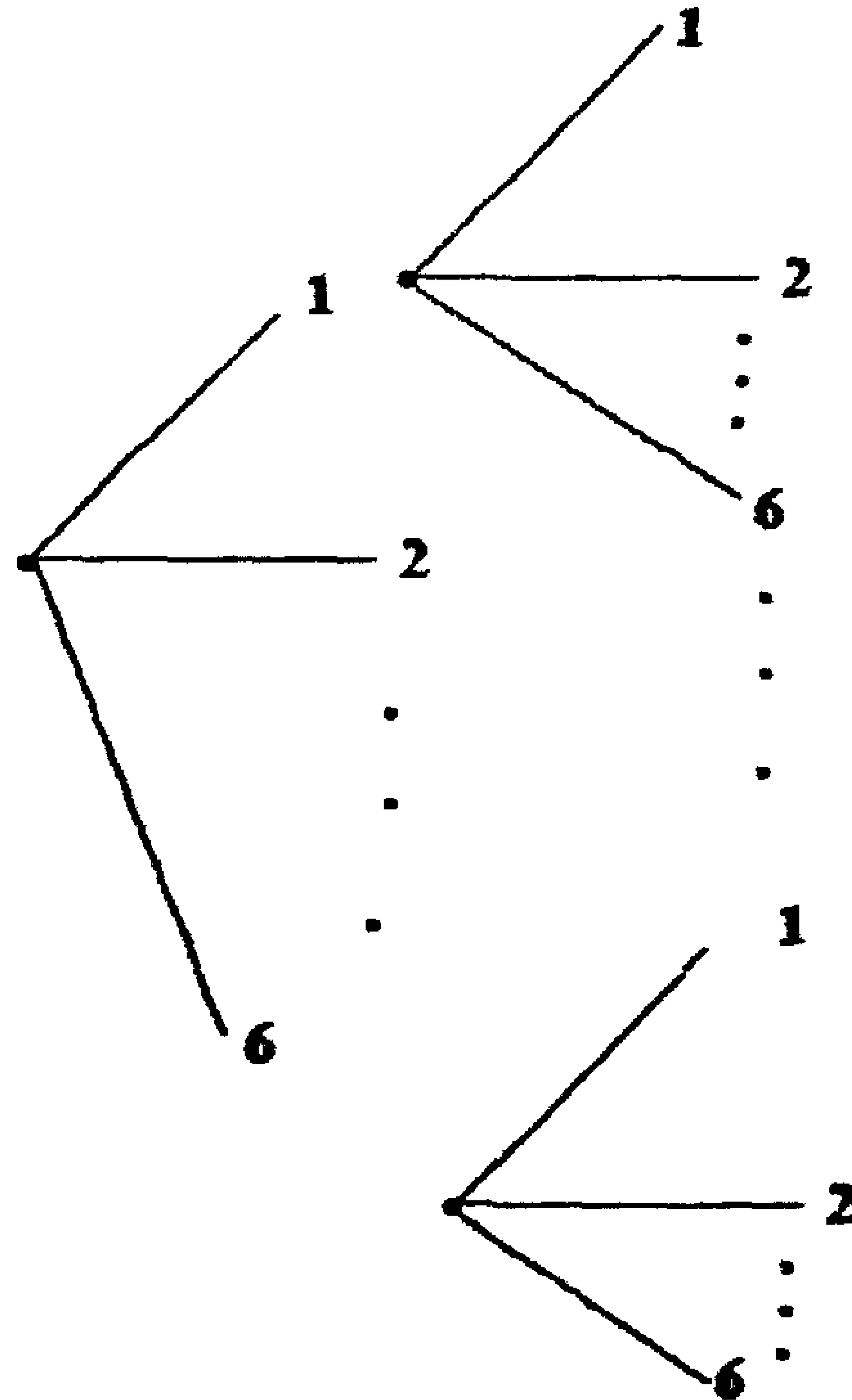
$$N_1 \,.\, N_2$$

في هذه الحالة فإن N_1 تتكون من العناصر $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}$ و N_2 تتكون مــن العنــاصر $b_1, b_2, \ldots, b_{N_2}$. وعلى ذلك يمكن تكوين $N_2.N_1$ من الأزواج المرتــبة وكــل زوج يحتوى على عنصر من N_1 وعنصر من N_2 والذي يمكن توضيحه بيانيا كما في شــكل (١-١٥) حيث يوجد مربع واحد في الجدول لكل زوج (a_i, b_j).

	a_1	a_2	a_3		a_{N_1}
b_1					
b_2					
b_3					
b_{N_2}					

شكل (١-١٥)

مثال (١-٥٨) إذا ألقيت زهره نرد زرقاء ثم تلي ذلك إلقاء زهره نرد حمراء . وعلـــى ذلـــك العدد الكلي لنواتج إلقاء النردين ، والموضح في شكل الشجرة شكل (١-١٦)، هو $= 6.6$ 36 حيث $N_1 = 6$ لأن عدد النقاط على سطح الزهرة الزرقاء يأخذ أي رقم من 1 إلي 6 . أيضا $N_2 = 6$ لأن عدد النقاط على سطح الزهرة الحمراء يأخذ أي رقم من 1 إلي 6 .



شكل (١-١٦)

مثال (١-٥٩) للمثال (١-٤٨) كم عدد نقاط العينة المرتبط بهذه التجربة ؟

الحل : عدد الطرق لاختيار كرة من الوعاء 1 هو $N_1 = 3$. بعد اختيار واحدة من هذه الطرق فإن الكرة من الوعاء 2 يمكن اختيارها بطرق عددها $N_2 = 2$.العدد الكلي لنقاط العينة هو :

$$N_1 . N_2 = 3.2 = 6$$

مثال (١-٦٠) ما هو عدد نقاط العينة في فضاء العينة المرتبط بإلقاء ثلاث عملات .

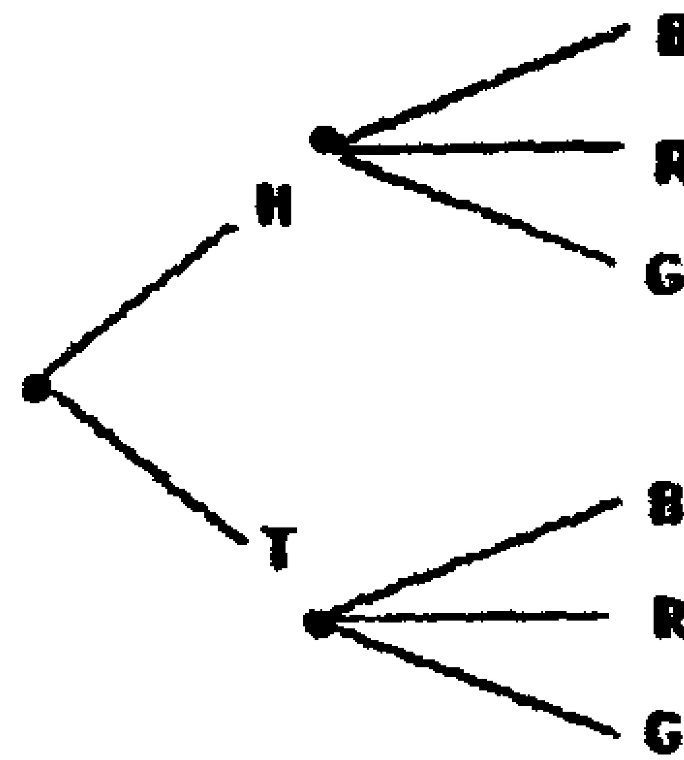
الحل : كل عملة لها نتيجتين وعلى ذلك فإن الحل هو :

$$N_1 . N_2 . N_3 = 2.2.2 = 8.$$

مثال (١-٦١) بفرض أن عملية إلقاء عمله واختيار كرة عشوائيا من وعاء يحتوي على كرة سوداء (B) وكرة حمراء (R) وكرة خضراء (G) . النتائج الممكنة لهذه العملية هي :

HB , HR , HG , TB , TR , TG

وعلى ذلك $N_1 = 2$ (نتائج إلقاء عملة) و $N_2 = 3$ (نتائج سحب كرة من وعاء) . وعلى ذلك عدد الطرق لإلقاء عملة و سحب كرة من وعاء هو $N_1 . N_2 = 3.2 = 6$ والموضحة بشكل الشجرة في شكل (١-١٧) .



شكل (١-١٧)

مثال (١-٦٢) إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوى على حرفين من اللغة الإنجليزية يتبعهما ثلاثة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفر فما هو عدد اللوحات المعدنية التي يمكن طبعها لأرقام السيارات .

الحل : يمكن كتابة الحرف الأول بعدد 26 طريقة مختلفة ، والحرف الثاني بعدد 26 طريقة مختلفة (لانه يسمح بالتكرار). ويختار الرقم الأول بتسع طرق مختلفة وكل من الرقمين الآخرين بعشرة طرق فيكون عدد اللوحات المختلفة التي يمكن طبعها هي :

$$26 \,.\, 26 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 10 = 608400.$$

مثال (١-٦٣) بفرض أن شخص خطط للقيام برحلة من المدينة A إلي المدينة C وذلك عبر المدينة B وقد قرر السفر من A على B بالطائرة ومن B إلي C بالسفينة فإذا كان هناك 6 خطوط طيران تعمل بين A و B و 4 خطوط ملاحية تعمل بين C , B . بكم طريقة يمكن لهذا الشخص أن يسافر ويعود بدون أن يستخدم الخط أكثر من مرة ؟

الحل : الرحلة من A إلي B يمكن أن تتم بطرق عددها 6 وبعد استخدام واحدة من هذه الطرق يمكن أن يسافر من B إلي C بطرق عددها 4 . وعند العودة فإن الرحلة من C إلي B تتم بطرق عددها 3 والرحلة من B إلي A تتم بطرق عددها 5 . باستخدام قاعدة الضرب فإن عدد الطرق للذهاب والعودة هي :

$$6.4.3.5 = 360.$$

نظرية (١-٦) إذا كانت N تمثل النتائج الممكنة لكل محاولة من المحاولات التي عددها k ، فإن النتائج الممكنة لفضاء العينة سوف تكون N^k .

مثال (١-٦٤) كم عدد الفئات الجزئية التي يمكن تكوينها من فئة تحتوي على k من العناصر .

الحل : لتكوين فئة لابد أن نقرر ما إذا كان كل عنصر سوف ينتمي إلي هذه الفئة الجزئية أم لا . وعلى ذلك لكل عنصر من العناصر التي عددها k يوجد اختياران ، والتي تؤدي إلي 2^k فئات جزئية منها فئة العدم ، والتي تمثل الحالة عدم وجود أي عنصر في الفئة الجزئية .

مثال (١-٦٥) كم عدد الطرق الممكنة لشخص داخل محل ملابس لاختيار رابطة عنق وقميص إذا توفر له 4 أربطة عنق و 4 قمصان في المحل ؟

الحل : عدد أربطة العنق $N_1 = 4$ وعدد القمصان $N_2 = 4$ وحيث $N = N_1 = N_2 = 4$ و $k = 2$ فإن عدد الطرق الممكنة هي $N^k = 4^2 = 16$.

(١-١٠-٢) الترتيبات والتباديل Ordering and Permutations

في كثير من الأحيان يكون الاهتمام بفراغ العينة الذى عناصره كل الترتيبات المكنة لمجموعة من الأشياء . الترتيبات المختلفة تسمي تباديل .

تعريف : بفرض أن S فئة تحتوى على n من العناصر المميزة وإذا كان k عدد صحيح موجب لا يزيد عن n . الترتيبية من الرتبة $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ، تسمى تبديله لعدد k من العناصر المأخوذة من n من العناصر الموجودة في S . العدد الكلى لتلك التباديل يرمز لـه بالرمز P_k^n. عندما $n = k$ فإن التبديل سوف يكون ترتيب لعناصر الفئة S والتي عددها n .

مثال (١-٦٦) إذا كانت $S = \{1, 2, 4\}$ فإن $(1, 2)$, $(2, 1)$ يمثلان تبديلين مختلفين لعنصرين ($k = 2$) مأخوذين من S . العدد الكلي لتلك التباديل هو P_2^3 . أيضا $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 3)$ يمثلان تبديلين مختلفين لثلاث عناصر ($k = 3$) مأخوذة من الفئة $S = \{1,2,3\}$ والعدد الكلي لتلك التباديل هو P_3^3 .

نظرية (١-٧)

$$P_k^n = n\ (n-1)\ (n-2)\ldots(n-k+1)$$

البرهان : أن برهان هذه النظرية هو تطبيق مباشر لقاعدة العد . لدينا k من الأماكن يراد شغلها . المكان الأول يمكن شغله بأي عنصر من العناصر التي عددها n والموجودة في S . وعلى ذلك $N_1 = n$. بمجرد شغل المكان الأول ، يتبقى $N_2 = n - 1$ من العناصر في S. وعلى ذلك المكان الثانى يمكن شغله بأي عنصر من العناصر التى عددها $(n-1)$ والموجودة في S وهكذا .عندما نصل إلي المكان رقم k فإن $(k-1)$ من الأماكن تم شغلها ويتبقى $n-(k-1)$ من العناصر في S . المكان الأخير يمكن شغله بأي عنصر من العناصر التى عددها $(n-k+1)$ والموجودة في S وعلى ذلك $N_k = n - k + 1$. باستخدام قاعدة الضرب يمكن الوصول إلي النتيجة المطلوبة .

نتيجة (١-١)

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

البرهان : يمكن الحصول على الصيغة السابقة بضرب الصيغة:
$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ في $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$.

نتيجة (١-٢)

$$P_n^n = n!$$

البرهان : بوضع k = n في النتيجة (١-١) نحصل على المطلوب .

يعطى الجدول التالى قيم !n من 1 إلى 10 .

$$1! = 1$$
$$2! = 1 . 2 = 2$$
$$3! = 1 . 2 . 3 = 2! . 3 = 6$$
$$4! = 1 . 2 . 3 . 4 = 3 ! . 4 = 24$$
$$5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 4! . 5 = 120$$
$$6! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 5! . 6 = 720$$
$$7! = 1 . 2. 3. 4 . 5 . 6 . 7 = 6! . 7 = 5040$$
$$8! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 = 7! . 8 = 40,320$$
$$9! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 = 8! . 9 = 362,880$$
$$10! = 1. 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 = 9! . 10 = 3, 628, 800$$

مثال (١-٦٧) إذا رقمت 5 ورقات بالحروف A, B, C, D, E فإن العـــدد الكلـي مـن الجمل التي يمكن تكوينها من الحروف السابقة هو $P_5^5 = 5! = 120$. السؤال الآن عن العدد الكلي للجمل التي يكون الحرف B قبل الحرف A ؟ للإجابة على هـذا السـؤال لا بـد أن نتخيل أن B , A تم لصقهم معا وعلى ذلك فإن العدد الكلي للجمل التي يكون الحرف B قبـل الحرف A هو $P_4^4 = 4! = 24$.

مثال (١-٦٨) بفرض عدم السماح بالتكرار أحسب:

(ب) كم عددا مكونا من ثلاثة أرقام يمكن تركيبهم من الأرقام التالية,7 ,6 ,5 ,3 ,2 9 ؟

(ب) كم عددا منهم أقل من 400 ؟

(ج) كم عددا منهم فرديا ؟

الحل :

(أ) نفرض أن العدد المكون من ثلاثة أرقام يمثل بثلاثة أماكن كالتالي :

يمكن شغل المكان الأول (على اليسار) بستة طرق مختلفة وبمجـرد شـغل المكـان الأول فإن المكان الثاني يمكن شغله بخمس طرق مختلفة . وبمجرد شـغل المكـان الأوسط يمكن شغل المكان الأخير بطرق عددها 4 أي أن المكانين الأوسـط والأخـير

يمكن شغلهم بطرق عددها $P_2^5 = 20$. وعلى ذلك يمكن كتابة عـــدد طـرق اختيـار الرقم في المكان الذي يمثل هذا الرقم كما يلي :



ومن قاعدة العد يكون هناك $P_3^6 = 6.5.4 = 120$ عددا مكون من ثلاثة حروف مـن الأرقام الستة بدون تكرار أي يوجد 120 تبديلة من ستة أشياء مأخوذة ثلاثة ثلاثة .

(ب) سوف نضع قيود على الرقم الذى يوضع في المكان الأول . يمكن شغل المكـان الأول بطريقتين فقط بالرقم 2 أو الرقم 3 حيث أن العدد يجب أن يكون أقل من 400 ويمكن شغل المكان الأوسط بطرق عددها 5 . وأخيرا يمكن شغل المكـان الأخـير بطـرق عددها 4 ، أي يوجد $P_2^5 = 20$ طريقة لشغل المكان الأوسط والمكان الأخير .



وبذلك يوجد 40 = 2.5.4 عددا مختلفا أقل من 400 يمكن تكوينه من الأرقام السـتة المعطاة .

(ج) يمكن شغل المكان الأخير (على اليمين) بأربعة طرق مختلفة بالرقم 3 أو 5 أو 7 أو 9 حيث ان الأعداد يجب أن تكون فردية. أيضا يمكن شغل المكان الأيسر بطرق عددهـا 5 وأخيرا يمكن شغل المكان الأوسط بطرق عددها 4 .



وبذلك يوجد 80 = 5.4.4 عددا مختلفا فرديا يمكن تكوينه من الأرقام الستة المعطاة .

مثال (١-٦٩) يوجد 8 محاضرين لتصحيح أربعة أسئلة في مادة ما . يرغب أستاذ المادة في اختيار أربعة محاضرين لتصحيح الأسئلة تحت شرط محاضر واحد لكل سؤال ما هي عـدد الطرق المختلفة لاختيار المحاضرين ؟

الحل : $n = 8$ و $k = 4$ وعلى ذلك عدد الطرق المختلفة لاختيار المحاضرين هي :

$$P_4^8 = 8.7.6.5 = 1680.$$

مثال (١-٧٠) ما هي عدد الطرق لجلوس 7 أشخاص في مجلس بحيث يجلسون :

(أ) في صف به 7 مقاعد ؟

(ب) في صف به 8 مقاعد ويبقى مقعد خالي ؟

(ج) حول مائدة مستديرة ؟

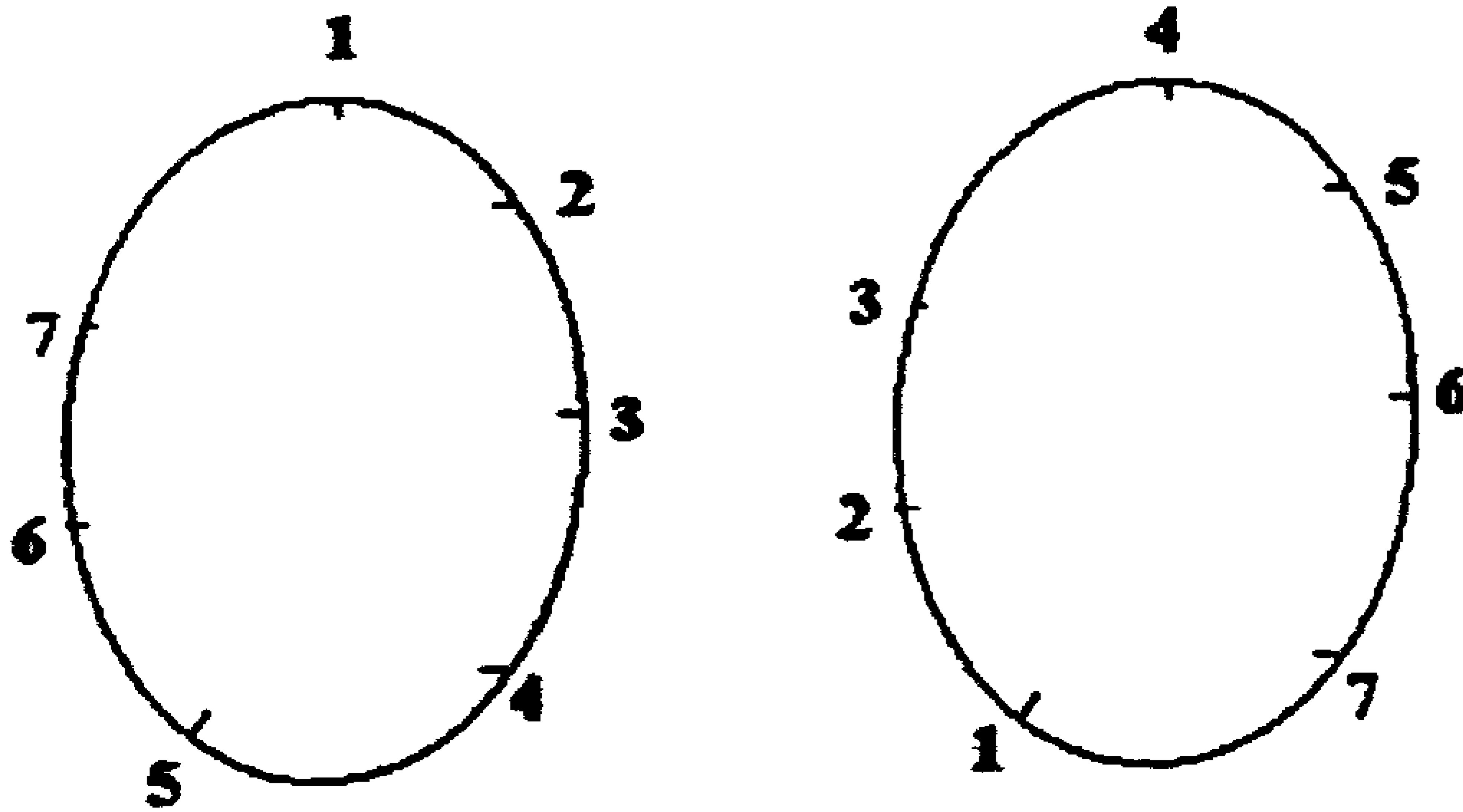
الحل :

(أ) يمكن للأشخاص السبعة أن يجلسوا في صف بطرق عددها $P_7^7 = 7! = 5040$.

(ب) $N_1 = 8$, $N_2 = P_7^7 = 5040$. وعلى ذلك عدد الطرق لجلوس 7 أشخاص في صف به 8 مقاعد منهم مقعد خالي هو :

$$N_1 . N_2 = 8 (5040) = 40320.$$

(ج) يمكن لشخص واحد أن يجلس في أي مكان حول المائدة المستديرة ويمكن للأشخاص الستة الآخرين أن يرتبون أنفسهم حول المائدة بعدة طرق عددها $P_6^6 = 720$. شكل (١-١٨) يوضح ترتيبيان مختلفان . في كلا الترتيبين كل شخص يجلس بجواره من الناحيتين نفس الأشخاص . سوف نعتبر الشخص رقم 1 هو الشخص الذي يجلس في أي مكان حول المائدة المستديرة .



شكل (١-١٨)

(١ - ١٠-٣) الترتيبات بعناصر متماثلة والتوافيق والتجزئة :

Ordering with Similar Elements, Combinations and Partitions

يراد أحيانا معرفة عدد تباديل مجموعة من الأشياء يكون بعضها متماثلا . لتوضيح ذلك بفرض أننا نرغب في ترتيب خمسة كتب A, B, C, D, E على رف وكل كتاب له غلاف مختلف . عدد الطرق المختلفة لترتيب تلك الكتب هو $5! = 120 = 1 .2 .3 .4 .5$.الآن بفرض أن الكتب A, B, C لها نفس الغلاف بينما الكتابين E, D لهما أغلفة تختلف عن الكتب A, B, C كما يختلف غلاف D عن E . بفرض أن تبديله من تلك الكتب في هذه الحالة هي A B D C E . بفرض E , D ثابتين في مكانهما . سوف يوجد !3 ترتيبات للكتب A, B, C . وحيث أن A, B, C لهم نفس الغلاف وبفرض أن J رمز عام للكتب الثلاثة فإن الترتيبات الستة سوف تكون J J D J E وعلى ذلك بدلا من $5! = 120$ ترتيبات مختلفة سوف يكون لدينا في الحقيقة $20 = \frac{120}{6} = 5!/3!$ ترتيبه مختلفة .

الآن بفرض أن E , D لهما نفس الغلاف ولكن يختلفان عن أغلفة الكتب A, B, C . كما أن أغلفة A, B, C واحدة . بإتباع نفس الأسلوب فإن عدد الطرق المختلفة لترتيب الكتب على الرف هو $(5!/3!)$ مقسوما على $2!$ أو $5!/3!\ 2!$. الصيغة العامة لعدد تباديل مجموعة من العناصر يكون بعضها متماثلا ينتج من النظرية التالية :

نظرية (١-٨) عدد تباديل n عنصر والتي يكون من بينها n_1 عنصرا متماثلا و n_2 عنصرا متماثلا و ... و n_k عنصرا متماثلا هو :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

مثال (١-٧١) إذا كان لدينا 10 وحدات من قطع الغيار حيث $n_1 = 8$ منهم تالفين و $n_2 = 10 - n_1 = 2$ غير تالفين . عدد الطرق المختلفة لترتيب هذه القطع هو:

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!} = \frac{10!}{8!\ 2!} = 45.$$

عادة يكون اهتمامنا بعدد الطرق لتجزئة فئة من الأشياء التي عددها n إلى فئات جزئية عددها r تسمى الخلايا cells . تتحقق التجزئة إذا كان التقاطع لأي زوج من الفئات الجزئية التي عددها r هو الفئة الخالية (فئة العدم ϕ) والاتحاد بين الفئات الجزئية يعطي الفئة الأصلية والترتيب للعناصر داخل الخلية ليس له أهمية . لتكن الفئة $\{a, b, c, d\}$ التجزيئات الممكنة لهذه الفئة إلى خليتين بحيث تحتوى الخلية الأولى على ثلاثة عناصر والخلية الثانية تحتوى على عنصر واحد هي :

$\{(a, b, c), d\}, \{(a, b, d), c\}, \{(b, c, d), a\}, \{(a, c, d), b\}.$

أي أن هناك 4 طرق لتجزئة الفئة المكونة من 4 عناصر إلي خليتين تحتوى على 3 عناصر في الخلية الأولي وعنصر واحد في الخلية الثانية . عدد التقسيمات للمثال السابق يمكن كتابتها على الشكل :

$$\frac{4\,!}{3!\;1!} = 4.$$

نظرية (١-٩) عدد الطرق لتجزئة فئة من n من الأشياء إلي r من الخلايا لعناصر عددها n_1 في الخلية الأولي و n_2 من العناصر في الخلية الثانية و ... و n_r من العناصر في الخلية رقم r يكون :

$$\frac{n!}{n_1!\;n_2!\;..n_r!}.$$

حيث $n_1 + n_2 + \ldots n_r = n$.

مثال (١-٧٢) بكم طريقة يمكن توزيع 10 لعب على 3 تلاميذ بحيث يتلقى التلميذ المتفوق 4 لعب وكل تلميذ آخر 3 لعب .

الحل : في هذا المثال يراد معرفة عدد التجزيئات لعدد 10 كتب على ثلاث خلايا تحتوى على 4, 3, 3 من اللعب على التوالي . من النظرية السابقة عدد التجزيئات هو :

$$\frac{10!}{4!\;3!\;3!} = 4200.$$

في كثير من المشاكل يكون اهتمامنا بعدد الطرق لاختيار أشياء عددها r من بين أشياء مميزة عددها n ودون اعتبار لطريقة الترتيب . هذه الاختيارات تسمى التوافيق Combinations . في الحقيقة التوفيقة هو التجزئة بخليتين ، خلية تحتوى على r من الأشياء والخلية الأخرى تحتوى على $(n-r)$ من الأشياء الباقية وعدد التوافيق يرمز له بالرمز $\binom{n}{r}$.

نظرية (١-١٠) عدد التوافيق لأشياء مميزة عددها n مأخوذة r كل مرة هو :

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}=\binom{n}{n-r}.$$

الصيغة السابقة تسمى معامل ذي الحدين **coefficient binomial** وقد أطلق عليه هذا الاسم لأن $\binom{n}{r}$ هو معامل $a^r\ b^{n-r}$ في مفكوك ذي الحدين حيث :

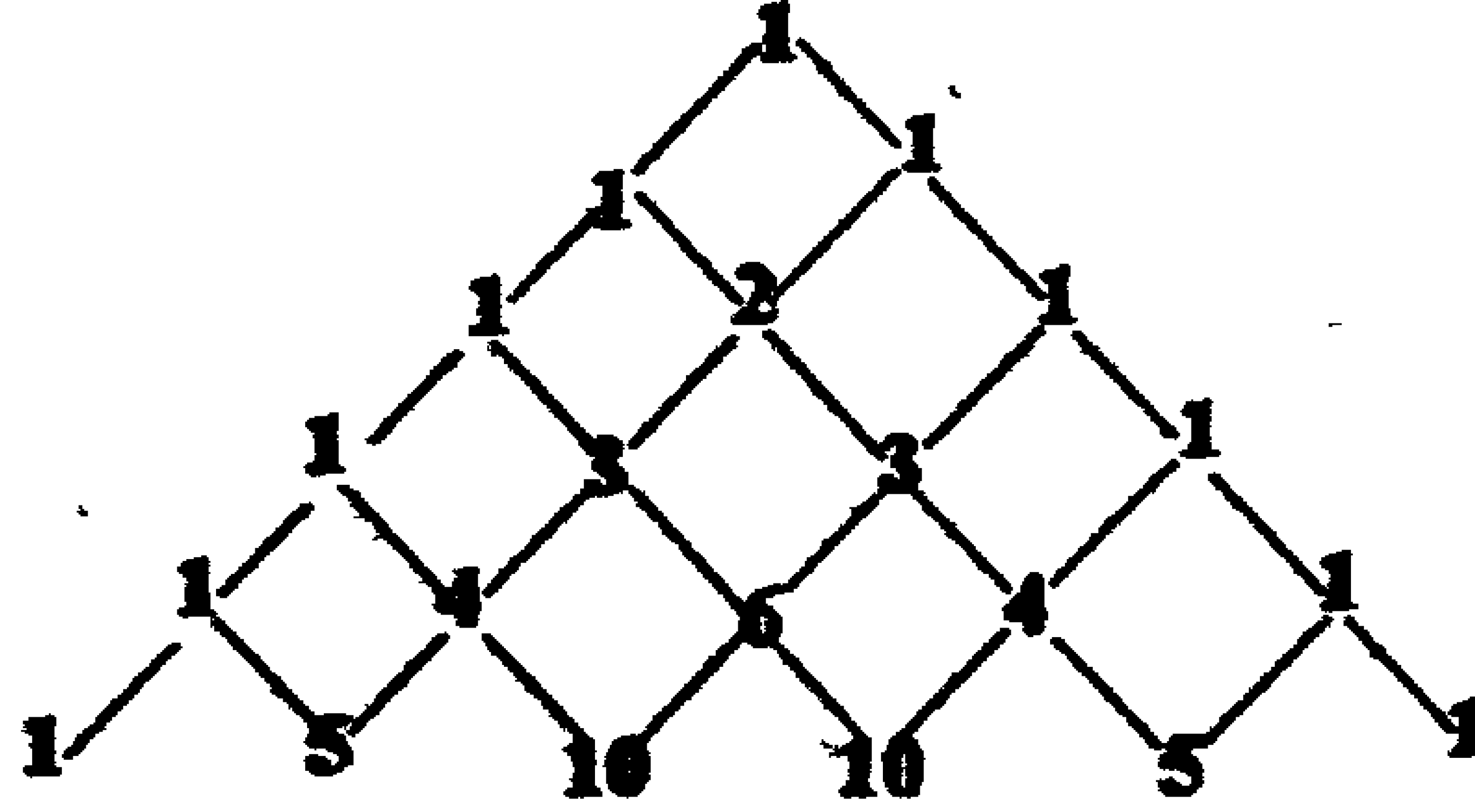
$$(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j\ b^{n-j}.$$

القيمة $\binom{n}{r}$ حيث $n = 1,2,\ldots,10$ ولقيم مختلفة من r موضحة في الجدول التالي :

	k										
n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

يمكن ترتيب معاملات ذي الحدين لتكوين مثلث كما هو موضح في شكل (١-١٩) والذي يسمى مثلث باسكال Pascal's triangle والذي يتميز بأن العدد الأول والعدد الأخير من كل صف هو 1 . أيضا أي عدد أخر في المثلث يمكن الحصول عليه بجمع العددين الموضوعين فوقه مباشرة . فمثلا

$$6=3+3\quad,\quad 3=1+2\quad,\ 2=1+1.$$



شكل (١-١٩)

مثال (١-٧٣) أجاب طالب على 20 سؤال من نوع صح وخطأ عشوائياً . (أي الحل بالتخمين) . بفرض أن A الحادثة " الإجابة على 16 سؤال بطريقة صحيحة " أي الإجابة على 80% من الأسئلة. سوف يكون لدينا $\binom{20}{16}$ طريقة لاختيار بالضبط 16 سؤال والإجابة عليهم بطريقة صحيحة وعلى ذلك :

$$P(80\%) = \binom{20}{16} \Big/ 2^{20} = .0046 .$$

حيث 2^{20} تمثل عدد نقاط العينة في فضاء العينة S .

مثال (١-٧٤) يمكن استخدام مفهوم التباديل في تقدير عدد الفئات الجزئية التي يمكن تكوينها من k من العناصر . هناك $\binom{k}{i}$ طريقة لاختيار i من العناصر من k من العناصر . وعلى ذلك يوجد $\binom{k}{i}$ فئات جزئية من i من العناصر حيث $i = 0,1,2,..,k$ الحالة $i = 0$ تقابل فئة العدم وتمثل بالصيغة $\binom{k}{0} = 1$ لان $0! = 1$. وعلى ذلك العدد الكلى للفئات الجزئية (بما فيها فئة العدم) هي :

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}=(1+1)^k=2^k.$$

مثال (١ – ٧٥) كم عدد الطرق لاختيار 8 أشخاص لفريق كرة السلة من بين 11 ولداً

الحـل : عدد الطرق تكون :

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{11!}{8!\,3!}=165.$$

بفرض أننا نرغب في اختيار فئة عدد عناصرها r من الوحـدات مـأخوذة مـن مجتمع يحتوى على n من الوحدات ومقسم إلي k من الأنواع المتنافية حيث n_i مـن الوحدات تنتمي إلي النوع i و $i=1,2,..,k$ ويفرض أن الفئة المختارة لا بد أن تحقـق الشـرط أن r_i مـن الوحـدات تظـهر مـن النـوع i و $i=1,2,...,k$ و $\sum_{i=1}^{k} r_i = r$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. عدد الطرق المختلفة لاختيـار الفئـة التـي تحتوى على r من الوحدات والمأخوذة من المجتمع السابق وصفه هي :

$$\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\cdots\binom{n_k}{r_k}$$

مثال (١–٧٦) يختار كل عام في إحدى الكليات وفد مكون من 7 طلاب لتمثيل الكليـة في الاجتماع السنوي العام في الاتحاد الوطني للطلاب من بيـن 4 طـلاب مـن قسـم الكيمياء و 6 طلاب من قسم الحيوان و 6 طلاب من قسم النبات و 14 طالب من قسـم الرياضيات وذلك بحيث يكون في الوفد طالب من قسم الكيمياء وطالب من قسم الحيـوان و 2 من قسم النبات و 3 من قسم الرياضيات . ما هو عدد الطرق لاختيار الوفد ؟

الحل : عدد الطرق المختلفة لاختيار الوفد هو :

$$\binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{14}{3}=131040.$$

(١–١٠–٤) المعاينة العشوائية البسيطة

Sampling Random Sample

تعتبر أبحاث المعاينة من أكثر المجالات التي يستخدم فيها النموذج المنتظم . بفرض أن مجتمع يتكون من N من المفردات $u_1, u_2, \ldots, u_N$. المجتمع قد يتكون من أشخاص أو صمامات كهربائية أو حيوانات أو نباتات . عند اختيار عينة عشوائية من الحجم n من مجتمع من الحجم N فإننا نجري تجربة عشوائية نتائجها عينات من الحجم n وكل عينة (نتيجة) تختار باحتمال معين . أي أن العينة يمكن اعتبارها صف من الوحدات الموضوعة في ترتيب معين . على سبيل المثال عينة خاصة من الحجم $n = 5$ مختارة من مجتمع من الحجم N قد تكون $\{u_5, u_7, u_3, u_4, u_1\}$ وهذه العينة سوف تختلف عن العينة $\{u_3, u_7, u_4, u_1, u_5\}$ وذلك بالرغم من أي العينتين يحتويان على نفس الوحدات فإن ترتيب الوحدات في العينة الأولي يختلف عن ترتيب الوحدات في العينة الثانية .

مثال (١-٧٧) مجتمع مكون من ثلاثة وحدات u_1, u_2, u_3 ، العينات المرتبة من الحجم $n = 2$ عددهم $3^2 = 9$ وهم :

$$a_1 = (u_1, u_1), \quad a_4 = (u_2, u_1), \quad a_7 = (u_3, u_1)$$
$$a_2 = (u_1, u_2), \quad a_5 = (u_2, u_2), \quad a_8 = (u_3, u_2)$$
$$a_3 = (u_1, u_3), \quad a_6 = (u_2, u_3), \quad a_9 = (u_3, u_3).$$

هناك نوع من المعاينة العشوائية يسمى المعاينة العشوائية البسيطة بإرجاع simple random sampling with replacement وهذا يكافئ تجربة عشوائية بفضاء عينة S يتكون من كل العينات المرتبة وكل عينة لها نفس الاحتمال في الاختيار.
نوع آخر من المعاينة العشوائية يسمى المعاينة العشوائية البسيطة بدون الإرجاع simple random sampling without replacement وهذا يكافئ تجربة عشوائية توصف بنموذج احتمال يعطي احتمال صفر لكل العينات المرتبة والتي تحتوي على أي عنصر يظهر أكثر من مرة ويعطي احتمال متساوي لكل العينات الأخرى المرتبة .

مثال (١-٧٨) للمجتمع المكون من ثلاثة وحدات في مثال (١- ٧٧) فإن نموذج الاحتمال لعينة عشوائية بسيطة مع الإرجاع هو :

حادثة بسيطة	$\{a_1\}$	$\{a_2\}$	$\{a_3\}$	$\{a_4\}$	$\{a_5\}$	$\{a_6\}$	$\{a_7\}$	$\{a_8\}$	$\{a_9\}$
الاحتمال	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

ونموذج الاحتمال للمعاينة العشوائية البسيطة بدون إرجاع لمثال (١-٧٧) هو :

حادثة بسيطة	$\{a_1\}$	$\{a_2\}$	$\{a_3\}$	$\{a_4\}$	$\{a_5\}$	$\{a_6\}$	$\{a_7\}$	$\{a_8\}$	$\{a_9\}$
الاحتمال	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

وعلى ذلك المعاينة العشوائية البسيطة مع الإرجاع تمثل النموذج المنتظم لفضاء العينة S والذي نتائجه كل العينات المرتبة التي عددها N^n . أما المعاينة العشوائية البسيطة بدون إرجاع فتمثل نموذج منتظم لكل العينات المرتبة والتي عناصرها لا تتكرر أكثر من مرة كما أن العدد الكلي للعينات المرتبة من الحجم n حيث كل عنصر في العينة لا يظهر أكثر من مرة هو $\frac{N!}{(N-n)!}$.

مثال (١-٧٩) يحتوي وعاء على n من الكرات وكل كرة مرقمة برقم صحيح مختلف ، $1, 2, 3, \ldots, n$. سحبت ثلاث كرات من الوعاء عشوائياً بدون إرجاع (واحدة تلو الأخرى). ما هو الاحتمال أن تكون أرقام الكرات متتالية ؟

الحل : نقاط العينة S سوف تكون على الشكل (i , j , k) حيث $i,j,k = 1,2,\ldots,n$ ، حيث i أو j أو k أعداد صحيحة مختلفة في المدى من 1 إلى n. عدد نقاط العينة في S هو $P^n_3 = \frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$. بفرض A الحادثة " أن تكون أرقام الكرات متتالية " . نقاط العينة في A سوف يكونوا :

(1, 2, 3) , (2, 3, 4) , ... , (n-2 , n-1 , n) أو أي تبديل من هذه النقاط وعلى ذلك عدد نقاط العينة في A هو $3!(n-2) = 6(n-2)$. احتمال الحادثة A هو :

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{6(n-2)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{6}{n(n-1)}.$$

مثال (١-٨٠) للمثال (١-٧٩) باعتبار أن الكرات الثلاثة تؤخذ مرة واحدة وعلى ذلك كل العينات الممكن اختيارها من الحجم 3 سوف يكون عددها :

$$\binom{n}{3}=\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

نقاط العينة في A سوف تكون :

$$\{1,2,3\},\{2,3,4\},\ldots,\{n-2\ ,n-1\ ,n\}$$

وعددها (n-2) وعلى ذلك:

$$P(A)=\frac{(n-2)}{[n(n-1)(n-2)/6]}=\frac{6}{n(n-1)}.$$

أي أن P(A) واحدة سواء سحبت الكرات مرة واحدة أو واحدة تلو الأخرى .

مثال (١-٨١) بفرض أن تواريخ الولادة لعدد n من الأفراد في حجرة ما يكونوا عينة عشوائية بسيطة من الحجم n مختارة (مع الإرجاع) من N = 365 يوما في السنة (باستبعاد يوم 29 فبراير) . أوجد احتمال عدم وجود اثنين لهما نفس تاريخ الولادة وما احتمال وجود اثنين على الأقل بنفس تاريخ الولادة وذلك عندما n = 2 , n = 5 , n = 23

الحل : بفرض أن A الحادثة " عدم وجود اثنين لهما نفس تاريخ الولادة " و B الحادثة " يوجد اثنين على الأقل بنفس تاريخ الولادة . إذا كانت m (A) ترمز لعدد العينات المرتبة من الحجم n (مع الإرجاع) والمختارة من N = 365 يوماً في السنة بحيث لا يوجد يوم في العينة المختارة مكرر أكثر من مرة هو :

$$m(A)=(365)(364)\ldots(365-n+1).$$

وذلك تبعا لنظرية (١-٧) . وإذا كانت M ترمز للعدد الكلي من العينات المرتبة من الحجم n والمختارة من N = 365 يوماً في السنة فإن $M=(356)^n$ وذلك تبعاً لقاعدة الضرب. عندما n = 2 فإن:

$$P(A)=\frac{m(A)}{M}=\frac{(365)(364)}{(365)^2}=\frac{364}{365}=.997,$$

$$P(B)=1-P(A)$$

$$=1-\frac{364}{365}=\frac{1}{365}.$$

عندما n = 5 فإن :

$$P(A)=\frac{m(A)}{M}=\frac{(365)(364)(363)(362)(361)}{(365)^5}=0.973,$$

$$P(B)=1-P(A)$$

$$=1-0.973=.027\,.$$

عندما $n = 23$ فإن :

$$P(A)=\frac{m(A)}{M}=\frac{(365)(364)...(344)(343)}{(365)^{23}}=0.493,$$

$$P(B)=1-P(A)$$

$$=1-0.493=0.507.$$

مثال (١-٨٢) وعاء يحتوي على 10 كرات سوداء و 20 كرة بيضاء ، اختيرت 5 كرات مرة واحدة بدون إرجاع . ما هو احتمال الحصول على كرتين لونهما اسود ؟

الحل : ترتيب العناصر داخل العينة غير ضروري في هذه الحالة وعلى ذلك إذا كان A الحادثة " كرتين لونهما أسود" فإن :

$$P(A)=\frac{\binom{10}{2}\binom{20}{3}}{\binom{30}{5}}=.360.$$

حيث يوجد $\binom{30}{5}$ نتيجة ممكنة في فضاء العينة S (عينات). أيضا يوجد $\binom{10}{2}$ طريقة لاختيار كرتين لونهما أسود من 10 كرات سوداء ولكل طريقة من هذه الطرق يوجد $\binom{20}{3}$ طريقة لاختيار ثلاث كرات بيضاء من 20 كرة بيضاء . باستخدام قاعدة الضرب يوجد $\binom{20}{3}\binom{10}{2}$ نقطة عينة في A . ويجب أن نتذكر أن P(A) واحدة سواء اختيرت الكرات الخمسة واحدة تلو الأخرى أو اختيرت الكرات معا ، فمثلا عند اهتمامنا بسحب الكرات الواحدة تلو الأخرى فإن :

$$P(A)=\frac{\binom{10}{2}\binom{20}{3}.5!}{\binom{30}{5}.5!}$$

والتي تعطي نفس النتيجة كما في حالة سحب الكرات الخمسة معا (0.36) .

مثال (١-٨٣) في وعاء 60 كرة مرقمة من 1 إلي 60 وإذا كانت الكرات من 1 إلي 35 لونهم أبيض والكرات من 36 إلي 60 لونهم أحمر . فإذا كان المطلوب اختيار عينة عشوائية من الحجم $n = 3$ بدون إرجاع . ما هو الاحتمال أن الثلاث كرات المختارة

(أ) لونهم أبيض (ب) لونهم أحمر

الحل :

(أ) بفرض أن A الحادثة "الثلاث كرات المختارة لونهم أبيض". عدد العينات من الحجم n المختارة بدون إرجاع من الكرات التي عددها $N = 60$ في A (إذا اختيرت الكرات واحدة تلو الأخرى) هي $m(A) = (35)\ (34)\ (33)$. العدد الكلي من الكرات من الحجم n والمختارة (بدون إرجاع) من الكرات التي عددها $N = 60$ هي :

$M = (60)\ (59)\ (58)$ وعلى ذلك :

$$P(A)=\frac{m(A)}{M}=\frac{(35)(34)(33)}{(60)(59)(58)}=0.191.$$

(ب) بفرض أن B الحادثة " الكرات الثلاثة المختارة لونهم أحمر " فإن :

$$P(A)=\frac{m(B)}{M}=\frac{(25)(24)(23)}{(60)(59)(58)}=.067.$$

ويجب أن نتذكر أن $P(A)$, $P(B)$ في هذا المثال هي نفسها إذا اختيرت الكرات مرة واحدة لأن :

(أ)

$$P(A)=\frac{\frac{(35)(34)(33)}{3!}}{\frac{(60)(59)(58)}{3!}}=\frac{\binom{35}{3}\binom{25}{0}}{\binom{60}{3}}=0.191.$$

أيضا :

(ب)

$$P(B)=\frac{\frac{(25)(24)(23)}{3!}}{\frac{(60)(59)(58)}{3!}}$$

$$=\frac{\binom{35}{0}\binom{25}{3}}{\binom{60}{3}}=0.067.$$

(١-١١) الاحتمال الشرطي (المشروط) Conditional Probability

في كثير من الأحيان ، فإن الاحتمال الذى يعين لحادثة ما A يتأثر بالمعلومات عن وقوع أو عدم وقوع حادثة أخري B. وفي هذه الحالة سوف تستخدم الاصطلاح " الاحتمال الشرطي للحادثة A بشرط وقوع الحادثة B ".

تعريف : الاحتمال للحادثة A ، بشرط وقوع الحادثة B ، يعرف كما يلي :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad (١-٦)$$

وكان $P(B)\neq 0$

إذا كان فضاء العينة يمثل فضاء منتظم فإن:

$$P(A\cap B)=\frac{m(A\cap B)}{m(S)},\ P(B)=\frac{m(B)}{m(S)}$$

وعلى ذلك :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{m(A\cap B)}{m(B)}.$$

يحقق الاحتمال الشرطي في (١-٦) والمنسوب إلي الفضاء الجديد (الفضاء المختزل) B مسلمات دالة الفئة الاحتمالية والمعرفة على الفضاء S . على سبيل المثال إذا كان A_1 , A_2 حادثتان متنافيتان فإن :

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)}$$
$$= \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)}$$
$$= P(A_1 | B) + P(A_2 | B).$$

ويمكن تعميم النتيجة لأكثر من حادثتين . بنفس الشكل :

$$P(A | B) \geq 0, P(S | B) = P(B | B) = 1 ,$$

وعلى ذلك فإن مسلمات دالة الفئة الاحتمالية قد تحققت . أيضا الخصائص التي تم اشـتقاقها لدالة الفئة الاحتمالية في البند (١- ٥) تتحقق لدالة الفئة الاحتمالية الشرطية وخصوصا :

$$P(A | B) = 1 - P(A^c | B),$$
$$0 \leq P(A | B) \leq 1,$$
$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 \cap A_2 | B).$$

مثال (١-٨٤) من تقرير عن أعضاء هيئة التدريس في جامعة ما تم تعريف الحادثتين

A " دكتوراه هندسة أو علوم امرأة "

B " دكتوراه هندسة أو علوم معين قبل 1975 "

فإذا كان $P(A) = 0.099 , P(B) = 0.009 , P(A \cap B) = .003$

أوجد : $P(A | B)$, $P(B | A)$.

الحل :

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.003}{0.009} = \frac{1}{3},$$
$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.003}{0.099} = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}.$$

مثال (١-٨٥) ألقي زوج من زهرتي النرد مرة واحدة فإذا علم أن المجمـوع 6 علـى النردين المطلوب حساب الاحتمال الشرطي أن عدد النقاط على واحد من النردين يساوي 2

الحل : بفرض أن A الحادثة " عدد النقاط على واحد من النردين يساوى 2 " حيث:

$$A = \begin{Bmatrix} (1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2) \\ (2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \end{Bmatrix}$$

وعلى ذلك الاحتمال الغير شرطي ، $P(A)$ ، للحادثة A هو 11/36 . إذا كان B الفضاء المختزل والذي يرمز للحادثة "المجموع يساوي 6 " فإن :

$$B=\{(1,5)\ ,\ (2,4)\ ,\ (3,3)\ ,\ (4,2)\ ,\ (5,1)\ \}$$

وعلى ذلك :

$$P(B)=\frac{5}{36}\ .$$

وبما أن :

$$A\cap B=\{(2,4),(4,2)\}$$

فإن :

$$P(A\cap B)=\frac{2}{36}\ .$$

وعلى ذلك :

$$P(A|\ B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{m(A\cap B)}{m(B)}=\frac{2}{5}.$$

مثال (١-٨٦) في بحث ميداني وجد أن 60% من المشترين للحاسب الآلي الشخصي يشتمل مشترياتهم على برنامج لكتابة نصوص و 40% يشتمل مشترياتهم على برنامج صفحات إلكترونية و 30% يشتمل مشترياتهم على النوعين. اختير مشتري عشوائياً وبفرض A الحادثة " يشترى برنامج لكتابة النصوص " و B الحادثة " يشترى برنامج صفحات إلكترونية "

أوجد : $P(A|\ B)$, $P(B|\ A)$.

الحل :

$$P(A|\ B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{.30}{.40}=.75.$$

وهذا يعني أن 75% من كل المشترين لبرنامج صفحات إلكترونية يشترون برنامج كتابة النصوص .

(ب)

$$P(B|\ A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.30}{0.60}=0.5.$$

وهذا يعنى أن 50% من كل المشترين لبرنامج كتابة النصوص يشترون برنامج صفحات إلكترونية . يلاحظ أن :

$$P(A|B) \neq P(A),$$
$$P(B|A) \neq P(B).$$

مثال (١-٨٧) في استطلاع للرأي عن تأثير الإعلانات على البيع في مركز لتسويق الأغذية أخذت عينة من 100 فرد من المترددين على المركز وسجلت إجابتهم . الجدول المزدوج التالي يوضح توزيع الأفراد حسب الشراء (يشترى ولا يشترى) وحسب مشاهدة الإعلانات (يشاهد ولا يشاهد) :

	يشاهد	لا يشاهد	المجموع
يشترى	30	10	40
لا يشترى	30	30	60
المجموع	60	40	100

فإذا اختيرت استمارة عشوائيا لاختبار ما إذا كان الشخص يشترى أو لا يشتري . ليكن A الحادثة " الشخص يشتري " فإن A^c الحادثة " الشخص لا يشتري " . ليكن B الحادثة " الشخص يشاهد الإعلانات " و B^c الحادثة " الشخص لا يشاهد الإعلانات " . احتمال الحادثة A هو :

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}.$$

بينما :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{m(A \cap B)}{m(B)} = \frac{30}{60} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

نلاحظ أن $P(A)$ يختلف عن $P(A|B)$ حيث $P(A|B) > P(B)$ وذلك يعني أن إمكانية وقوع الحادثة A قد زاد بناء على المعلومات أن الشخص يشاهد الإعلانات .

مثال (١-٨٨) اختيرت عشوائيا أسرة لها طفلين فإذا كانت الحادثة " الطفل ذكر " والحادثة " الطفل أنثى " لهما نفس الاحتمال ما هو الاحتمال الشرطي أن كلا الطفلين ذكر إذا علم أن (أ) الطفل الأكبر ذكر . (ب) على الأقل واحد من الطفلين ذكر .

الحل : (أ) فضاء العينة S في هذه الحالة هو $S = \{ bb , bg , gb , gg \}$ حيث b ترمز للذكر و g ترمز للأنثى . بفرض أن A الحادثة " الطفل الأكبر ذكر " و B الحادثة " الطفل الأصغر ذكر " وعلى ذلك الحادثة " كلا الطفلين ذكر" هو $A\cap B$ ومنها :

$$P(A\cap B|\ A)=\frac{P(A\cap B)\cap A)}{P(A)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2},$$

(ب) الحادثة " على الأقل واحد من الطفلين ذكر هو $A\cup B$ وعلى ذلك :

$$P(A\cap B|\ A\cup B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}.$$

مثال (١-٨٩) لمجلة جديدة ثلاث أعمدة بعنوان "فنون" (A) و "كتب " (B) و "سينما" (C) فإذا اختير قارئ عشوائيا وإذا كان A الحادثة " يقرأ عمود الفنون " و B الحادثة " يقرأ عمود الكتب " و C الحادثة " يقرأ عمود السينما " وإذا توفرت المعلومات التالية :

الحادثة	A	B	C	$A\cap B$	$A\cap C$	$B\cap C$	$A\cap B\cap C$
الاحتمال	.14	.23	.37	.08	.09	.13	.05

والموضحة في شكل (١-٢٠)

أوجد : $P(A|\ B\cup C)$, $P(A|\ B)$

(على الأقل يقرأ عمود $P(A|$ و $P(A\cup B|\ C$.

الحل :

$$P(A|\ B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{.08}{.23}=.348,$$

$$P(A|\ B\cup C)=\frac{P(A\cap\ (B\cup C)}{P(B\cup C)}$$

$$= \frac{.04 + .05 + .03}{.47}$$

$$= \frac{.12}{.47} = .255,$$

$P(A|$ (على الأقل يقرأ عمود $) = P(A|A \cup B \cup C)$

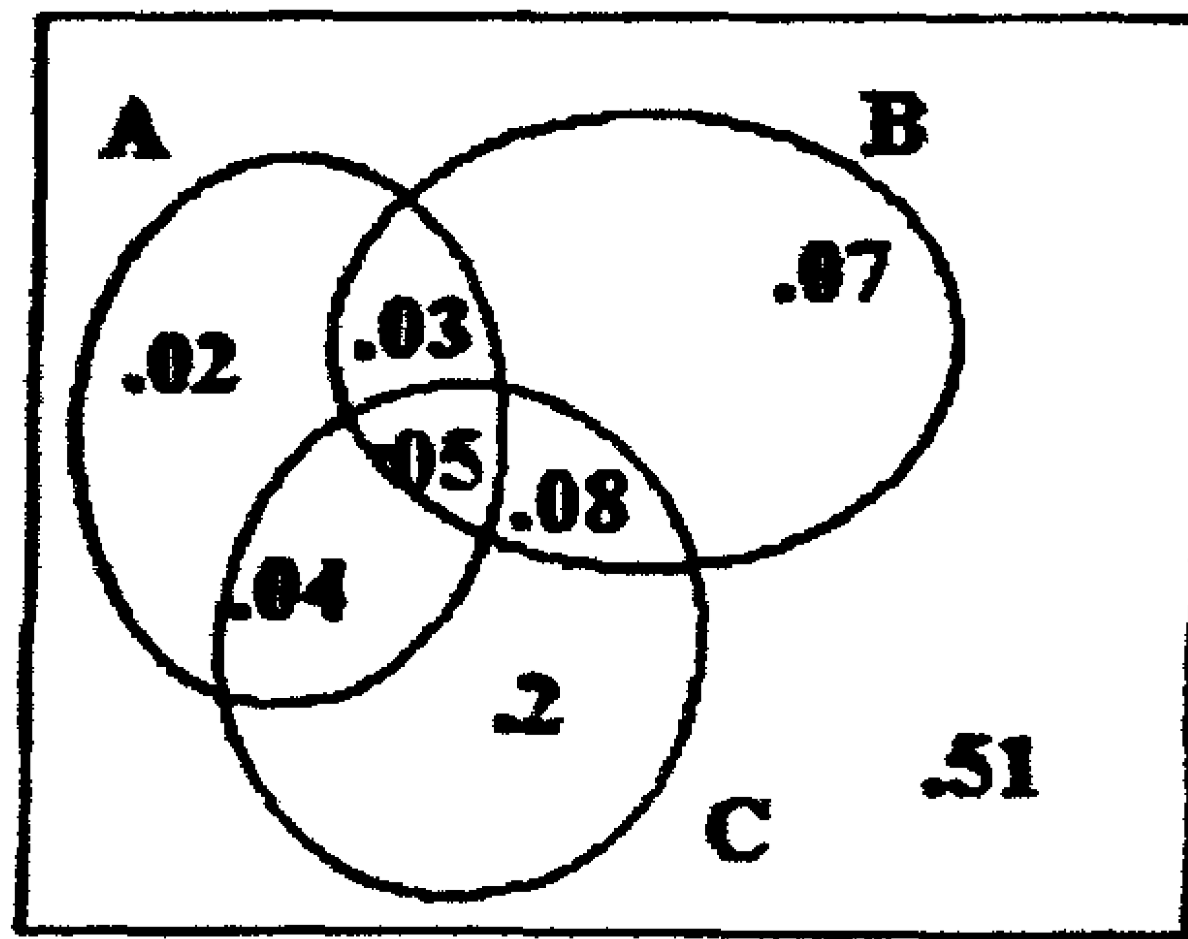
$$= \frac{P(A \cap (A \cup B \cup C)}{P(A \cup B \cup C)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B \cup C)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B \cup C)} = \frac{0.14}{0.49} = .286,$$

$$P(A \cup B|C) = \frac{P(A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{.04 + .05 + .08}{0.37} = \frac{.17}{.37}$$

$$= .459.$$

شكل (١-٢٠)



مثال (١- ٩٠) في برنامج للتعليم الصيفي تلقى الطلاب مقررين (كيميـــاء وتـــاريخ) فإذا كان 4% من هؤلاء الطلبة رسبوا في الكيمياء و 3% رسبوا فـــي التـــاريخ و 1% رسبوا في كلا المقررين . المطلوب حساب نسبة الطلاب الذيـــن نجحـــوا فـــي الكيميـــاء ورسبوا في التاريخ .

الحل : بفرض أن A الحادثة " ينجح في الكيمياء " و B الحادثة " ينجح في التـــاريخ " . $P(A) = 0.96$ و $P(B) = 0.97$ و $P(A^c \cap B^c) = .01$ ومن قـــانون دى مرجـــان فإن :

$$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B).$$
$$P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - .01$$
$$= .99,$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= .96 + .97 - .99 = .94$$

وعلى ذلك :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{.94}{.96} = \frac{94}{96}.$$

أيضا :

$$P(B^c|A) = \frac{P(B^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{.96 - .94}{.96}$$
$$= \frac{0.02}{0.96} = \frac{2}{96}.$$

ومنها:

$$P(A \cap B^c) = P(A).P(B^c|A) = \frac{96}{100}.\frac{2}{96} = .02.$$

من صيغة الاحتمال الشرطي في (١-٦) نحصل على نظرية الضرب التالية :

نظرية (١-١١) إذا وقعت حادثة ما A في تجربة ما ، يتبعها حادثة B فإن :

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A).$$

وعلى ذلك احتمال وقوع B , A في ترتيب هو احتمال أن تقع A أولا مضروبا في احتمال وقوع B ، شرط أن A وقعت . كما يمكن أن يكون :

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A|B). \qquad (١-٧)$$

وهذا يتوقف على أي الحادثتين قد تقع أولا . الصيغة (١- ٧) تفيد كثيرا في المشاكل التي تحتوى على المعاينة بدون إرجاع .

مثال (١-٩١) أثبتت الخبرة السابقة لنوع خاص من المولدات الكهربائية أن الاحتمال P(A) للعطل في العشرة سنوات الأولى من الاستخدام هو 0.25. فإذا علم أن مولد عطل ، فإن الاحتمال الشرطي P(B|A) أن العطل لا يمكن إصلاحه هو 04.

أوجد $P(A \cap B)$.

الحل :

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A)$$
$$= (.25)(.04) = .01\ .$$

نظرية (١-١٢) في أي تجربة إذا وقعت الحادثة A_1 ، يتبعها الحادثة A_2 ، يتبعها الحادثة A_3 و ... و يتبعها الحادثة A_k وكان $P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) \neq 0$ فإن :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1).P(A_2|\ A_1)$$
$$\cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k|\ \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i).$$

مثال (١-٩٢) وعاء يحتوى على 12 وحدة منهم 4 تالفين . سحبت ثلاث كرات من الوعاء عشوائيا بدون إرجاع . ما هو احتمال أن كل الوحدات المختارة سليمة ؟

الحل : بفرض أن A_i تمثل الحادثة " الوحدة رقم i سليمة " وعلى ذلك فإننا نحتاج إلى إيجاد $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ باستخدام نظرية الضرب . يجب أن نتذكر أن الأحداث A_1 ، A_2 ، A_3 ترتب حسب وقوعهم ، أي أن الوحدة 1 تختار قبل الوحدة 2. الآن $P(A_1) = \frac{8}{12}$ لأن 8 من 12 وحدة غير تالفين . إذا علم أن A_1 وقعت ، أي أن الوحدة الأولي سليمة يتبقى في الوعاء 7 وحدات سليمة من 11 وحدة في الوعاء وعلى ذلك $P(A_2|\ A_1) = \frac{7}{11}$ وبنفس الشكل ، وقوع $A_1 \cap A_2$ تعنى أن وحدتان سليمة تم اختيارهما فعلا من الوعاء ويتبقى في الوعاء 6 وحدات سليمة من 10 وحدات في الوعاء وعلى ذلك $P(A_3|A_2 \cap A_1) = \frac{6}{10}$

وأخيراً :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{14}{55}.$$

مثال (١-٩٣) يحتوي وعاء على 10 كرات لونهم أسود B و 20 كرة لونهم أبيض W . فإذا اختيرت من الوعاء 5 كرات بدون إرجاع أوجد احتمال الحصول على كرتين لونهما أسود .

الحل : أولا نحسب الاحتمال لترتيب خاص WWWBB على سبيل المثال :

$$P(WWWBB)=\left(\frac{20}{30}\right)\left(\frac{19}{29}\right)\left(\frac{18}{28}\right)\left(\frac{10}{27}\right)\left(\frac{9}{26}\right).$$

وبنفس الشكل الاحتمال لترتيب آخر WBBWW هو :

$$P(WBBWW)=\left(\frac{20}{30}\right)\left(\frac{10}{29}\right)\left(\frac{9}{28}\right)\left(\frac{19}{27}\right)\left(\frac{18}{26}\right).$$

وهكذا . يلاحظ أن الترتيبين السابقين لهما نفس الاحتمال . وعلى ذلك احتمال الحادثة A " كرتين بالضبط لونهما أسود " (أي أننا لا نهتم بالترتيب) هو :

$$P(A)=\binom{5}{2}\left(\frac{20}{30}\right)\left(\frac{19}{29}\right)\left(\frac{18}{28}\right)\left(\frac{10}{27}\right)\left(\frac{9}{26}\right)=.360.$$

وذلك لأنه يوجد $10=\binom{5}{2}$ من الترتيبات الخاصة المختلفة والتي تعطي كرتان لونهما أسود وثلاثة لونهم أبيض . وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في مثال (١- ٨٢) ولكن باستخدام أسلوب التباديل ، أما هنا فقد استخدمنا أسلوب الاحتمال الشرطي .

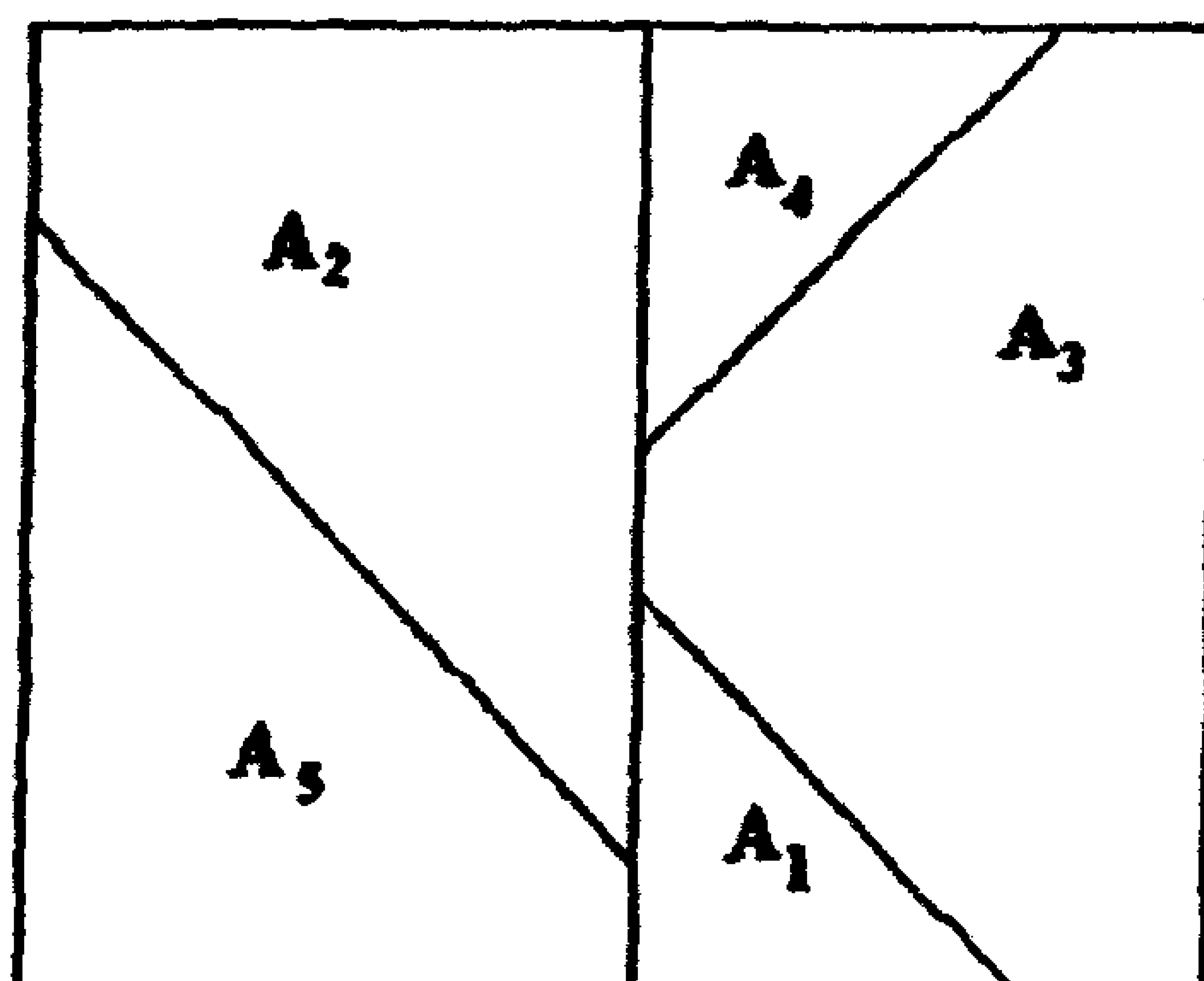
تعريف : التجزئة لفئة S والتي تحتوي على عدد محدود من الفئات الجزئية $A_1, \; A_2,\ldots,A_k$ تتحقق إذا توفر الشرطين التاليين :

(أ) $S=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k$

(ب) $A_i\cap A_j=\phi, i\neq j$

$,i,j=1,2,\ldots,k$.

تسمى الأحداث $A_1\,,\,A_2\,,\ldots,A_k$ في هذه الحالة أحداث مانعة وشاملة mutually exclusive and exhaustive وهي موضحة في شكل (١-٢١) عندما k = 5 .



شكل (١- ٢١)

مثال (١-٩٤) لتكن S فئة ، فإن أي فئة جزئية A و الفئة الجزئية A^c يعتبران تجزئة للفئة S حيث $A \cap A^c = \phi, S = A \cup A^c$

مثال (١-٩٥) إذا كانت الفئة S تمثل كل الطلبة في كلية العلوم ، فإذا اختير طالباً عشوائياً وإذا كان :

$A_1 =$ الطالب من قسم الكيمياء

$A_2 =$ الطالب من قسم الفيزياء

$A_3 =$ الطالب من قسم الرياضيات

$A_4 =$ الطالب من قسم علم الحيوان

$A_5 =$ الطالب من قسم علم النبات

فإن :

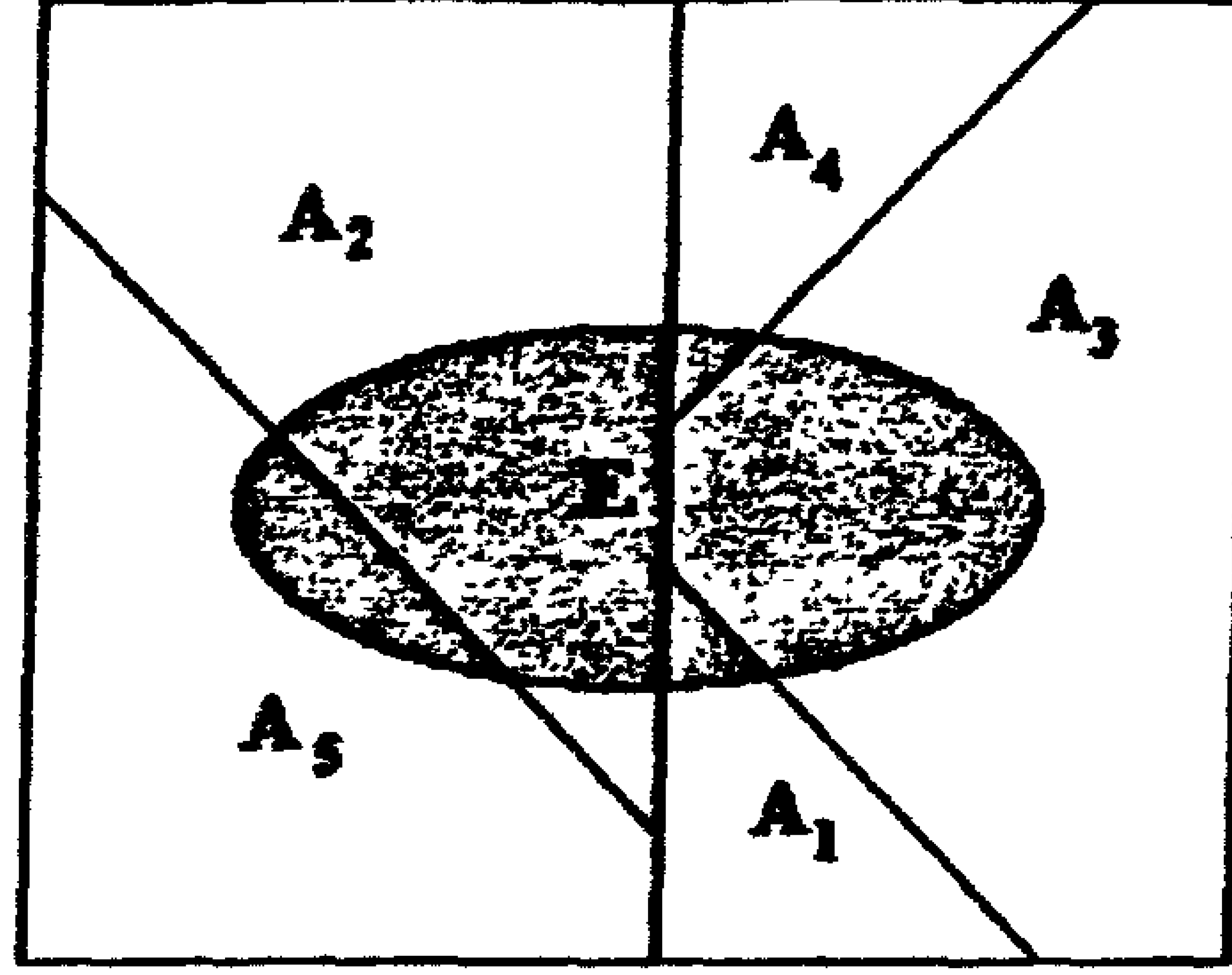
$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5,$$
$$A_i \cap A_j = \phi \quad , \quad i \neq j \; ,$$

حيث : $i \; , \; j = 1,2,3,4,5.$

الاحتمال الكلي وقاعدة بيز Total Probability and Bayes' Rule

بفرض أن $A_1 , A_2 ,..., A_k$ تمثل k حادثه مانعــة وشــاملة وبفــرض أن E أي حادثة أخرى (شكل (١-٢٢) فإن :

$$E = S \cap E = (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) \cap E$$
$$= (A_1 \cap E) \cup (A_2 \cap E) \cup ... \cup (A_k \cap E).$$



شكل (١-٢٢)

الصيغة السابقة مفيدة فى النظرية التالية :

نظرية (١-١٣) الاحتمال الكلي total probability . بفرض أن $A_1 , A_2 ,.., A_k$ تمثل k حادثة مانعة وشاملة ، وعلى ذلك لأي حادثة E فإن :

$$P(E)=\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(E|A_i)$$

البرهان :

الفئات $A_1\cap E, A_2\cap E,..., A_k\cap E$ مانعة بالتبادل وعلى ذلك فإن :

$$P(E)=\sum_{i=1}^{k} P(A_i\cap E) \qquad (١-٨)$$

بتطبيق نظرية (١-١١) على كل حد نحصل على برهان النظرية .

مثال (١-٩٦) لدينا ثلاث أوعية كما يلي : الوعاء الأول به 6 كرات حمراء و 25 بيضاء والوعاء الثاني به 11 كرات حمراء و 26 بيضاء والوعاء الثالث بـه 7 كرات حمراء و 36 بيضاء أختير وعاء بطريقة عشوائية وسحبت منه كره ما احتمال أن تكون حمراء .

الحل : التجربة موضحة فى شكل (١- ٢٣)

7 حمراء 36 بيضاء	11 حمراء 26 بيضاء	6 حمراء 25 بيضاء

شكل (١-٢٣)

الحل : بفرض أن A_i تمثل الحادثة " اختيار الوعاء رقم i عشوائيا " حيث $i=1,2,3$. وبفرض أن E الحادثة " الكرة المختارة حمراء ". وعلى ذلك $P(A_1)=P(A_2)=(A_3)=1/3$ ومنها :

$$P(E)=P(A_1)P(E|A_1)+P(A_2)P(E|A_2)+P(A_3)P(E|A_3)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{31}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{11}{37}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{7}{43}\right)=0.2178787.$$

مثال (١-٩٧) وعاء يحتوى على 100 وحدة بعضها منتج من المصنع 1 والباقي من المصنع 2 أو المصنع 3 . بعض الوحدات سليمة وبعضها تالفة . الجدول التالي يعطي عدد الوحدات السليمة والتالفة المنتجة فى كل مصنع . فإذا اختيرت وحدة عشوائياً من الوعاء . ليكن E الحادثة " الوحدة تالفة " وعلى ذلك E^c الحادثة " الوحدة سليمة " . أيضا ليكن A_1 الحادثة " الوحدة من إنتاج المصنع 1 " و A_2 الحادثة " الوحدة من إنتاج المصنع 2 " و A_3 الحادثة " الوحدة من إنتاج المصنع 3 " .أوجد احتمال اختيار وحدة تالفة .

	A_1	A_2	A_3	المجموع
E	5	10	5	20
E^c	20	25	35	80
المجموع	25	35	40	100

الحل :

$$P(A_1)=25/100\ ,\ P(A_2)=35/100\ ,\ P(A_3)=40/100,$$

$$P(E|A_1)=5/25\ ,\ P(E|A_2)=10/35\ ,\ P(E|A_3)=5/40.$$

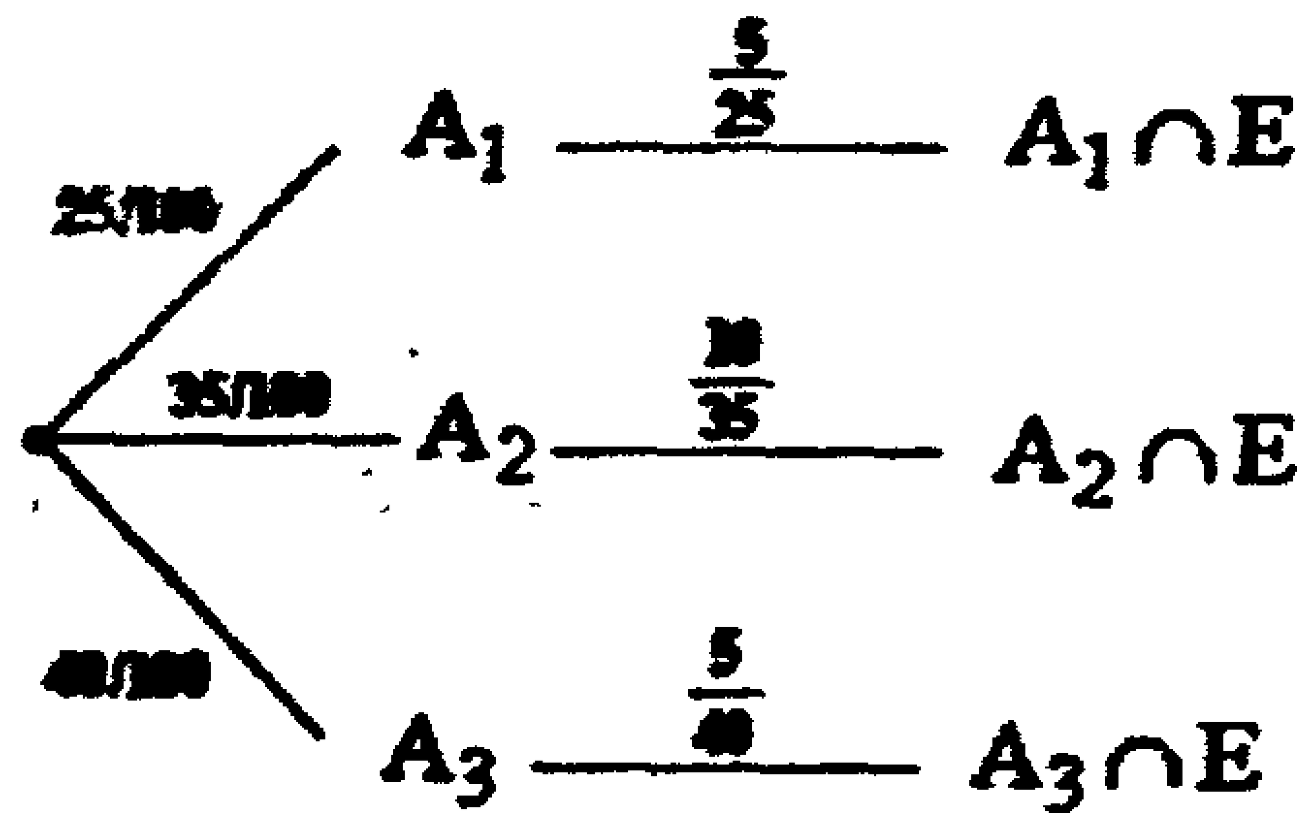
يمكن حساب P(E) مباشرة من الجدول حيث P(E)=20/100=0.2 أو باستخدام نظرية الاحتمال الكلي حيث :

$$P(E)=P(A_1)P(E|A_1)+P(A_2)P(E|A_2)+P(A_3)P(E|A_3)$$

$$=\left(\frac{25}{100}\right)\left(\frac{5}{25}\right)+\left(\frac{35}{100}\right)\left(\frac{10}{35}\right)+\left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{5}{40}\right)$$

$$= .05 + .10 + .05 = .20.$$

هذه المشكلة يمكن تسهيلها بشكل الشجرة كما فى شكل (١-٢٤) .



شكل (١-٢٤)

فى المثال السابق بفرض أننا سحبنا وحدة ووجدنا أنها تالفة ولكن لا نعلم مـن أي وعـاء اختيرت ونرغب فى إيجاد احتمال أنها سحبت من وعاء معين إذا علم أنها تالفة . لتعيين هذا الاحتمال نحتاج إلي النظرية التالية :

نظرية (١-١٤) نظرية بييز Bayes' Theorem . إذا كانت $A_1\ ,\ A_2\ ,\ \dots\ ,\ A_k$ تمثل k حادثة مانعة وشاملة وكان ظهور إحداهما ينتج عنه ظهور حادثة أخـري E ، أي أن E تقع إذا وقعت واحدة من الأحداث المانعة فإن :

$$P(A_j|E)=\frac{P(A_j)P(E|A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(E|A_i)}.$$

لأي $j = 1, 2, \ldots , k$
من (١-٦) ومن نظرية الضرب (نظرية (١-١١)) فإن :

$$P(A_j|E)=\frac{P(A_j\cap E)}{P(E)}$$

$$=\frac{P(A_j)P(E|A_j)}{P(E)}.$$

وبالتعويض عن $P(E)$ بقيمتها من نظرية (١-١٣) يتم البرهان .

مثال (١-٩٨) يبيع مركز تجاري أجهزة الفيديو بثلاثة أسعار حسب الموديل حيث 50% من المبيعات من النوع 1 و 30% من النوع 2 و 20% من النوع 3 . يقدم المركز ضمانا للمشتري خلال فترة سنة من الشراء لتصليح الجهاز عند عطلة . فإذا كان معروف أن 25% من أجهزة من النوع 1 تعود إلي المركز فى فترة الضمان بينما 20% و 10% من الأجهزة من النوع 2 و 3 على التوالي تعود إلي المركز في فترة الضمان .

(أ) ما هو الاحتمال أن عميل اختير عشوائياً جاء لتصليح جهازه خلال فترة الضمان .

(ب) إذا عاد عميل إلي المركز بجهاز يحتاج إلي التصليح فى فترة الضمان ما هو الاحتمال أنه من نوع 1 ؟ من نوع 2 من نوع 3 ؟

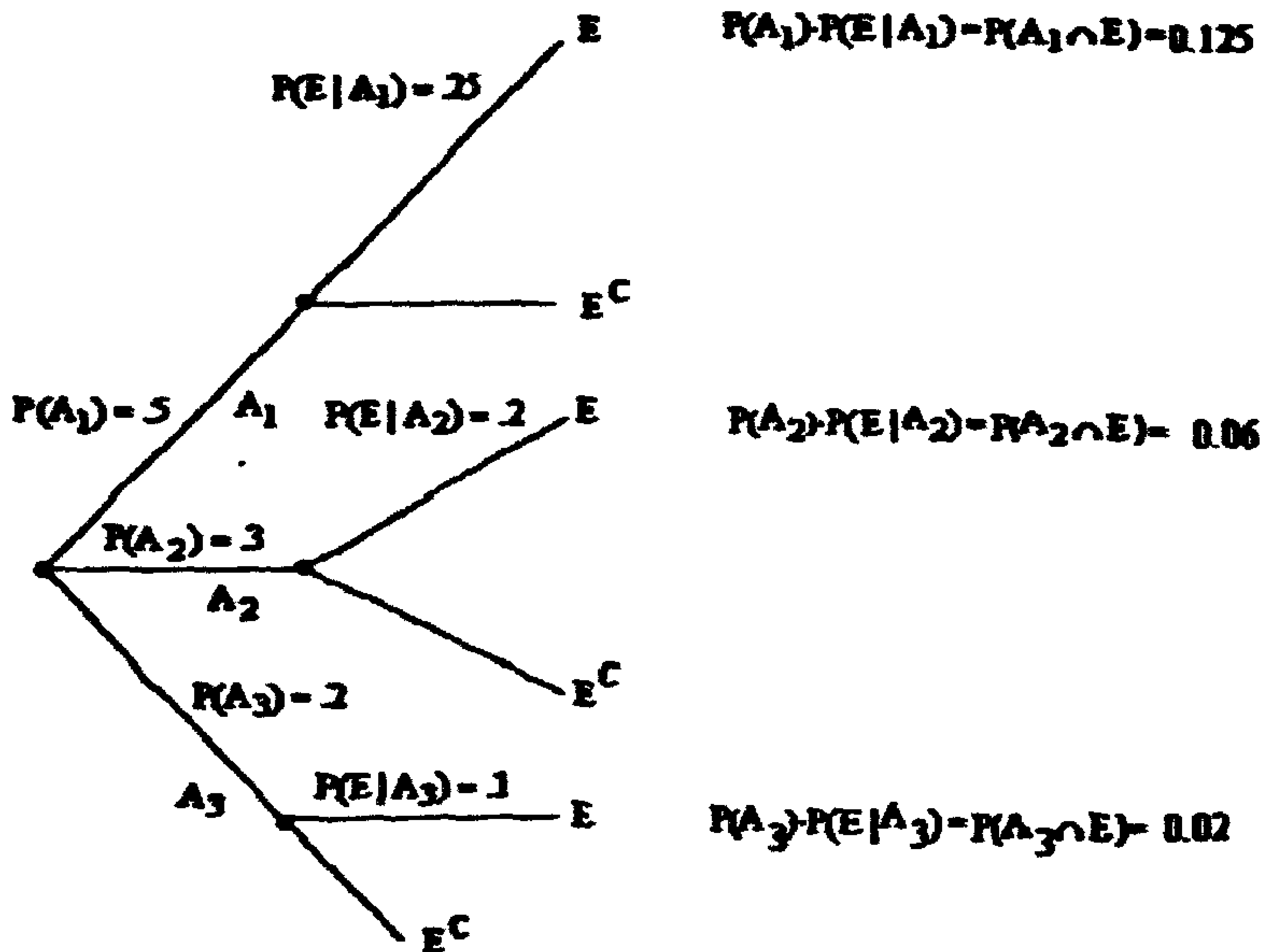
الحل : (أ) بفرض أن الحادثة { يشتري جهاز من نوع i } = A_i حيث $i=1,2,3$ وعلى ذلك $P(A_1)=.5, P(A_2)=.3, P(A_3)=.2$ وبفرض E الحادثة أن الجهاز يعود للتصليح في فترة الضمان وعلى ذلك $P(E|A_1)=.25, P(E|A_2)=.2, P(E|A_3)=.1$ وعلى ذلك :

$$P(E) = P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2) + P(A_3)P(E|A_3)$$
$$= (.5)(.25) + (.3)(.2) + (.2)(.1)$$
$$= \; .125 \; + \; .060 + \; .020$$
$$= \; .205.$$

(ب)

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1).P(E|A_1)}{P(E)}$$
$$= \frac{(0.5)(0.25)}{0.205} = \frac{0.125}{0.205} = 0.61,$$
$$P(A_2|E) = \frac{P(A_2).P(E|A_2)}{P(E)} = \frac{(.3)(.2)}{.205} \quad = \frac{0.06}{0.205} = 0.29,$$
$$P(A_3|E) = 1 - P(A_1|\,E) - P(A_2|E)$$
$$= 1 - 0.61 - 0.29 = .10.$$

يمكن تسهيل المشكلة بشكل الشجرة كما فى شكل (١ - ٢٥).



شكل (١ - ٢٥)

مثال (١- ٩٩) يذهب رجل إلي عمله يومياً أما بسيارته أو بوسائل النقل العام . احتمال أن يركب سيارته هو 0.4 واحتمال أن يتأخر عن عمله إذا استخدم وسائل النقل العام هو 0.6 واحتمال أن يتأخر عن عمله إذا استخدم سيارته هو 0.3 . فإذا ذهب إلى عمله متأخرا فى يوم ما أوجد احتمال أن يكون قد أستقل سيارته .

الحل : بفرض أن A_1 الحادثة " يستخدم سيارته " و A_2 الحادثة " يستخدم وسائل النقل العام " و E الحادثة " يتأخر عن عمله " وعلى ذلك :

$$P(A_1) = .4 \;,\; P(A_2) = .6 \;,$$
$$P(E|A_1) = .3 \quad , \quad P(E|A_2) = .6,$$
$$P(E) = P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)$$
$$= (0.4)(0.3) + (0.6)(0.6)$$
$$= .48.$$

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1).P(E|A_1)}{P(E)}$$
$$= \frac{(.4)(.3)}{.48} = .25.$$

مثال (١-١٠٠) بفرض أن 1% من سكان مدينة ما يعانون من مرض ما . فإذا ظهر اختبار جديد للكشف عن المرض وأجري على سكان المدينة . أعطي الاختبار نتيجة موجبة فى 95% من الحالات التي عندها المرضى . كما أعطي الاختبار نتيجة سالبة فى 97% من الحالات التي ليس عندها المرضى . اختير شخص بطريقة عشوائية وكانت نتيجة الكشف عنده موجبة ما احتمال أنه يعاني من المرض .

الحل : بفرض أن A_1 الحادثة " الشخص يعاني من المرض " و A_2 الحادثة " الشخص ليس عنده المرض " و E الحادثة " نتيجة الاختبار موجبة " وعلى ذلك :

$$P(A_1) = 0.01 \quad , \; P(A_2) = 0.99 \;,$$
$$P(E|A_1) = 0.95 \quad , \quad P(E|A_2) = 0.03,$$
$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1).P(E|A_1)}{P(A_1).P(E|A_1) + P(A_2).P(E|A_2)}$$
$$= \frac{(0.01)(0.95)}{(0.01)(0.95) + (0.99)(0.03)} = \frac{.0095}{0.0392} = 0.2423469.$$

مثال (١-١٠١) في مصنع يتم إنتاج ذاكرة الحاسب الآلي الشخصي ، فإذا كان من المعروف أن 0.1 من الإنتاج تالف وبفرض أن الشركة تقوم بفحص الإنتاج . فإذا كان احتمال أن تكون النتيجة موجبة إذا علم أن الوحدة تالفة هو 005. بينما احتمال أن تكون النتيجة سالبة إذا علم أن الوحدة سليمة هو 0.001 أوجد :

(أ) احتمال اختيار وحدة عشوائياً وتكون نتيجة الفحص موجبة .

(ب) بفرض أنه اختيرت وحدة ووجد أنها موجبة ما احتمال أن تكون سليمة .

الحل : (أ) بفرض أن A_1 الحادثة " الوحدة تالفة " A_2 الحادثة " الوحدة سليمة " و E الحادثة أن " النتيجة موجبة " . وعلى ذلك :

$$P(A_1) = .1 \quad , \; P(A_2) = .9 ,$$
$$P(E|A_1) = .005 \quad , \quad P(E|A_2) = .999,$$
$$P(E) = P(A_1).P(E|A_1) + P(A_2).P(E|A_2)$$
$$= (.1)(.005) + (.9)(.999)$$
$$= .0005 + .8991 = .8996.$$

(ب)
$$P(A_2|E) = \frac{P(A_2).P(E|A_2)}{P(E)}$$

$$= \frac{(.9)(.999)}{0.8996} = 0.99944.$$

مثال (١-١٠٢) إذا كان 15% من الأطفال المترددين على عيادة طبيب أطفال يعانون من الجديري المائي و 0.5% يعانون من الحمي و 7.5% يعانون من أمراض أخرى فإذا اختير طفل عشوائيا وكان يعاني من الجديري المائي فإن احتمال أن درجة حرارته عالية ولديه طفح هو 85. وإذا كان يعاني من الحمي فإن احتمال أن درجة حرارته عاليه ولدية طفح هو 1.0 أو إذا كان يعاني من أمراض أخري فإن احتمال أن تكون درجة حرارته عالية ولدية طفح هو 33. أوجد :

(أ) احتمال أن طفل يعاني من درجة الحرارة العالية والطفح .

(ب) إذا علم أن الطفل المختار عشوائياً لدية ارتفاع فى درجة حرارة وطفح أوجد احتمال أنه مصاب بالجديري المائي .

الحل : (أ) بفرض أن A_1 الحادثة " أن الطفل يعاني من الجديرى المائي " و A_2 الحادثة " أن الطفل يعاني من الحمى " و A_3 الحادثة " أن الطفل يعاني من أمراض أخـــري " و E الحادثة أن الطفل درجة حرارته عالية ولدية طفح وعلى ذلك :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1).P(E|A_1) + P(A_2).P(E|A_2) \\ &\quad + P(A_3).P(E|A_3) \\ &= (.15)(.85) + (.005)(1) + (.075)(.33) \\ &= 0.15725, \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} P(A_1|E) &= \frac{P(A_1).P(E|A_1)}{P(E)} \\ &= \frac{(0.15)(0.85)}{.15725} = 0.8108108. \end{aligned}$$

ويجب أن يلاحظ أن $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \neq 1$ وذلك لأننا حذفنا الحادثـــة A_4 " الطفل بصـحة " والتي احتمالها 77. وتحت فرض أن $P(E|A_4) = 0$.

مثال (١-٣-١٠) بفرض 3 أوعية متماثلة وكل وعاء به كرتين . الوعاء الأول يحتـــوى على كرتين لونهما أحمر و الوعاء الثاني يحتوى على كرتين لونهما أسود والوعاء الثـالث يحتوي على كرة حمراء أو كرة بيضاء . اختير وعاء عشوائياً ، وتم اختيار كــــره مـــن الوعاء ووجد أنهما حمراء وبفرض أن E الحادثة " الكــــرة المختـــارة حمـــراء " و A_i الحادثة " الكرة مختارة من الوعاء رقم i " أوجد $P(A_1|E)$

الحل :

$$P(A_i) = \frac{1}{3} \quad , \quad i = 1,2,3.$$

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(E|A_i) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)(1) + \left(\frac{1}{3}\right)(0) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$P(A|E) = \frac{P(A_1).P(E|A_1)}{P(E)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)(1)}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

مثال (١-١٠٤) عندما يتم التنقيب عن البترول يجري اختبار بمنقاب وذلـــك للتحقــق فيما إذا كان هناك كميات كبيرة من البترول أم لا . فــإذا كــانت A الحادثــة " وجــود كميات كبيرة من البترول " و A^c الحادثة " كميات ليست كبيرة من البترول " وإذا كـــان E الحادثة " أن البترول structure " و E^c الحادثة " أن البـــترول not structure " . الاختبارات في الماضي سجلت النتائج الآتية :

$$P(A \cap E) = .20,$$

$$P(A^c \cap E) = .15,$$

$$P(A \cap E^c) = .05$$

$$P(A^c \cap E^c) = .60,$$

أوجد : $P(A^c | E^c)$, $(A | E^c)$

الحل : يمكن وضع النتائج في الجدول التالي :

	Structure	No Structure	
كميات كبيرة	.20	.05	.25
ليست كبيرة	.15	.60	.75
	.35	.65	1.00

من الجدول السابق فإن :

$$P(A) = .25 \quad , \quad P(A^c) = 0.75$$

$$P(E^c) = 0.65 \quad , \quad P(E) = 0.35$$

$$P(A \mid E^c) = \frac{P(A \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{0.05}{0.65} = 0.077,$$

$$P(A^c \mid E^c) = \frac{P(A^c \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{0.60}{0.65} = 0.923 = 1 - P(A|E^c).$$

مثال (١-١٠٥) في بحث لاستطلاع الرأي تم الحصول على البيانات التالية :

فئة الدخل (الحادثة)	$P(E\|A_i)$	$P(A_i)$
A_1 الدخل عالي	.08	.25
A_2 الدخل متوسط	.10	.50
A_3 الدخل منخفض	.04	.25

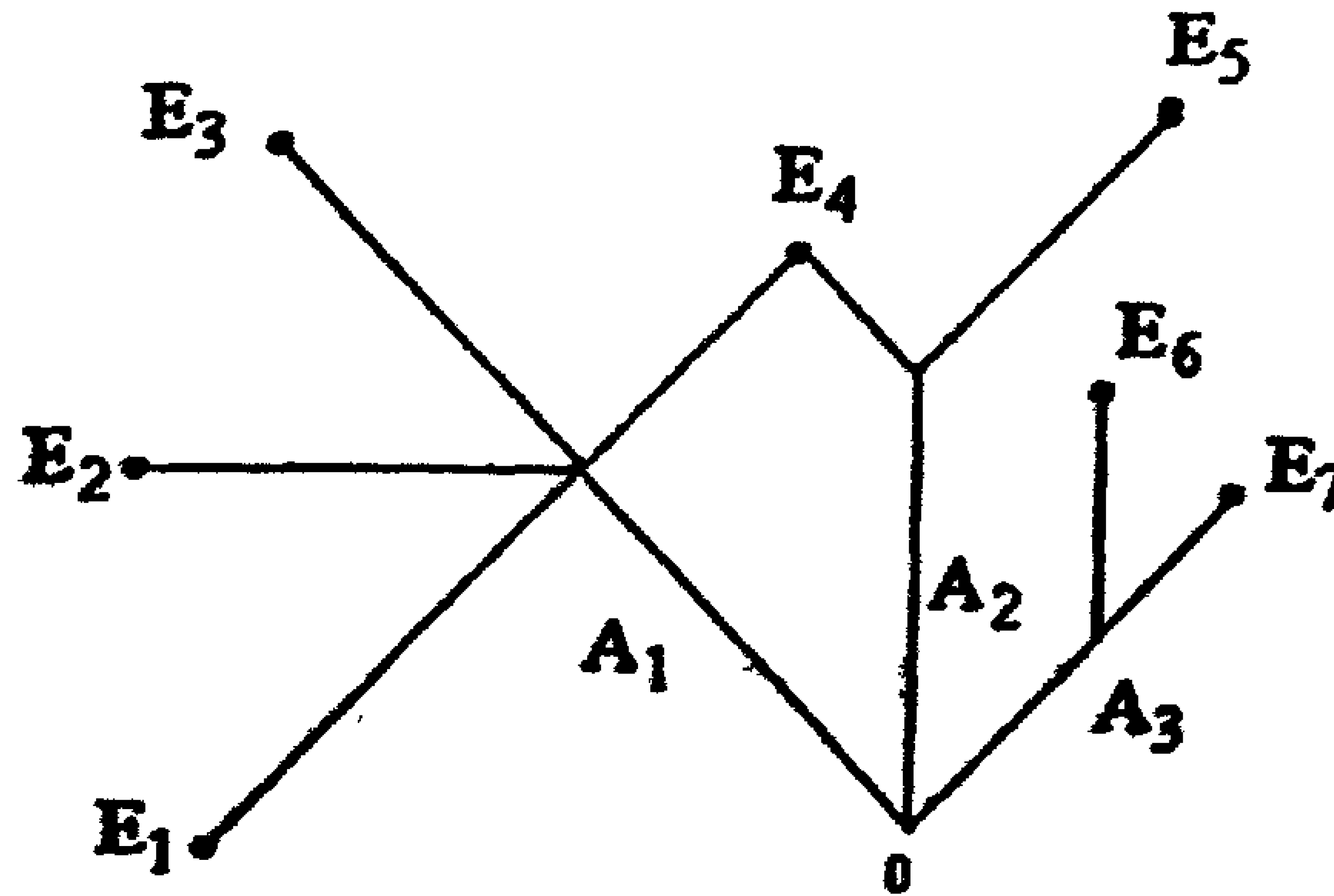
حيث E الحادثة " الشخص لا يستجيب للأسئلة " . فإذا اختيرت استمارة شخص عشوائياً من المشتركين فى البحث (أ) أوجد احتمال أنه لا يستجيب للأسئلة (ب) وبفرض أن الشخص وجد أنه لا يستجيب للأسئلة أوجد احتمال أن يكون من ذي الدخل المنخفض .

الحل : (أ)

$$P(E)=P(A_1).P(E|A_1)+P(A_2).P(E|A_2)+P(A_3).P(E|A_3)$$
$$=(.25)(.08)+(.5)(.10)+(.25)(.04)=.08.$$

$$P(A_3|E)=\frac{P(A_3).P(E|A_3)}{P(E)}=\frac{(.25)(.04)}{.08}=.125. \qquad \text{(ب)}$$

مثال (١-١٠٦) أبتدأ رجل رحلته من المكان 0 على الخريطة الموضحة فى شكل (١ -٢٦). أولا أختار عشوائياً الطريق إلي النقطة A_3 أو A_2 أو A_1 . ومن هذه النقطة أختار طريق جديد عشوائياً إلي النقطة E_j و $j=1,2,...,7$.



شكل (١-٢٦)

الحل : المطلوب حساب احتمال أن الرجل يصل إلي النقطة E_4 . من قانون الاحتمال الكلي فإن :

$$P(E_4) = P(A_1).P(E_4|\ A_1) + P(A_2).P(E_4|\ A_2)$$
$$+ P(A_3).P(E_4|\ A_3)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)(0) = \frac{1}{4}.$$

بفرض أن الشخص وصل إلي النقطة E_4 ، ولكن غير معروف أى طريق سلكه . احتمال أن يمر خلال الطريق A_1 أو A_2 أو A_3 يمكن حسابه باستخدام قاعدة بييز. على سبيل المثال :

$$P(A_1|\ E_4) = \frac{(1/3)(1/4)}{1/4} = \frac{1}{3}.$$

والتي تتفق مع الاحتمال الغير شرطي وهو $P(A_1) = 1/3$. تعتبر هذه الحالة مثال لحالة خاصة جداً تسمى الاستقلال independent بينما $P(A_2|\ E_4) = 2/3$ (بتطبيق قاعدة بييز) لا تساوى $P(A_2) = 1/3$ أي أن A_2 , E_4 غير مستقلين . أيضا $P(A_3) = 1/3$ بينما $P(A_3|\ E_4) = 0$ والذي يعكس الحقيقة السابقة أنه لا يستطيع أن يصل إلي النقطة E_4 مروراً خلال A_3 .

الأحداث المستقلة Independent Events

إذا كان احتمال وقوع حادثة ، A لا يتأثر ولا تعتمد على وقوع أو عدم وقوع حادثة أخري B وبعبارة أخرى $P(A|\ B) = P(A)$ في هذه الحالة يقال أن A مستقلة عن B وعلى ذلك :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

ومنها :

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

وإذا كانت A مستقلة عن B فإن B مستقلة عن A لأن :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

تعريف : يقال أن الحادثتين A , B مستقلان حيث ، $P(B) > 0, P(A) > 0$ إذا وفقط إذا كان :

$$P(A \cap B) = P(A)\ \ P(B)$$

وغير ذلك يقال أن A , B غير مستقلتين independent .

مثال (١ – ١٠٧) بفرض أن تجربة عشوائية لاختيار وحدتين مع الإحلال من مجتمع يتكون من وحدتين a_2 , a_1 والنتائج معطاة في الجدول التالي :

الحادثة البسيطة	$\{(a_1, a_1)\}$	$\{(a_1, a_2)\}$	$\{(a_2, a_1)\}$	$\{(a_2, a_2)\}$
الاحتمال	¼	¼	¼	¼

إذا كانت A الحادثة أن a_1 تختار في السحب الأول وعلى ذلك :

$$A = \{ a_1, a_2),\ (a_1, a_2)\} .$$

وإذا كانت B الحادثة أن a_2 تختار في السحبة الثانية وعلى ذلك :

$$B = \{(a_1, a_2),\ (a_2, a_2)\} .$$

وعلى ذلك :

$$A \cap B = \{(a_1, a_2)\}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A).P(B) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}).$$

وعلى ذلك فإن A , B حادثتان مستقلتان .

مثال (١– ١٠٨) في المثال السابق بفرض أن السحب بدون إرجاع ومن الجدول التالي فإن :

الحادثة البسيطة	$\{(a_1, a_1)\}$	$\{(a_1, a_2)\}$	$\{(a_2, a_1)\}$	$\{(a_2, a_2)\}$
الاحتمال	0	½	½	0

$$P(A \cap B) = P\{(a_1, a_2)\} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = P(A)\ \ P(B)$$

وعلى ذلك الحادثتين A , B غير مستقلين .

مثال (١- ١٠٩) إذا كان احتمال أن A يصوب نحو الهدف هو ¼ ، بينما احتمـــال أن B يصوب نحو الهدف 2/5 . بفرض أن الاثنين صوبا نحو الهدف ما هو الاحتمـــال أن واحد على الأقل منهم يصيب الهدف ؟

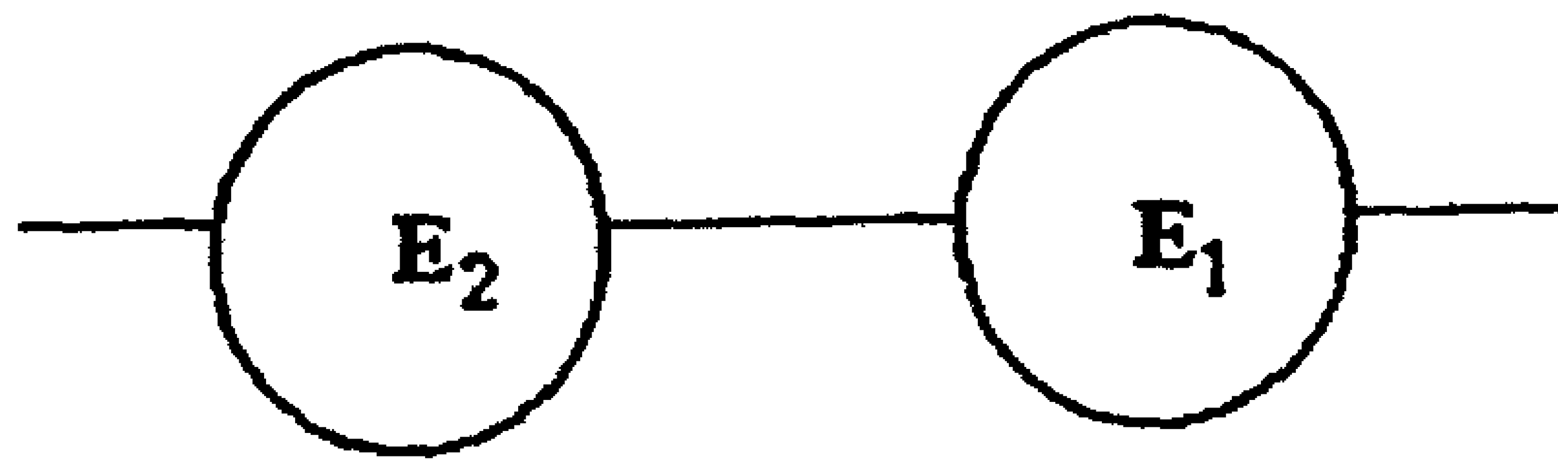
الحل : $P(B)=\frac{2}{5}, P(A)=\frac{1}{4}$ والمطلوب حساب $P(A\cup B)$ وبما أن :

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\
&= P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\
&= \frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{11}{20}.
\end{aligned}
$$

مثال (١- ١١٠) يتكون نظام من مكونين E_1 , E_2 متصلين علـــى التوالـــي series system والموضحين في شكل (١-٢٧) فإذا كان A_1 الحادثـــة "E_1 يفشـــل " و A_2 الحادثة " E_2 يفشل " وعلى ذلك فإن فشل النظام يمثل بالحادثة $A_1\cup A_2$. وبفـــرض أن $P(A_1)=.1$, $P(A_2)=.2$ وبفرض أن A_1 , A_2 مستقلتين فإن احتمـــال فشل النظام هو :

$$
\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2) &= P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)\\
&= .1 + .2 - (.1)(.2)\\
&= .28.
\end{aligned}
$$

وعلى ذلك فإن احتمال أن يعمل النظام بصورة جيدة هو $1 - .28 = .72$

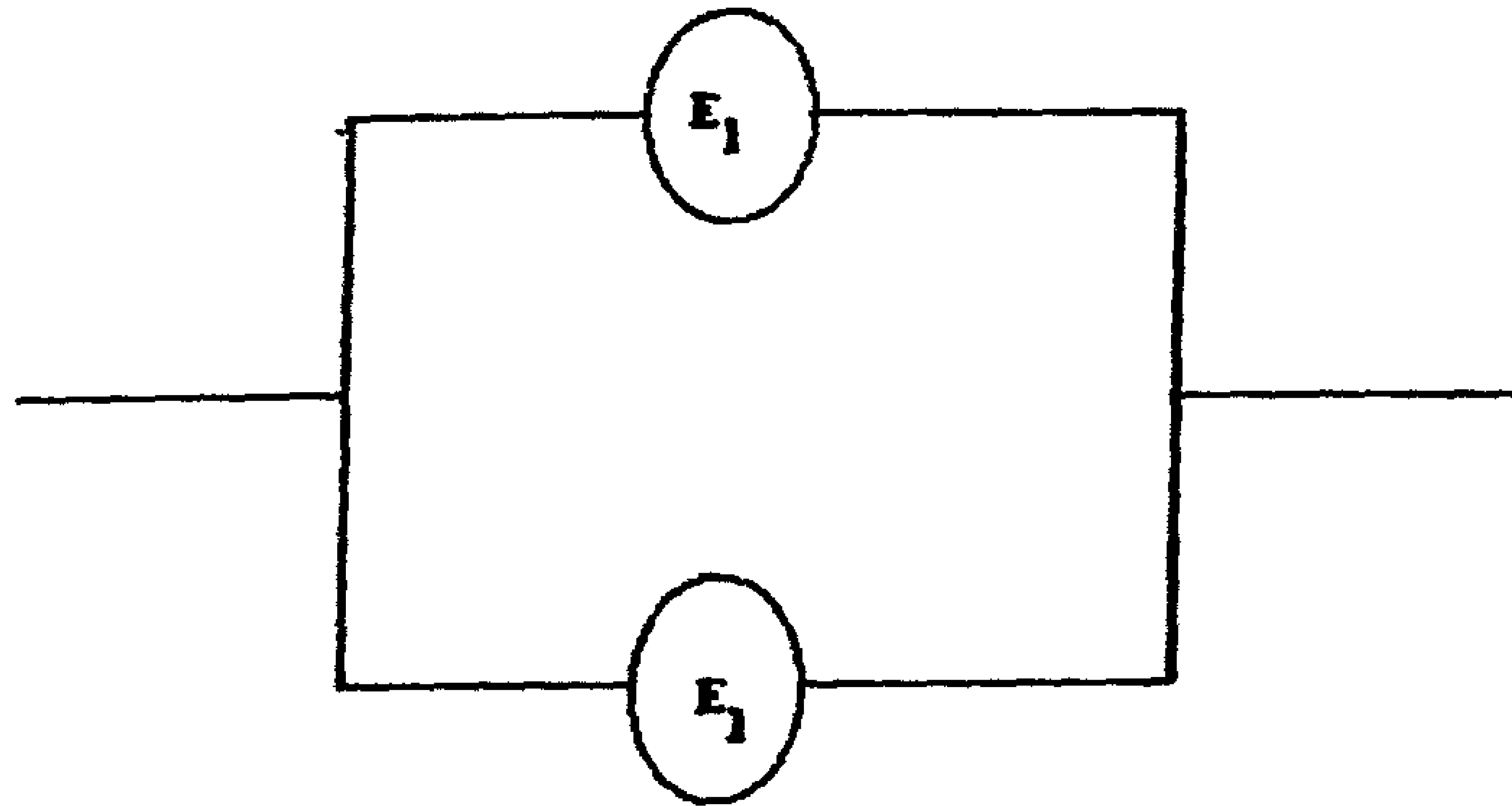


شكل (١- ٢٧)

مثال (١-١١١) بفرض أن النظام في المثال السابق يتكون من مكونيـــن E_1 , E_2 متصلين على التوازي parallel system والموضحة في شكل (١-٢٨) . الحادثـــة " فشل النظام " يعني $P(A_1\cap A_2)$ وبما أن E_1 , E_2 مستقلين فإن :

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\ P(A_2)$$

$$= (.1)\ (.2) = .02.$$



شكل (١-٢٨)

تعريف : يقال للأحداث A_1 , A_2 , ... , A_k أنـهـا مسـتقلة بالتبـادل mutually independent إذا كان A_j , A_i مستقلين لكل $1 \leq i \neq j \leq k$ بمعنـي آخـر $P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j)$ لأي اختيار من j,i .

تعريف : يقال للحوادث A, B, C أنهم مستقلين إذا كانت :

(أ) الحوادث A, B, C مستقلة بالتبادل .

(ب) $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$

تحقق (أ) لا يعني تحقق (ب) كما سنري في المثال التالي :

مثال (١- ١١٢) إذا ألقيت عملتين وإذا كان:

A الحادثة ظهور صورة على العملة الأولى

B الحادثة ظهور صورة على العملة الثانية .

C الحادثة ظهور بالضبط صورة واحـدة .

وإذا كان $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ فإن :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

$$A \cap B = \{HH\}, A \cap C = \{HT\}, B \cap C = \{TH\}.$$

وعلى ذلك :

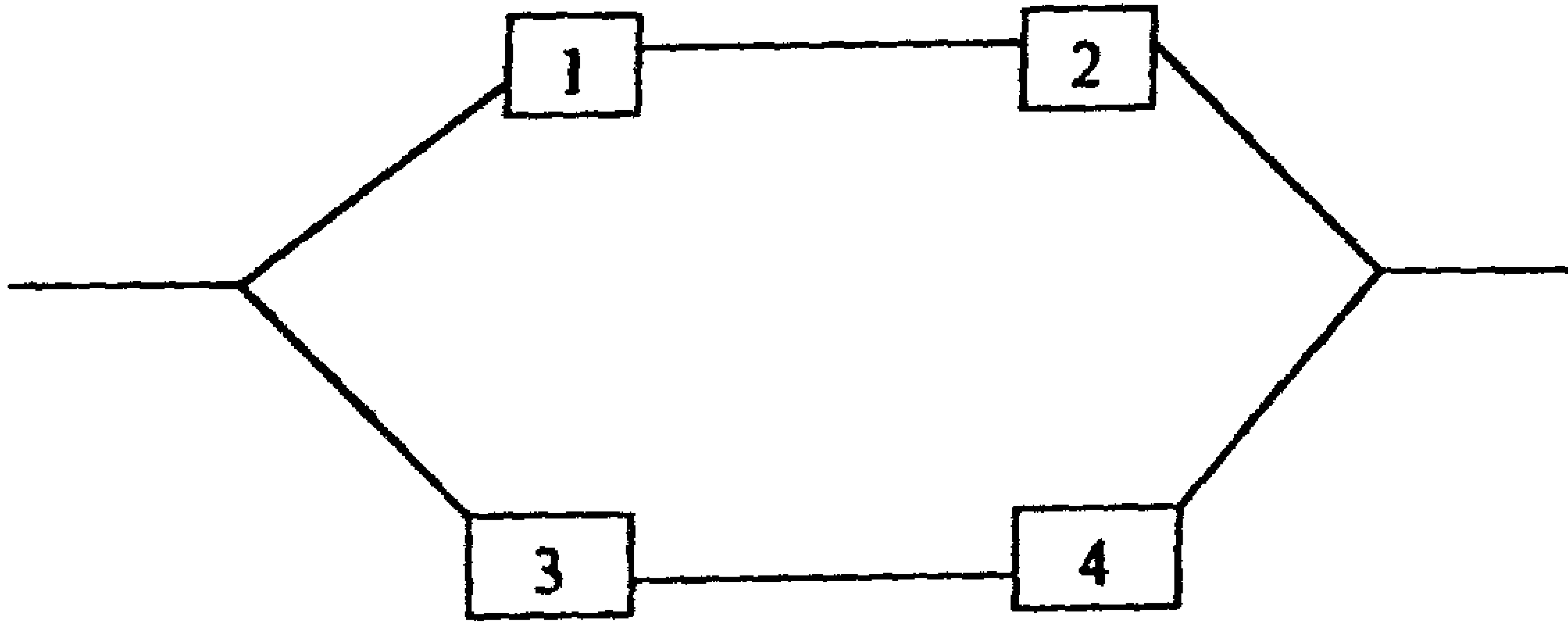
$$\frac{1}{4}=P(A\cap B)=P(A)\ P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{4}=P(A\cap C)=P(A)\ P(C)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{4}=P(B\cap C)=P(B)\ P(C)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

وعلى ذلك الأحداث A , B , C مستقلة بالتبادل بينما $A\cap B\cap C=\phi$ وعلـــى ذلـــك $P(A\cap B\cap C)=0$.وعلى ذلك $P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C)$ أي أن : A, B ,C غير مـستقلتين

التعريف السابق يمكن تعميمه لأكثر من ثلاثة أحداث .

تعريف : يقال للأحداث $A_1 , A_2 , \ldots , A_k$ أنها مستقلة إذا تحققت نظرية الضرب لكـــل التباديل من حادثتين أو أكثر والتي عددها 2^k-k-1 .

مثال (١-١١٣) يتكون نظام من أربع مكونات كما يتضح من شكل (١-٢٩).



شكل (١- ٢٩)

يعمل النظام إذا عمل $1, 2$ أو $3 , 4$ وكل مكون مستقل عن الآخر . فإذا كان :
A_i = { المكون i يعمل } حيـــث $i=1,2,3,4$. الحادثـــة أن $2, 1$ يعمـــلان هـــو $A_1\cap A_2$ وأيضا $A_3\cap A_4$ الحادثة أن $4 , 3$ يعملان . وعلى ذلك الحادثة أن يعمـــل النظـــام هـــو $D=(A_1\cap A_2)\cup(A_3\cap A_4)$ أوجـــد $P(D)$ إذا كـــان $P(A_i)=.9, i=1,2,3,4$

الحـــل :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= (.9)(.9) + (.9)(.9) - (.9)(.9)(.9)(.9) \\ &= .9639. \end{aligned}$$

نظرية (١-١٥) إذا كانت الحادثتان A , B مستقلتين ، فإن الأحداث A, B^c و A^c, B و A^c, B^c مستقلين .

البرهان : أولا سوف نثبت أن A , B^c حادثتان مستقلتان وبما أن A , B حادثتان مستقلتان فإن :

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B).$$

وحيث أن B , B^c يمكن اعتبارها . كتجزئة لفضاء العينة S فإن الفئتان $A \cap B, A \cap B^c$ يمكن اعتبارهما تجزئة للحادثة A. وعلى ذلك :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

ومنها :

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)\ P(B) \\ &= P(A)\ [1 - P(B)] \\ &= P(A)\ P(B^c). \end{aligned}$$

وعلى ذلك A, B^c مستقلتين وبنفس الشكل يمكن إثبات أن :

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)\ P(B),$$
$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)\ P(B^c).$$

وذلك إذا كان A , B حادثتين مستقلتين .

نظرية (١ - ١٦) بفرض أن A , B , C حوادث مستقلة فإن الحادثة A مستقلة عن أي حادثة تمثل من B , C بأي عملية من العمليات مثل الاتحاد أو التقاطع أو المكمل مثل $B \cap C$, $B \cup C$.

البرهان : يمكن إثبات الاستقلال بين A , $B \cap C$ كما يلي :

$$\begin{aligned} P[A \cap (B \cap C)] &= P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A)\,P(B)\,P(C) \\ &= P(A)\quad P(B \cap C) \end{aligned}$$

لأن C , B مستقلين . وعلى ذلك A , B⋂C مســتقلين .أيضــا يمكــن إثبــات أن:
B⋃C,A مستقلين كما يلي :

$$
\begin{aligned}
P[A\cap (B\cup C)] &= P(A\cap B)\cup (A\cap C) \\
&= P(A\cap B) + (A\cap C) - P(A\cap B\cap C) \\
&= P(A).\,P(B) + P(A).\,P(C) - P(A).\,P(B).\,P(C) \\
&= P(A)\,[\,P(B) + P(C) - P(B)\,P(C)\,] \\
&= P(A).\;P(B\cup C).
\end{aligned}
$$

أي أن B⋃C,A حادثتان مستقلتان .

مثال (١-١١٤) صوب A , B , D نحو هدف باحتمالات :
$P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, $P(D) = 0.8$ لاصابة الهدف . (النجاح في التصويــب).
أوجد احتمال الحادثة E " واحد بالضبط يصوب نحو الهدف " .
الحل : بما أن :

$$E = [A\cap B^c\cap D^c]\cup[A^c\cap B\cap D^c]\cup\ [A^c\cap B^c\cap D]$$

يمثلون ثلاثة أحداث مانعة وعلى ذلك :

$$P(E) = P[A\cap B^c\cap D^c] + [P[A^c\cap B\cap D^c] + P[A^c\cap B^c\cap D]$$

وحيث أن :

$$
\begin{aligned}
P[A\cap B^c\cap D^c] &= P(A).P(B^c).P(D^c) \\
&= (.5)\,(.4)\,(.2) = .04\,, \\
P[A^c\cap B\cap D^c] &= P(A^c).P(B).P(D^c) \\
&= (.5)\,(.6)\,(.2) = .06, \\
P[A^c\cap B^c\cap D\ ] &= P(A^c).P(B^c).P(D) \\
&= (.5)\,(.4)\,(.8) = .16.
\end{aligned}
$$

وعلى ذلك :

$$P(E) = .04 + .06 + .16 = .26\,.$$

هناك علاقة وثيقة بين الأحداث المانعة والاستقلال ، فقــد يتبــادر إلــى الذهــن أن الحوادث المانعة يجب أن تكون مستقلة ولكن هذا غير صحيح . فإذا علم أن B وقعــت فهذا يعني أن A لن تقع وعلــى ذلــك $P(A|B) = 0$. إذا كانت $P(A) \neq 0$ فإن $P(A|B) = 0 \neq P(A)$ وعلى ذلك فإن A , B حادثتين غير مستقلتين . وهذا يعنــي أن أي حادثتين متنافيتين دائما غير مستقلين . ومن ناحية أخرى إذا كانت A , B مســتقلين

فإن $P(B) \neq 0$, $P(A) \neq 0$ وعلى ذلك B , A لا يمكن أن يكونا متنافيتين لأن $P(A \cap B) = P(A).P(B) \neq 0$ بينما إذا كان B , A متنافيتين $A \cap B = \phi$ وبالتالي $P(A \cap B) = 0$.

المحاولات المستقلة :

تتكون كثير من المشاكل الاحتمالية الهامة من تكرار نفس التجربة عدة مرات ، دائما تحت نفس الظروف .

تعريف : إذا كان S فضاء العينة لتجربة عشوائية وبفرض أجراء k من المحاولات المستقلة على S فإننا نعرف الفضاء :

$$\varphi = \{(a_1, a_2, ..., a_k) | \ a_i \in S \ \text{for all} \ \ 1 \leq i \leq k\}$$

وعلى ذلك :

$$P\left[(a_1, a_2, ..., a_k)\right] = P(a_1) \, . \, P(a_2) \, ... \, .P(a_k).$$

يمكن التحقق من مسلمات دالة الفئة الاحتمالية على الفضاء φ كالآتي وذلك عندما $k = 2$ و S منتهية .

$$\sum_{i,j=1}^{n} P[(a_i, a_j)] = \sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{n} P(a_i, a_j)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{n} P(a_i)P(a_j)\right\}.$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \left\{\sum_{j=1}^{n} P(a_j)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \ . \ 1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 1$$

ويمكن إثبات الصيغة السابقة عندما $k = m$ وذلك باستخدام الاستنتاج الرياضي . يعتبر اختيار عينة عشوائية من الحجم n مع الإرجاع مثال لمحاولات متكررة عددها n كل محاولة تمثل عينة من الحجم 1 .

مثال (١-١١٥) بفرض أن بحيرة بها 100 سمكة منهم 30 حجمها قياسي . عند الصيد من هذه البحيرة يفترض أن السمكة تسحب مع الإرجاع . بفرض أننا نرغب في صيد 3 سمكات

(أ) ما هو الاحتمال أن السمكات الثلاثة من الحجم القياسي ؟ بفرض أن A_i الحادثة " السمكة رقم i حجمها قياسي حيث $i = 1,2,3$.

(ب) الاحتمال أنه على الأقل واحدة حجمها قياسي .

الحل :

(أ)

$$P(A_i)=\frac{30}{100}, i=1,2,3,$$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$
$$=(.3)(.3)(.3)=.027\ .$$

(ب)

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P[(A_1\cup A_2\cup A_3)^c]$$
$$=1-P(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)$$
$$=1-(.7)(.7)(.7)=1-.7^3=.657.$$

مثال (١-١١٦) يحتوي وعاء على m كرات حمراء (R) و k كرات سـوداء (B) . يسحب كرة من الوعاء وترد مرة أخرى مع إضافة كرة من نفس اللون . فإذا أجريت هذه التجربة العشوائية مرتين وكانت B_i, R_i حيث $i=1,2$ ترمزان إلـى الحادثـة " الكـرة المختارة في المرة i حمراء " والحادثة " الكرة المختارة في المـرة i سـوداء " علـى التوالي . اثبت أن B_1 , B_2 غير مستقلتين .

الحل :

$$P(R_1)=\frac{m}{m+k},\quad P(B_1)=\frac{k}{m+k}.$$

يمكن حساب $P(B_2)$ من نظرية الاحتمال الكلي كالتالي :

$$P(B_2)=\frac{m}{m+k}.\frac{k}{m+k+1}+\frac{k}{m+k}.\frac{k+1}{m+k+1}$$
$$=\frac{mk+k(k+1)}{(m+k)(m+k+1)}=\frac{k(m+k+1)}{(m+k)(m+k+1)}=\frac{k}{m+k}.$$

وعلى ذلك :

$$P(B_2)=\frac{k}{m+k}=P(B_1).$$

وبنفس الطريقة :

$$P(R_2)=\frac{m}{m+k}=P(R_1).$$

وبنفس الشكل يمكن إثبات أن :

$$P(B_n)=\frac{k}{m+k}\ ,\ P(R_n)=\frac{m}{m+k}.$$

وذلك لأي : $n = 1, 2, ...$

وعلى ذلك في أي محاولة من تجربتنا التي بها نتيجتين R أو B نجد أن احتمال كل من B , R ثابت في كل محاولة . لاثبات أن B_1 , B_2 مستقلتين يجب أن يكون :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2)$$

ولكن :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= P(B_1).P(B_2|B_1) \\ &= \frac{k}{m+k}\cdot\frac{k+1}{m+k+1} \\ &\neq P(B_1)\ \ P(B_2) \\ &= \left(\frac{k}{m+k}\right)^2. \end{aligned}$$

أي أن B_2 , B_1 غير مستقلتان .

مثال (١-١١٧) يكسب الفريق (W) في أي مباراة يلعبها باحتمال .6 ويخسر (T) باحتمال .4 فإذا لعب الفريق ثلاثة مباريات ويرغب فى حساب احتمال الحادثة E حيث

$$E = \{(W, W, W), (W, W, T), (W, T, W), (T, W, W)\}.$$

الحـــل :

$$P\,|\,(WWW)] = (.6)(.6)(.6) = .216.$$

وبنفس الشكل :

$$\begin{aligned} P[(W,W,T)] &= P[(W,T,W)] = P[(T,W,W)] \\ &= (.6)(.4)(.6) = .144, \end{aligned}$$

وعلى ذلك :

$$P(E) = .216 + 3\,(0.144) = .648.$$

مثال (١-١١٨) للمثال (١-٩٣) وبفرض أن الكرات الخمسة تختار بإرجاع وعلـــى ذلك احتمال الحادثة A " كرتين بالضبط لونهما أسود " هو :

$$P(A)=\binom{5}{2}\left(\frac{10}{30}\right)^2\left(\frac{20}{30}\right)^3 = .3292.$$

يمكن استخدام طريقة أخرى للحل حيث عدد نقاط العينة في فضاء العينة ϕهو 30^5 وبما أن الأحداث متساوية في إمكانية الحدوث فإن :

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\varphi)}=\binom{5}{2}(10)^2(20)^3/30^5=03292.$$

في هذا المثال يعتبر فضاء العينة S هو :

$$S=\{W, B\}$$

أي أن الفضاء φ هو الفضاء الناتج من تكرار التجربة العشوائية ، سحب كرة من الوعاء ، 5 مرات .

تمارين :

-١- أوجد الاتحاد $A_1 \bigcup A_2$ والتقاطع $A_1 \bigcap A_2$ للفئتين A_1 , A_2 حيث

(أ) $A_1=\{x|x=0,1,2\}, A_2=\{x|x=2,3,4\}$

(ب) $A_1=\{x|\ 0<x<2\}, A_2=\{x|\ 1\le x<3\},$

(ج) $A_1=\{(x,y)|\ 0<x<2, 0<y<2\},$

$A_2=\{(x,y)|\ 1<x<3, 1<y<3\}.$

-٢- أوجد المكمل A^c للفئة A بالنسبة للفضاء U حيث :

(أ)

$$U=\{x|\ 0<x<1\}, A=\{x|\ \frac{5}{8}\le x<1\};$$

(ب)

$$U=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2\le 1\}, A=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=1\};$$

(ج)

$$U=\{(x,y)|\ x+|y|\le 2\}, A=\{x,y|\ x^2+y^2<2\}.$$

-٣- باستخدام شكل فن قارن الفئات التالية :

(أ) $A_1 \bigcap (A_2 \bigcup A_3)$ and $(A_1 \bigcap A_2) \bigcup (A_1 \bigcap A_3),$

(ج) $(A_1 \cup A_2)^c$ and $A_1^c \cap A_2^c$,

(د) $(A_1 \cap A_2)^c$ and $A_1^c \cup A_2^c$

٤- لكل فئة A في البعد الأول ، بفرض $Q(A)=\sum_{A} f(x)$ حيث

$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x, x=0,1,2,...$ و 0 otherwise . إذا كان :

$A_1=\{x|x=0,1,2,3\}$ ، $A_2=\{x|x=0,1,2,...\}$ أوجد $Q(A_1)$ ، $Q(A_2)$.

٥- لكل فئة A فى البعد الأول حيث التكامل معرف و $Q(A)=\int_{A} f(x)\,dx$ حيث :

$$f(x)=6x(1-x) \ , \ 0<x<1 \ ,$$

و صفر غير ذلك حيث $Q(A)$ غير معرفة . إذا كان :

$$A_1=\left\{x| \ \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}\right\} \ , \ A_2=\left\{x| \ x=\frac{1}{2}\right\} \ , \ A_3\{x| \ 0<x<10)\}$$

أوجد $Q(A_1)$ ، $Q(A_2)$ ، $Q(A_3)$.

٦- لكل فئة A فى البعد الأول ، ليكن $Q(A)$ تساوي عدد النقط فى A والمقابلة للأعداد الصحيحة الموجبة . إذا كانت :

$A_1=\{x|50$ { x مضاعفات 3 والتى أقل من أو تساوي و

$A_2=\{x|50$ { x مضاعفات 7 والتى أقل من أو تساوي أوجد :

$$Q(A_1) \ , \ Q(A_2) \ , \ Q(A_1 \cap A_2) \ , \ Q(A_1 \cup A_2)$$

أثبت أن :

$$Q(A_1 \cup A_2)=Q(A_1) \ + \ Q(A_2) \ - \ Q(A_1 \cap A_2) \ .$$

٧- لكل فئة A فى البعد الثاني ، ليكن $Q(A)$ عدد النقاط (x, y) فى A حيث كلا من x , y أعداد صحيحة موجبة أوجد $Q(A_1)$ ، $Q(A_2)$ ، حيث

$$A_1=\{(x,y)| \ x^2+y^2 \le 4\},$$

$$A_2=\{(x,y)| \ x^2+y^2 \le 9\}.$$

تذكر أن $A_1 \subset A_2$ وأن $Q(A_1) \le Q(A_2)$.

-٨- إذا كان $Q(A) = \iint_A (x^2 + y^2)\ dx\,dy$ لأي فئة A فى البعد الثاني حيث التكامل معرف وغير ذلك $Q(A)$ غير معرفة . إذا كان

$$A_1 = \{(x,y) |\ -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\},$$
$$A_2 = \{(x,y) |\ -1 \le x = y \le 1\},$$

أوجد $Q(A_1)$, $Q(A_2)$.

-٩- ليكن $Q(A) = \int \iint_A z\,dx\,dy\,dz$ لأي فئة A فى البعد الثالث حيث التكامل معرف و غير ذلك $Q(A)$ غير معرفة . قدر دالة الفئة للفئات :

$$A_1 = \{(x,y,z) |\ (x,y,z) = (0,0,0)\},$$
$$A_2 = \{(x,y,z) |\ x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 1\}.$$

-١٠- اختيرت عشوائيا عائلة عندها 3 أطفال وتم تسجيل الجنس (حيث b ذكر و g أنثى) للأطفال :

(أ) أوجد الحادثة E_1 " بالضبط أثنين من الثلاثة ذكور " .

(ب) أوجد الحادثة E_2 " بالضبط أثنين من الثلاثة أطفال إناث ".

(ج) بفرض أننا عندما لاحظنا الأسرة المختارة فى تجربتنا العشوائية كان اهتمامنا بعدد الأطفال الذكور . ما هي نقاط العينة لهذه التجربة ؟ ما هي المعلومات التي سوف نفقدها إذا اعتمدنا على عدد الأطفال الذكور فقط .

-١١- أي من أزواج الأحداث التالية A , B متنافية ؟

(أ) A الحادثة " الابن محامى " و B الحادثة " مولود فى القاهرة "

(ب) A الحادثة " العمر تحت 18 سنة " و B الحادثة " يصوت فى الانتخابات ".

(ج) A الحادثة " يملك سيارة مرسيدس " و B " الحادثة يملك سيارة فورد " .

-١٢- اختيرت عشوائيا أسرة تمتلك سيارتين إحداهما قديمة والأخرى حديثة وقد وتم سؤالها ، لكل من السيارتين ،عن الجهة التي صنعت كل سيارة (أمريكا – أوربا – أسيا) .

(أ) ما هي النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية ؟

(ب) ما هي النتائج الممكنة للحادثة " سيارة مصنعة في أمريكا و الأخرى في أوربا " ؟

(ج)أوجد النتائج الممكنة للحادثة " على الأقل واحدة من السيارتين مصنعة في أوربا وآسيا " و أوجد المكمل لهذه الحادثة وهل كل حادثة من الحادثتين تمثل حادثة بسيطة ؟

-١٣- فى عينة عشوائية من اربع أسر تم تصنيفهم من ناحية الدخل إلي F دخل ثابت و V دخل متغير

(أ)ما هي النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

(ب)عرف الحادثة "بالضبط 3 اسر دخلهم ثابت " ؟

(ج)عرف الحادثة " على الأكثر أسرة واحدة دخلها ثابت " ؟

(د)عرف الحادثة " أن كل الأسر من نفس النوع " ؟

(ز)ما هو الاتحاد والتقاطع للحادثتين فى (ج) و (د) .

(و)ما هو الاتحاد والتقاطع للحادثتين فى (ب) و (د) .

-١٤- فى اختبار للطعم test panel اشترك فيه أربعة أشخاص حيث أعطى لكل منهم ثلاثة وحدات منتجه متماثلة فى الشكل ولكن أثنين منهم لهم طعم خاص والمطلوب من كل شخص من الأربعة أن يتذوق الوحدات الثلاث ويتعرف على الوحدة التي طعمها مختلف ، المنتجة في الماضي ، عن الوحدتين الآخرتين . عرف الأحداث الأتية :

(أ) فضاء العينة S للذين ينجحون فى التعرف على الوحدة المنتجه فى الماضى .

(ب) الحادثة " ثلاثة ينجحون فى التعرف على الوحدة المنتجة فى الماضي " ؟

(ج) الحادثة B " ثلاثة على الأقل " .

-١٥- تنتج ماكينة كرات مطاطة حمراء أو سوداء أو خضراء . إذا اختيرت كرة عشوائيا

(أ) عرف فضاء العينة لهذه التجربة العشوائية .

(ب) إذا كانت R الحادثة "حمراء " أوجد نقاط العينة فى R^c.

(ج) إذا كانت G الحادثة " خضراء " ما هو $R \cap G$ ؟

-١٦- تتكون تجربه من سحب كرة مطاطة من ماكينة صناعة الكرات المطاطة وذلك حتى الحصول على كرة حمراء. أوصف فضاء العينة لهذه التجربة العشوائية .

-١٧- فى تجربة عشوائية لاختبار بطارية سيارة عشوائيا وتسجيل زمن الفشل . أعطى فضاء العينة لهذه التجربة .

-١٨- يتم تغذية الحاسب الآلي الخاص بتشخيص مرضى ما ، بالتاريخ المرضى وقائمة بالأعراض المرضية لأي مريض فى مستشفى ما وفى نفس الوقت يقوم فريق من الأطباء بتشخيص المرضي . لكل مريض إذا أتفق تشخيص الحاسب مع فريق الأطباء يسجل للمريض A وغير ذلك يسجل D . يعطى الجدول التالي نتائج 80 مريضا .

A A A D A A A A A D A A A A A A A A D D A
A A A A A A A A A D A A A A A A A A A A A D
A A A A D A A D A A A A A A A D A A A A A
A A A A A A D A A A A A A D A A A D A A A

إذا كان اهتمامنا بالحادثة A أوجد التكرار النسبي لهذه الحادثة الناتجة من المحاولات التى عددها 80 وضعه فى جدول ومثله بيانيا . ما هي القيمة التقريبية لـ P(A) التي تقترحها ؟

-١٩- فى تجربة لاختبار سحب عشوائيا تم تعريف الأحداث التالية :

A الحادثة " السحابة تختفى قبل نزول المطر ".

B الحادثة " السحابة تنتج المطر فى مكان آخر غير مكان ملاحظتها من قبل المرصد " .

C الحادثة "السحابة أنتجت المطر في المكان الذي تم ملاحظتها فيه من قبل المرصد ".

الجدول التالي يعطى نتيجة اختيار 100 سحابة عشوائيا .

AAAABBCBABCACCBBAABC
BAAAABAAACAABCABCAAB
ABBABA ACCACAAABBBAAA
CCABAAABCCCAAAABAAAB
CBAABABABBCABBABACAB

بفرض اهتمامنا بالحادثة B أوجد التكرار النسبي لهذه الحادثة والناتجة من المحاولات (التى عددها 100) وضعه فى جدول ومثله بيانيا . ما هي القيمة التقريبية لـ P(A) التي تقترحها .

-٢٠- أجري بحث فى كلية ما عن عادة التدخين عند الذكور البالغين وجد أن 50% منهم يدخنون السيجارة و 35% منهم يدخنون البايب و 30% يدخنون كلا من السيجارة والبايب . أي من الجمل التالية صائبة ؟ أشرح لماذا .

(أ) 45% من الذكور البالغين لا يدخنون سيجارة ولا بايب ؟

(ب) 25% من الذكور البالغين يدخنون بالضبط إما سيجارة أو بايب ؟

-٢١- إذا كان A , B حادثتين ، اثبت أن :

(أ) $P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B)$

(ب) $P(A\cup B) = 1 - P(A^c\cap B^c)$

-٢٢- اختيرت أسرة عشوائيا تمتلك سيارتين . فإذا كانت A_1 الحادثة " السيارة القديمة أمريكية الصنع " و A_2 الحادثة " السيارة الجديدة أمريكية الصنع " وإذا كانت $P(A_1) = .7$, $P(A_2) = .5$, $P(A_1\cap A_2) = .4$ أحسب الاحتمالات التالية :

(أ) الاحتمال على الأقل سيارة أمريكية ؟

(ب) الاحتمال أن واحدة من السيارتين أمريكيتين ؟

(ج) ولا واحدة من السيارتين أمريكية الصنع ؟

-٢٣- يقوم حاسب آلي بإعطاء القرار في ثلاثة مشروعات وإذا تم تعريف الحوادث { لا يدعم المشروع $A_i = \{i$ حيث $i = 1,2,3$ وبفرض أن :

$P(A_1) = .22$, $P(A_2) = .25$, $P(A_3) = .28$ و

$P(A_2 \cap A_3) = .07$ و $P(A_1 \cap A_3) = .05$, $P(A_1 \cap A_2) = .11$

و $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = .01$ أحسب الاحتمالات للأحداث الآتية :

(أ) $A_1 \cup A_2$, $A_1^c \cap A_2^c$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ و

$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$, $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$, $(A_1^c \cap A_2^c) \cup A_3$

٢٤- تقوم شركة كبري بالعمل فى مشروعين . بفرض A الحادثة أن المشروع الأول يكمل فى الميعاد و B الحادثة أن المشروع الثاني يكمل فى الميعاد وإذا كان $P(A \cap B) = .5$, $P(A \cup B) = .9$ ما هو الاحتمال أن بالضبط واحد من المشروعين يكمل من قبل الشركة فى الميعاد المحدد .

٢٥- إذا كانت $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

أوجد الاحتمالات التالية :

(أ) $P(B^c)$ (ب) $P(A \cup B^c)$ (ج) $P(A^c \cap B)$

(د) $P(A^c \cup B^c)$

٢٦- إذا كانت $P(B) = \frac{1}{8}$, $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$ أوجد :

(أ) $P(A \cup B)$

(ب) $P(A \cup B)^c$

٢٧- تمتلك أسرة تليفزيونين واحد ملون والآخر بدون ألوان . إذا كان A الحادثة أن الجهاز الملون مفتوح . و B الحادثة أن الجهاز الذي بدون ألوان مفتوح وإذا كان $P(A)=.4$, $P(B)=.3$ و $P(A \cup B) = .5$ أوجد الاحتمال للأحداث الآتية :

(أ)الاثنين مفتوحين .

(ب)الملون مفتوح والآخر مغلق .

(ج)على الأقل واحد من الاثنين مفتوحان .

(د)ولا واحد مفتوح .

-٢٨- اختير شخص عشوائيا من مكتبة عامة فإذا كان A الاحتمال أن يقرأ المجلة العلمية أ هو 4. واحتمال أن يقرأ المجلة العلمية ب هو 3. واحتمال على الأقل يقرأ واحدة من هذه المجلتين 5. ما هو الاحتمال :

(أ)يقرأ كلا المجلتين ؟

(ب)ولا واحدة من المجلتين تقرأ .

(ج)بالضبط واحدة تقرأ .

-٢٩- أجرى استطلاع للرأي على ثلاثة أنواع من السيارات A , B, C . فإذا كان 70% من المشترين يفضلون النوع A و 80% يفضلون النوع B و 75% يفضلون النوع C و 85% يفضلون النوع A أو B و 90% يفضلون النوع A أو C و 95% يفضلون النوع B , C و 98% يفضلون الأنواع A,B,C فإذا اختير مشتري جديد عشوائيا :

(أ) ما هو الاحتمال على الأقل يختار واحدة من هذه السيارات .

(ب) لا يختار أي من هذه السيارات ؟

(ج) يختار النوع C .

(د) يختار بالضبط واحدة من السيارات .

-٣٠- في مدينة ما عدد سكانها 100000 ، ثلاثة صحف A, B, C . نسبة الأشخاص الذين يقرأون الصحف هم :

A : 0.10	A, B : 0.08	A,B, C : 0.01
B : 0.30	A, C : 0.02	
C : 0.50	B, C : 0.04	

(أ) أوجد النسبة لعدد الأشخاص الذين يقرءون صحيفة واحدة .

(ب) كم عدد الأشخاص الذين يقرءون على الأقل جريدة .

(ج) إذا كان C , A صحيفتين يصدران في الصباح و B صحيفة تصدر في المساء فما هو عدد الأشخاص الذين على الأقل يقرأون صحيفة صباحية وأيضا صحيفة مسائية .

-٣١- بفرض أن B , A حادثتين مانعيتين حيث P(A) = 0.30 , P(B) = 0.4 أوجد :

(أ)احتمال أن كلا من A ; B تقع .

(ب)احتمال أن واحدة من الاثنين تقع .

(ج)احتمال أنه بالضبط واحدة من الحادثتين تقع .

(د)احتمال أن B تقع ولكن A لا تقع .

(و)احتمال أن B لا تقع أو A لا تقع .

-٣٢- فى دراسة تسويقية تخص عادة مشاهدة التليفزيون استهدفت الأخبار وبرامج الرياضة . بفرض أن 80% من طلاب الجامعات البالغين يشاهدون برنامج الأخبار ، 50% يشاهدون البرامج الرياضية ، 40% يشاهدون الأخبار والرياضة . من ناحية أخرى 65% من الطلبة فى المرحلة الثانوية و 55% يشاهدون البرامج الرياضية و 85% يشاهدون كل من الأخبار و الرياضة . أخيرا بفرض أن 35% من كل الطلبة فى المرحلة الجامعية :

(أ)ما هي نسبة الطلبة في المرحلة الجامعية الذين لا يشاهدون الأخبار ولا يشاهدون الرياضة ؟

(ب)ما هي نسبة كل الطلبة الذين لا يشاهدون الأخبار ولا يشاهدون الرياضة ؟

(ج)ما هي نسبة الطلبة فى المرحلة الثانوية الذين يشاهدون الرياضة ولا يشاهدون الأخبار ؟

(د)ما هي نسبة كل الطلاب الذين يشاهدون الرياضة ولكن لا يشاهدون الأخبار ؟

-٣٣- ألقيت عملة متزنة أربع مرات . أوجد فضاء العينة لهذه التجربة العشوائية وأحسب الاحتمالات لكل من الأحداث التالية :

(أ) بالضبط ثلاثة صور ؟

(ب) على الأقل صورة ؟

(ج)عدد الصور يساوى عدد الكتابة ؟

(د) عدد الصور يزيد عن عدد الكتابة ؟

-٣٤- يمتلك طالب صندوق به 25 قرص مرن منهم 15 لونهم أسود (B) والباقي ألوان أخرى (M) ما هو الاحتمال أنه على الأقل أثنين لابد أن يختارون حتى نحصل على واحد أسود .

-٣٥- فى تجربة إلقاء زهرة نرد . عرف نقاط العينة فى الحوادث :

(أ)A : ملاحظة 4   (ب) B : ملاحظة رقم زوجى

(ج)C : ملاحظة رقم أقل من 3   (د) D : ملاحظة أما A أو B

(هـ) E : ملاحظة كل من A , C .

أحسب احتمالات الأحداث D , E , A وذلك بجمع الاحتمالات لنقـــاط العينـــة المناسبة .

٣٦- فى مركز تجاري لبيع أجهزة الفيديو يوجد نوعين من الفيديـو Q , M . لكـل جهاز أما رأسين أو أربعة رؤوس والجدول التالي يعطي النسبة المئوية للمشتريات لكل نوع والمعطى من قبل المركز .

النوع	عدد الرؤوس	
	2	4
M	25%	16%
Q	32%	27%

بفرض أن مشتري جديد اختير عشوائيا وتم تسجيل نوع الفيديو الذي اشتراه وعـدد الرؤوس :

(أ) ما هي الأحداث البسيطة الأربعة .

(ب) ما هو الاحتمال أن المشتري أشتري النوع Q وله رأسين .

(ج) ما هو الاحتمال أن المشترى أشترى النوع M .

٣٧- تقدم شركة للتأمين أربعة أنواع من بوليصة التأمين على المنازل M, N, L, H وثلاثة أنواع من بواليص التأمين على السيارات . الجدول التالي يعطـــي النســب المختلفة للأنواع المختلفة من بواليص التأمين والمعطاة من قبل شركة التـــأمين .

بفرض أن شخص يشترك فى النوعين من بواليص التأمين اختير عشوائيا:

(أ) ما هو الاحتمال أن الشخص له النوع M علـــى الســيارة والنــوع H علـــى المنزل؟

(ب) ما هو الاحتمال أن الشخص له النوع L على السيارة .

السيارة	المنزل المملوك			
	N	L	M	H
L	.04	.06	.05	.03
M	.07	.10	.2	.10
H	.02	.03	.15	.15

٣٨- اختيرت ثلاث نقط a, b, c بطريقة عشوائية على محيط دائرة أوجد الاحتمـــال P أن النقط تقع على نصف محيط الدائرة ؟

٣٩- يقدم مطعم 5 أصناف من اللحم 3 أصناف من الحساء و 4 أصناف من السلطة و 6 أصناف من العصير . كم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها إذا علم أن الوجبة الواحدة تتكون من لحم وحساء وسلطة وعصير ؟

٤٠- بفرض عدم السماح بالتكرار أحسب : كم عددا مكونا من ثلاثة أرقام يمكن تركيبة من الأرقام التالية :

(أ) 3, 4, 5, 9, 8 (ج) 3, 4, 5, 5, 9

(ب) 0, 4, 5, 8, 9 (د) 1, 4, 2, 5, 6

٤١- تتكون أسرة من ثلاثة أشخاص A , B, C يشتركون في مركز طبي يحتوي على الأقسام 3 ,1, 2 حيث يخصص طبيب لكل قسم . خلال أسبوع ما ، كل عضو في الأسرة يزور المركز مرة ويعين له عشوائيا القسم الذي يفحص فيه . تتكون تجربة عشوائية من تسجيل رقم القسم لكل شخص .واحد من النتائج سوف يكون { 1 ,2 ,1 } وذلك يعني أن الشخص A عين له القسم 1 والشخص 2 عين له القسم 2 والشخص C عين له القسم .

(أ)ما هي النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية ؟

(ب)ما هي النتائج للحادثة " كل أفراد الأسرة يذهبون إلي نفس القسم " ؟

(ج)ما هي النتائج الممكنة للحادثة " كل فرد يذهب إلي قسم مختلف عن الآخر" ؟

٤٢- قام ثلاثة أزواج (زوج وزوجة) بشراء ثلاثة تذاكر لحضور عرض مسرحي وجلس الأزواج الثلاثة في صف من المقاعد عشوائيا. ما هو الاحتمال إن الزوج A (زوج وزوجته) تم جلوسهم في مقعدين على اليسار .

٤٣- يستقبل المشاهدون للتليفزيون في مدينة ما بدون كابل 7 قنوات مختلفة في المساء يوميا في الفترة من 30 : 5 إلى 30 :7 . ففي الفترة من 5:30 إلي 6:0 مساء يوميا . تعرض 3 قنوات الأخبار و من 6:00 إلي 6:30 تعرض 5 قنوات الأخبار ومن 6:30 إلي 7:00 تعرض 4 قنوات الأخبار ومن 7:00 إلي 7:30 تعرض قناتان للأخبار. إذا اختيرت متتابعة من المشاهدة تتكون من أربع فترات

(كل فترة بنصف ساعة) وذلك من 5:30 إلي 7:30 (أ) كم عدد المتتابعات ؟

.

(ب) إذا كانت متتابعة المشاهدة اختيرت عشوائيا من فئة كل المتتابعات الممكنة ما هو احتمال ان البرامج الأربعة المختارة كانت الأخبار ؟

٤٤- إذا تم ربط 3 جزئيات من النوع A مع 3 جزئيات من النوع B مع 3 جزئيات من نوع C و 3 جزئيات من النوع D فى سلسلة من الجزئيات . على سبيل المثال ABCDABCDABCD تعتبر واحد من نقاط العينة أيضا : BCDDAAABDBCC

(أ)كم عدد الطرق لترتيب هذه الجزئيات فى سلسلة ؟ وإذا كانت الجزئيات من نوع A يختلفون عن بعض A_1 , A_2 , A_3 وأيضا B's , C's , D's ما هي عدد الطرق المختلفة التي يمكن تكوينها فى هذه الحالة ؟

(ب)بفرض أن سلسلة من الجزئيات اختيرت عشوائيا ما هو الاحتمال أن توضع الجزئيات من نفس النوع بجوار بعضها ، على سبيل المثال واحدة من السلاسل سوف يكون BBBAAADDDCCC ؟

٤٥- يرغب أستاذ فى قسم الرياضيات بتحديد مواعيد مقابلة الطلبة الذين يدرس لهم مقرر رياضيات وكل طالب له ميعاد . فإذا كان عدد الطلبة 8 منهم 4 ذكور و 4 إناث وإذا كانت الترتيبات الممكنة لمواعيد المقابلة متساوية فى إمكانية الحدوث:

(أ)ما هو الاحتمال أنه على الأقل أنثي تأخذ ميعاد فى المواعيد الثلاثة الأولي ؟

(ب)ما هو الاحتمال أنه بعد أول 5 مقابلات سوف تكون المقابلات خاصة بالإناث

٤٦- فى تجربة لدراسة تأثير درجة الحرارة والضغط ونوع catalyst على النتائج فى تفاعل كيميائي وإذا كان هناك تحت الاعتبار ثلاثة مستويات لدرجة الحرارة و 4 مستويات للضغط و 5 مستويات مختلفة من الcatalyst إذا أجريت تجربة تشمل على مستوي واحد من درجة حرارة ومستوي واحد من الضغط ومستوى واحد من catalyst :

(أ)بكم طريقة يمكن إجراء هذه التجربة ؟

(ب)بفرض أن 5 تجارب مختلفة تم أجرائها فى اليوم الأول وإذا كان الخمس تجارب تم اختيارهم عشوائيا من كل التجارب الممكنة ، أي أن أي مجموعة من

خمس تجارب لها نفس الاحتمال فى الاختيار . ما هو الاحتمال أن المستويات المختلفة من catalyst ظهرت (واحدة فى كل تجربة) .

٤٧- فى اختبار للطعم أعطي متذوق ثلاث زجاجات من الكولا C, D, P وتم سؤاله عن طعم الثلاثة أنواع وقد تم تسجيل ترتيب التفضيل . بفرض أن نفس النوع من الكولا وضع فى الزجاجات الثلاثة .

(أ) ما هو فضاء العينة لهذه التجربة وما هو الاحتمال الذي يعين لكل واحدة .

(ب) ما هو الاحتمال أن C تكون فى الأول (الأكثر تفضيلا) .

(ج) ما هو الاحتمال أن C تكون فى الأول و D فى الأخر .

٤٨- إذا كان المرضي الذين يصلون إلي العيادة الخارجية فى مركز طبي يمكنهم أن يختاروا واحد من ثلاثة أقسام للخدمة . بفرض أن الأطباء يوزعون عشوائيا على الأقسام الثلاثة وأن المرضي ليس لديهم قسم مفضل ، فإذا وصل إلي المركز ثلاثة مرضي وتم ملاحظة اختيارهم لقسم الخدمة :

(أ)أوجد فضاء العينة لهذه التجربة

(ب)إذا كان A الحادثة " كل قسم يستقبل مريض " ما هي نقاط العينة فى A .

(ج)عين الاحتمالات لنقاط العينة فى A ثم أوجد P(A) .

٤٩- فى اختبار للطعم لثلاثة أنواع من الشاي A, B, C طلب من المتذوق أن يرتبهم حسب الأفضلية .

(أ)أوجد فضاء العينة لهذه التجربة .

(ب)إذا كان المتذوق لا يستطيع التمييز بين الأنواع المختلفة من ناحية الطعم عين الاحتمالات المناسبة لنقاط العينة فى S .

٥٠- إذا علم أن بيتهوفن كتب 9 سمفونيات Symphonies وأن موز أرت Mozart كتب 27 كون شرت Concert على البيانو . إذا رغبت محطة إذاعة في تقديم سمو فنية لبيتهوفن ثم كون شرت لموز أرت :

(أ)بكم طريقة يمكن أن يحدث هذا ؟

(ب)إذا رغبت قناة فى عرض يوميا ، مؤلف لبيتهوفن يليها مؤلف لمزار ثم لـ Soubrette (15) كم عدد السنوات اللازمة قبل إعادة نفس البرنامج ؟

٥١- فى مكتبة 5 نسخ من كتاب ما والنسخة 1, 2 طبعة أولي والنسخ 5 ,4 ,3 طبعة ثانية . اختير أثنين من النسخ عشوائيا (10 نتائج ممكنة) :

(أ) ما هو الاحتمال أن النسختين طبعة أولي .

(ب) ما هو الاحتمال أن النسختين طبعة ثانية .

(ج) ما هو الاحتمال أنه على الأقل واحدة طبعة أولي .

(د) ما هو الاحتمال أن النسخ المختارة طبعات مختلفة .

٥٢- يتكون اتحاد الطلبة فى كلية الهندسة من 5 طلاب واحد من كل تخصص (ميكانيكا – مدني – معادن – كهرباء – هندسة قوي) بكم طريقة يمكن اختيار الخمسة من مجموعة مكونة من 2 تخصص ميكانيكا و 2 مدنى و 3 معادن و 3 كهرباء و 4 هندسة قوى .

٥٣- تعرض وكالة للعقارات 10 منازل للبيع بسعر مناسب وإذا كان للمشترى الوقت فقط لزيارة ثلاثة منازل فقط .

(أ)بكم طريقة يمكن اختيار المنازل الثلاثة إذا أخذ الترتيب فى الاعتبار ؟

(ب)بكم طريقة يمكن اختيار المنازل الثلاثة إذا لم يؤخذ الترتيب فى الاعتبار ؟

٥٤- فى مصنع صغير يعمل 20 عامل فإذا كان :

(أ)المطلوب اختيار 3 عمال عشوائيا لوردية المساء فما عدد الطرق لاختيار 3 عمال لوردية المساء ؟

(ب)إذا تم أعطاء العمال الرتب 20,... ,2,3 , 1 حسب أفضليتهم فى العمل ما هي عدد الطرق التي يكون فى فريق العمل أفضل عامل ؟

(ج)إذا تم اختيار فريق للعمل عشوائيا لدورية المساء ما هو الاحتمال أن العامل المثالي لن يعمل فى هذا المساء ؟

٥٥- فى قسم الرياضيات فى كلية العلوم يوجد خمسة أعضاء محمد وأحمد وعلى وسيد ومصطفى ويراد اختيار اثنين منهم لامتحان طالب للدكتوراه وسوف يتم الاختيار بوضع 5 ورقات بها أسماؤهم فى وعاء ويختار الاثنين

(أ)ما هو الاحتمال أن محمد وأحمد يتم اختيارهم ؟

(ب)ما هو الاحتمال أنه على الأقل واحد من الاثنين يبدأ بحرف م ؟

٥٦- وعاء يحتوى على 5 كرات حمراء و 5 كرات سوداء قام الشخص A بسحب عينة عشوائية من الحجم $n = 2$ مع الإرجاع من الوعاء ثم أعاد الكرات إلى الوعاء . قام الشخص B بأخذ عينة عشوائية بدون إرجاع من الحجم $n = 2$ إذا كان E الحادثة " العينة تحتوي على كرة حمراء وكرة سوداء ". أوجد :

(أ) $P(E)$ للشخص A ؟

(ب) $P(E)$ للشخص B ؟

٥٧- قام شخص بدراسة تأثير عملية التسميد على نوع معين من النباتات فى حديقة منزله وذلك باختيار عينة عشوائية من الحجم $n = 2$ من النباتات بدون إرجاع وذلك من 50 نبات . بفرض أنه غير معلوم لدي الشخص أنه يوجد 3 نباتات من أل 50 نبات لم يزدهروا ولهم إصابات . أوجد

(أ)احتمال عدم إزهار أي نبات ؟

(ب)احتمال أن كل النباتات المختارة مزهرة ؟

(ج)احتمال بالضبط واحدة من النباتات المختارة مزهرة ؟

٥٨- يحتوي وعاء على 5 كرات زرقاء وثلاث كرات حمراء . قام طفل بسحب كرة ثم تلي ذلك سحب كرة أخرى بدون إرجاع . أحسب الاحتمالات التالية :

(أ) P (الكرتين لونهم أزرق) (ب) P (كرة زرقاء وكرة حمراء)

(ج) P (على الأقل كرة زرقاء) (د) P (الكرتين لونهما أحمر)

٥٩- فى المثال السابق بفرض أن الكرة الثالثة سحبت بدون إرجاع أوجد :

(أ) P (لا يوجد فى الوعاء كرة حمراء بعد السحبة الثالثة)

(ب) P (توجد كرة واحدة حمراء بعد السحبة الثالثة)

(ج) P (الكرة الحمراء و السحبة الثالثة)

٦٠- يشحن منتج معين فى عبوات سعة العبوة 10 . بفرض أن 50% من كل العبوات لا يحتوي على وحدات تالفة و 30% تحتوي على وحدة واحدة و 20% يحتوي على وحدتين تالفتين . اختيرت عبوة عشوائيا وتم اختبار وحدتين ، ما هو الاحتمال المرتبط بـ 0 ,1 ,2 وحدات تالفة إذا علم أن :

(أ)ولا وحدة تالفة ؟

(ب)واحدة من العبوتين تالفة ؟

-٦١- يحتوى وعاء على ثلاثة وحدات جيدة ووحدتين تـــالفين . إذا اختـــيرت وحـــدة عشوائية بواسطة الشخص A ثم اختير وحدة بواســـطة الشـــخص B . أحســـب الاحتمالات التالية :

(أ) (A جيدة) P

(ب) (A جيدة |B جيد) P

(ج) (A تالفة |B جيدة) P

(د) (A جيدة ∩B جيدة) P

(هـ) (B جيدة) P

(ز) (B جيدة |A جيدة) P

-٦٢- يوجد فى مكتبة جامعة خمس نسخ من كتاب ما. النســـخة 1 أو 2 طبعـــة أولـــي والباقي (الثلاثة) طبعة 5 ,4 ,3 طبعة ثانية يختار طالب فى هذه المكتبة الكتـــب فى ترتيب عشوائي ويتوقف عندما يجد كتاب طبعة ثانية . على سبيل المثال يمكـــن أن تكون 5 نقطة عينة أيضا 3 , 1 ,2 يمكن أن تكون نقطة عينة .

(أ)ما هي النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية ؟

(ب)إذا كان A الحادثة "بالضبط كتاب واحد يختار " ما هي النتائج فى A ؟

-٦٣- فى بحث ميداني للإجابة على السؤال " لماذا يشترى الناس " أجري بحـــث مـــن خلال قناة فضائية واتصالها بالمشاهدين وسؤالهم إذا كانوا يملكون تليفون من نـــوع A لحظة الاتصال أم لا وهل يستمعون إلى الإعلان عن نوع التليفـــون وقـــد تـــم الحصول على النتائج التالية :

النوع

		نعم	لا
يستمع إلى الإعلان	نعم	0.170	0.136
	لا	0.422	0.272

(أ) بفرض أن مشاهد اتصل يمتلك تليفون من نوع A ما هو احتمال أن يســـتمع إلي الإعلان .

(ب) بفرض أن مشاهد اتصل يستمع إلى الإعلان ما هو الاحتمـال أنـه يمتلك تليفون من نوع A .

-٦٤- وعاء يحتوي على 5 كرات حمراء وثلاثة سوداء ، بينما الوعاء B يحتوي على 3 كرات حمراء و 7 سوداء اختير وعاء عشوائياً واختيرت منه كرة عشوائياً :

(أ)أوجد احتمال أن الكرة المختارة حمراء ؟

(ب)إذا علم أن الكرة المختارة حمراء ما هو الاحتمال أنها مختارة من الوعاء B؟

-٦٥- يقوم أستاذ في الجامعة بتدريس مقرر رياضيات في المساء وآخر فـي الصبـاح فإذا كان A الحادثة " يعطي محاضرة رديئة في الصباح " و B الحادثة " يعطـي محاضرة رديئة فـي المسـاء " وإذا كـان $P(B)=.2$, $p(A\cap B)=.1$ و $P(A)=.3$ أحسب :

$$P(B|A),\ P(B^c|A)\ ,\ P(B|A^c)\ ,\ P(B^c|A^c)$$

-٦٦- إذا علم أن 70% من في البالون يختفي فيها الضوء والبالون فـي الجـو . وإذا كان 60% من البالونات التي يختفى بها الضوء فيها وحدة إسعاف . وأن 90% من البالونات التى لا يختفى بها الضوء ليس بها وحدة إسعاف . بفرض أن بـالون اختفى :

(أ)إذا علم أنه يحتوي على وحدة إسعاف ما هو الاحتمال أن الضوء لن يختفى ؟

(ب)إذا علم أنه لا يحتوي على وحدة إسعاف ما هو الاحتمـال أن الضـوء لـن يختفى .

-٦٧- في دراسة عن علاقة التعليم بالدخل تم تصنيف الأشخاص إلي " دخل عـالي " أو " دخل منخفض " باحتمال $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ على التوالي . نسبة الأشخاص فـي مجموعـة الدخل العالي والذين يعملون بشهادات عليا 75 % بينما نسـبة الأشـخاص فـي مجموعة الدخل المنخفض والذي يعملون بشهادات عليا هو% 36 ".

(أ)أوجد الاحتمال الشرطي أن شخص مختار عشوائياً سوف يكون من مجموعـة الدخل العالي إذا علم أنه يحمل شهادة عليا ؟

(ب)إذا علم أن الشخص يحمل شهادة عليا ما هو الاحتمال أنه من مجموع الدخل المنخفض ؟

-٦٨- فى بحث تعليمي يسير فأر فى مكان له ثلاثة أبواب واحد منهم الصحيح . إذا اختار الفأر الباب الصحيح يدخل خلية بها 4 أبواب 2 منهم الأبواب الصحيحة . وكل باب من الأبواب الصحيحة يؤدي إلي خلية بها 5 أبواب 2 منهم يؤدي إلي الخروج . فى كل خلية يفترض أن الفأر يخمن فى اختياره للباب استخدم الاحتمال الشرطي فى إيجاد الاحتمال أن الفأر سوف ينجح فى الخروج .

-٦٩- اختيرت حجارة عشوائياً من شاطئ بحيرة وتم تسجيل لون الحجر المختار (بني – أسود – أخضر) بالاعتماد على عينة من 1000 حجر تم دراستهم تم تعيين الاحتمالات التقريبية والمعطاة فى الجدول التالي :

الحادثة البسيطة	{ بني }	{ اسود }	{ أخضر }
الاحتمال	0.852	0.093	0.055

(أ)أوجد الاحتمال أن حجر اختير عشوائياً يكون لونه اسود أو بني ؟

(ب)أوجد الاحتمال الشرطي أن الحجر لونه بني إذا علم أن الحجر أما أسود أو بني – قارن بين الاحتمال الشرطي والاحتمال الغير شرطي أن الحجر بني ؟

-٧٠- اجري بحث عن عدد الفيضانات فى بلد ما فى فصل البلل فـإذا كانت نتائج التجربة ...,0, 1, 2 فيضان . الأحداث البسيطة {0} , {1} , {2} و.. الخ . الجدول التالي يعطي الاحتمالات المختلفة .

الحادثة البسيطة	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
الاحتمال	.2466	.3452	.2417	.1127	0.0395	0.0110	0.0033

الأحداث البسيطة المقابلة للفيضانات أكبر من 6 لها الاحتمال 0 . أوجد:

(أ)احتمال حدوث 2 أو أكثر فيضان فى فصل البلل ؟

(ب)الاحتمال الشرطي بوقوع 4 أو أكثر من الفيضان فى فصل البلل إذا علم بوقوع 2 فيضان ؟

-٧١- فى دراسة عن عدد الأطفال فى الأسرة تم الحصول على البيانات فـــي الجـدول التالي :

الحادثة البسيطة	{ 0 طفل }	{ 1 طفل }	{2 طفل}	{3 طفل }	{4 أو أكثر مـــن طفل }
الاحتمال	0.431	0.173	0.174	0.113	0.109

(أ)ما هو الاحتمال أن أسرة اختيرت عشوائية بها طفل أو أكثر من طفل ؟

(ب)إذا علم من أسرة مختارة عشوائيا أن لديها (1 أو اكثر) ما هـــو الاحتمـــال الشرطي أن لديها بالضبط طفل واحد ؟

-٧٢- فى بحث ميداني عن الشهادة التي يحملها أبناء وابائهم تم تعريف الأحداث التالية

S_1 الحادثة " يحمل شهادة الدكتوراه "

S_2 الحادثة " يحمل شهادة جامعية "

S_3 الحادثة " يحمل شهادة متوسطة "

إذا كـــانت الاحتمالات الشرطية للأبن كالتالي :

$P(S_1 \mid S_1$ الأب $) = 0.45$,

$P(S_2 \mid S_1$ الأب $) = 0.48$,

$P(S_3 \mid S_1$ الأب $) = 0.07$.

وبنفس الشكل :

$P(S_1 \mid S_2$ الأب $) = 0.05$, $P(S_1 \} S_3$ الأب $) = 0.01$,

$P(S_2 \mid S_2$ الأب $) = 0.70$, $P(S_2 \mid S_3$ الأب $) = 0.5$,

$P(S_3 \mid S_2$ الأب $) = 0.25$, $P(S_3 \mid S_3$ الأب $) = 0.49$,

إذا كـــانت الاحتمالات المختلفة للأب :

$P(S_1) = 0.5$, $P(S_2) = 0.4$, $P(S_3) = 0.1$

أوجد الاحتمالات التالية

(أ)الاحتمـــال الغـير شـرطي أن كـــلا الأب والابـــن يحمـــل الشـــهادة S_1(i) S_2(ii) S_3(iii) .

(ب)الاحتمال الشرطي أن الابن على الأقل يحمل شهادة مثل والـــدة إذا علـــم أن والدة يحمل الشهادة S_1(i) S_2(ii) ؟

٧٣- تم شحن نوع معين من السيارات إلي بلد ما .إذا كانت السيارات مصنفة حسب الأبواب HB , FD , TD وحسب جهاز نقل الحركة M . A . يعطي الجدول التالي البيانات من قبل الشركة :

	TD	FD	HB
A	.23	.27	.18
M	.08	.04	.11

اختير عميل عشوائيا سوف يشتري واحدة من هذه السيارات :

(أ)ما هو الاحتمال أن يشتري سيارة من نوع A ؟

(ب)إذا علم أن المشتري حصل على سيارة من نوع بها جهاز نقل الحركة FD ، ما هو الاحتمال أنها من نوع A ؟

(ج)إذا علم أن المشتري لم يشتري سيارة بها جهاز نقل الحركة من نوع HB ما هو الاحتمال أن السيارة من نوع M .

٧٤- فى دراسة اجتماعية على الأزواج تم تصنعيهم حسب الطبع الى جيد G وحاد B . الجدول التالي يعطي الاحتمالات المختلفة .

	الزوجة G	الزوجة B
G	.22	.24
الزوج B	.31	.23

(أ)ما هو الاحتمال أن الزوجة جيدة الطبع إذا علم أن زوجها جيد الطبع ؟

(ب)ما هو الاحتمال أن الزوج جيد الطبع إذا علم أن زوجته حادة الطبع

(ج)هل طباع الزوج والزوجة مستقلة عن بعضها ؟

٧٥- فى مركز لبيع إطارات السيارات بفرض أن A الحادثة " الإطارات المشتراة مصنوعة فى البلد a " و B الحادثة " المشترى يرغب فى شراء إطار من نوع b " . وبفرض أن $P(A)=.75$, $P(B \mid A)=.9$, $P(B \mid A^c)=.8$

أوجد $P(A \mid B), P(A \mid B^c), P(A^c \mid B), P(A^c \mid B^c)$.

-٧٦- فى اختبار من ثلاثة أجزاء ، إذا كان احتمال أن شخص ينجح فى الاختبار الأول ½ والاحتمال أن ينجح فى الاختبار الثاني إذا علم أنه نجح فى الجزء الأول هو ¾ بينما الاحتمال أن ينجح فى الجزء الثاني إذا علم أنه رسب فى الجزء الأول هو ¼ . واخيرا الاحتمال أن ينجح فى الجزء الثالث :

$\frac{1}{5}$ ، إذا علم أنه رسب فى الجزئيين السابقين ،

$\frac{2}{5}$، إذا علم أنه رسب فى الجزء الثاني ولكن نجح فى الجزء الأول ،

$\frac{3}{5}$، إذا علم أنه رسب فى الجزء الأول ونجح فى الجزء الثاني ،

$\frac{4}{3}$، إذا علم أنه نجح فى 2 , 1 .

(أ)ما هو الاحتمال أن شخص رسب فى الأجزاء الثلاثة ؟

(ب)ما هو الاحتمال أن شخص رسب فى الجزء الأول والثاني ونجح فى الجزء الثالث ؟

(ج)ما هو الاحتمال أن شخص رسب فى الجزء الأول والأخير ولكن نجح فى الجزء الثاني ؟

(د)ما هو الاحتمال أن شخص رسب فى الجزء الثاني والثالث ولكن نجح فى الجزء الأول ؟

(هـ)ما هو الاحتمال أن شخص نجح بالضبط فى جزء واحد ؟

-٧٧- يقوم مركز تجاري ببيع كاميرات الفيديو من الموديل العادي أو الموديل الممتاز . خلال السنة الماضية علم أن 40% من الكاميرات المباعة من الموديل العادي ومن هذه المجموعة وجد أن 30% منهم باع بضمان لمدة سنة بينما 50% من الموديل الممتاز يعطى لها ضمان لمدة سنة . إذا علم أن المشتري المختار عشوائيا حصل على ضمان ، ما هو الاحتمال أنه أشتري كاميرا من الموديل العادي ؟

-٧٨- وجد فى محطة بنزين أن 40% من العملاء يستخدمون بنزين من نوع A_1 (العادي) و 35% يستخدمون البنزين من النوع الممتاز A_2 و 25% يستخدمون البنزين من النوع A_3 (المنخفض الجودة). من المجموعة A_1 30% يملئون

التتك (الحادثة E) ومن المجموعة A_2 60% يملئون التتك بينما 50% من المجموعة A_3 يملئون التتك .

(أ)ما هو الاحتمال أن العميل التالي للمحطة المختار عشوائياً يطلب النوع A_2 ويملئ التتك $(A_2 \cap E)$.

(ب)ما هو الاحتمال أن العميل التالي يملئ التتك ؟

(ج)إذا علم أن العميل التالي يملئ التتك ما هو الاحتمال أن البنزين من نوع A_2 من نوع A_1 من نوع A_3 ؟

-٧٩- فى مصنع ثلاث ماكينات 3 ,2 ,1 تنتج على التوالي 50% و 30% و 20% من الإنتاج الكلي . نسبة الوحدات التالية : فى الماكينات الثلاث 2% , 3% , 5% على التوالي . اختيرت وحدة عشوائياً :

(أ)ما هو الاحتمال أن الوحدة تالفة ؟

(ب)إذا علم أن الوحدة المختارة تالفة ما هو الاحتمال أنها منتجة من المصنع 1 ؟

-٨٠- يظهر جهاز اكتشاف الكذب نتيجة موجبة (دلالة على الكذب) فى 10% من المرات إذا كان الشخص يقول الحقيقة و 95% من المرات عندما يكون الشخص كاذب . إذا اختير رجلين متهمين فى جريمة وواحد منهم المجرم :

(أ)ما هو الاحتمال أن جهاز كشف الكذب يعطي قراءة سالبة للمتهمين الاثنين ؟

(ب)ما هو الاحتمال أن جهاز كشف الكذب يعطي قراءة موجبة للمتهم المذنب وقراءة سالبة للمتهم البريء ؟

(ج)ما هو الاحتمال أن جهاز كشف الكذب أخطأ تماماً ، أي أنه أعطى قراءة موجبة للمتهم البريء وقراءة سالبة للمتهم المذنب ؟

-٨١- لأي نموذج احتمالي مما يأتي أثبت :

(أ) $P(E_1 \cap E_2^c | A) = P(E_1 | A) - P(A_1 \cap E_2 | A),$

$P(E_1 \cap E_2 | A) = P(E_1 | A)\ P(E_2 | E_1 \cap A).$

(ب) إذا كان $P(E_1 | A) = 0$ and $E_2 \subset E_1$ فهل هذا يعني أن $P(E_2 | A) = 0$.

(ج) إذا كان $P(E_1 \cap A) = P(E_2 \cap A) = \phi$ فهل هذا يعني أن :

$P(E_1 \cup E_2 | A) = P(E_1 | A) + P(E_2 | A)$.

٨٢- فى معمل للتحليل يوجد اختبار يجري بواسطة أخصائي لتقدير ما إذا كان الشخص مريض أو لا . إذا كانت نتيجة الاختبار موجبة (الحادثة T) فإن الشخص يفترض أن عنده المرض ، بينما إذا كان نتيجة الاختبار سالبة (الحادثة T^c) يفترض أن الشخص ليس عنده المرضى بفرض أن D الحادثة أن الشخص عنده المرض وبفرض أن :

$$P(T^c \mid D^c) = .95 \quad , P(T \mid D) = .9 \quad , P(D) = .1$$

(أ) أوجد $P(T)$ (ب) $P(T^c)$

(ج)إذا كان خطأ التشخيص يحدث عندما (i) نتيجة الاختبار سالبة والشخص عنده المرض أو (ii) نتيجة الاختبار موجبة والشخص ليس عنده المرض . ما هو الاحتمال أن الأخصائي سوف يخطأ فى التشخيص ؟

(د) أوجد $P(D \mid T)$, $P(D^c \mid T^c)$.

٨٣- إذا كان من المعروف فى شركة ما أن احتمال أن عامل يظل في العمل 10 سنوات أو أكثر هو 1/6 . فإذا عين رجل وأمراه فى هذه الشركة في يوم واحد :

(أ)ما هو الاحتمال أن الرجل سوف يظل فى الخدمة أقل من 10 سنوات ؟

(ب)ما هو الاحتمال أن كلا من الرجل والمرأة سوف يعملان فى الشركة أقل من 10 سنوات إذا كانت مدة الخدمة مستقلة لكل واحد من الاثنين ؟

(ج)ما هو الاحتمال أن واحد من الاثنين ، أو كلاهما ، سوف يعملان أكثر من 10 سنوات ؟

٨٤- إذا كان $P(A \cup B) = .6, P(A) = .4$:

(أ)لأي قيمة من $P(B)$ تكون A , B متنافيتين ؟

(ب)لأي قيمة من B تكون A , B مستقلين ؟

٨٥- A, B , C ثلاثة حوادث بحيث أن :

$$P(A) = 1/3 \quad , P(B) = ¼ \quad , P(C) = 1/5$$

أوجد $P(A \cup B \cup C)$ تحت الشروط التالية :

(أ) A, B , C متنافيتان ؟

(ب) A, B, C مستقلتان ؟

٨٦-يعطي الجدول التالي نسب فصائل الدم المختلفة فى مدينة ما (A, B, A B , O)

مجموعة الدم	A	B	AB	O
النسبة	.42	0.1	.03	.45

بفرض استقلال فصيلة دم الزوج عن الزوجة وبفرض اختيار (زوج و زوجة) عشوائياً وتم فحص فصيلة الدم .

(أ)ما هو الاحتمال أن الزوج له فصيلة A والزوجة لها فصيلة B ؟

(ب)ما هو الاحتمال أن واحد منهم له فصيلة A والآخر له فصيلة B ؟

(ج)ما هو الاحتمال أن كلا الزوجين لهما نفس فصيلة الدم ؟

٨٧- تقع صفة جنينيه في الفأر باحتمال 0.2. بفرض أن الفئران الثلاث تم اختيارهم من عدد كبير من الفئران الغير مرتبطة . ما هو الاحتمال أن الفئران الثلاثة يمتلكون الصفة الجينيه ؟

٨٨- تولد تجربة ما فضاء عينة يحتوى على 8 نقاط عينة $E_1 , E_2 , \ldots , E_8$ باحتمال $P(E_i) = 1/8$ حيث $i = 1,2,\ldots,8$. بفرض أن الحادثتين A , B معرفتان كما يلي :

$A : E_2 , E_4 , E_6 ,$
$B : E_3 , E_1 , E_5 , E_6 , E_7$

أوجد الآتي :

(أ) $P(A)$ (ب) $P(B)$ (ج) $P(A \cup B)$

(د) $P(A|B), P(A \cap B)$ (هـ) هل A , B متنافيتين ولماذا ؟

(و) هل A , B مستقلين ؟ ولماذا ؟

٨٩- يصوب هداف نحو هدف في يوم ما . إذا كان احتمال أن ينجح في التصويب نحو الهدف هو 7. إذا كان سوف يصوب مرتان أوجد احتمال :

(أ) يكسب على الأقل في مرة .

(ب) يكسب بالضبط فى مرة .

(ج) لا يكسب فى المرتين .

الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعاتها الاحتمالية

Discrete Random Variables And Their Probability Distributions

(٢-١) المتغيرات العشوائية Random Variables

تصنف فضاءات العينة التي نتعامل معها إلي قسمين :

(أ) وصفية descriptive

(ب) عددية numerical

من أمثلة النوع (أ) النواتج الممكنة لإلقاء عملتين والتي عددها أربعة. والنتائج الممكنة للترتيبات من الرتبة n (عددها $(365)^n$) لتواريخ الميلاد لعينة عشوائية حجمها n من الأشخاص . ومن أمثلة النوع (ب) فضاء العينة الذي يمثل عدد الصور التي تظهر عند إلقاء عملة ثلاث مرات أو مجموع النقاط على سطح نردين وذلك عند إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة. كثير من طرق التحليل الإحصائي تتطلب التعامل مع قيم رقمية مثل الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري ، لذلك سوف نناقش قاعدة والتي عن طريقها يمكن تمثيل العناصر a في فضاء العينة بأرقام x.

تعريف : اعتبر تجربة عشوائية بفضاء عينه S ، الدالة X ، والتي تعين لكل عنصر $a \in S$ عدد حقيقي واحد فقط $X(a) = x$ ، تسمي متغير عشوائي. فضاء X هو فئة الأعداد الحقيقية :

$$R = \{x | x = X(a), a \in S\}$$

إذا كانت عناصر الفئة S نفسها أعداد حقيقية ، في هذه الحالة يمكن كتابة $X(a) = a$ وعلى ذلك $S = R$.

مثال (٢-١) في عملية صناعية على إطارات السيارات يوضع كل زوج من الإطارات معاً. النتائج الممكنة لفحص كل زوج من الإطارات هو :

$$S = \{ D`D` , DD`, D`D, DD\}.$$

فإذا كان اهتمامنا بعدد الإطارات التالفة فإن :

$$X(D`D`) = 0 \quad , \quad X(D`D) = 1$$
$$X(DD`) = 1 \quad , \quad X(DD) = 2$$

وعلى ذلك فإن فضاء المتغير العشوائي X سوف يكون :

$$R = \{x | x = 0,1,2\}.$$

مثال (٢-٢) في المثال (١- ٢٤) والخاص بتجربة تعيين عدد أنابيب الغاز لمحطتين يمكننا تعريف المتغيرات X, Y , Z كالتالي :

X = العدد الكلي من الأنابيب التي تستخدم من قبل المحطتين .

Y = الفرق بين عدد الأنابيب التي تستخدم من قبل المحطتين .

Z = أكبر عدد من الأنابيب يستخدم من قبل المحطتين .

فإذا أجرينا هذه التجربة وتم الحصول على النتيجة (2, 3) فإن $X(2,3) = 2 + 3 = 5$ وعلى ذلك يمكن القول أن النتيجة الملاحظة للمتغير X هي $x = 5$. بنفس الشكل القيمة الملاحظة للمتغير العشوائي Y سوف تكون $y = 2-3 = -1$ والقيمة الملاحظة للمتغير العشوائي Z سوف تكون $z = \max(2,3) = 3$.

مثال (٢ – ٣) للمثال (١-٢٥) والخاص بتجربة البطاريات والتي تختبر على خط الإنتاج حتى الحصول على بطارية سليمة فإن فضاء العينة كان :

$$S = \{ F', FF', FFF', FFFF', \ldots \}$$

بفرض أن X متغيراً عشوائيا حيث X هو عدد البطاريات التي تختبر قبل انتهاء التجربة فإن $X(F') = 1, X(FF') = 2, X(FFF') = 3, \ldots$.

مثال (٢-٤) لكل فئة جزئية A من فضاء العينة S يمكننا تعريف المتغير العشوائي I_A والذي يسمي الدليل indicator للحادثة A ويعرف كالتالي :

$$I_A = 1 \qquad a \in A$$
$$I_A = 0 \qquad a \notin A.$$

عندما يأخذ الدليل للفئة A القيمة 1 فهذا يعنى أن الحادثة A وقعت ، أي أن نتيجة التجربة نقطة عينة في A حيث $a \in A$.

ليكن X متغيراً عشوائياً معرف على فضاء العينة S وإذا كان R هو فضاء X. وأكثر من ذلك ليكن B فئة جزئية من R أي أن $B \subset R$. وإذا كانت A فئة جزئية من S فإن P(A) قد تم تعريفه . الآن سوف يكون اهتمامنا بتعريف احتمال الحادثة B أي $P(X \in B)$. بفرض أن A فئة جزئية في S وبفرض أن B فئة جزئية من R بحيث أن $A = \{a | a \in S \text{ and } X(a) \in B\}$. وعلى ذلك $P(X \in B)$ تساوى P(A). أي أن $P(X \in B)$ تعيين لاحتمال الحادثة B والتي تعتبر فئة جزئية

من الفضاء R المرتبط بالمتغير العشوائي X . هذا التعيين يقدر بدالة الفئة الاحتماليـة P والمتغير العشوائي X وعادةً يرمز لهذه الدالة بالرمز $P_X(B)$ أي أن :

$$P[X \in B] = P_X(B) = P(A)$$

حيث $A = \{a |\ a \in S \text{ and } X(a) \in B\}$. وعلى ذلك يعتبر المتغير العشـوائي X دالة تنقل الاحتمال من فضاء العينة S إلي الفضاء R (فئة الأعداد الحقيقية) .

الدالة $P_X(B)$ تحقق الشروط من (١-١) إلي (١-٣) لدالة الفئة الاحتماليـة . أي أن $P_X(B)$ أيضا دالة فئة احتمالية. للمسلمات في (١-١) و (١-٢) يكون من السهل إثبـات أن :

$$P_X(B) = P(A) \geq 0,$$

وتتطلب الفئة :

$$S = \{a |\ a \in S \text{ and } X(a) \in R\}.$$

أن :

$$P_X(R) = P(S) = 1.$$

أما بالنسبة للمسلمة (١-٣) وبفرض أن B_1 , B_2 حادثتين متنافيتين وعلى ذلك :

$$P_X(B_1 \cup B_2) = P(A).$$

حيث الفئة $A = \{a |\ a \in S \text{ and } X(a) \in B_1 \cup B_2\}$ يمكن كتابتها على الشكل :

$$A = \{a |\ a \in S \text{ and } X(a) \in B_1\} \cup \{a |\ a \in S \text{ and } X(a) \in B_2\}.$$

وللاختصار ليكن $A = A_1 \cup A_2$ ولكن A_1 , A_2 فئتين (لابد) متنافيتين وذلك لأنــه لأي عنصـر خـاص a ، ليكـن a_i ينتمـي إلـي كـل مـن A_1 , A_2 فإن $X(a_i) \in B_2 , X(a_i) \in B_1$ أي إن نفس الرقم $X(a_i)$ ينتمي إلي كل من B_1 , B_2 وهذا تعارض لأن B_1 , B_2 فئتين متنافيتين تبعا لذلك :

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2).$$

من التعريف $P(A_1) = P_X(B_1) , P(A_2) = P_X(B_2)$ وعلى ذلك :

$$P_X(B_1 \cup B_2) = P_X(B_1) + P_X(B_2).$$

وعلى ذلك فإن كل من $P(A) , P_X(B)$ يمثلان دالة فئة احتمالية حيـث P دالـة الفئـة الاحتمالية المعرفة لكل الفئات الجزئية A من S بينما P_X معرفة لكل الفئات الجزئيـة B

من الفضاء R ، أي إن P_X تختلف عن P. بعض المؤلفين يحذف الدليل من P_X ويكـون من الواضح أن $P_X(B)$ تعنى احتمال B ، الفئة الجزئية مـــن R ، و P(A) تعنـــي احتمال A الفئة الجزئية من S. من الآن سوف نكتب $P_X(B) = P(B)$ للاختصار.

مثال (٢-٥) إذا ألقيت عملة مرتين وإذا كـــان اهتمامنـــا بالحادثـــة "عـــدد الصـــور الملاحظة " فضاء العينة سوف يكون :

{ حيث a هي $S = \{a \mid TT, HT, TH, HH$. ليكن $X(a) = 0$ إذا كـــانت $a = TT$ ، $X(a) = 1$ إذا كانت $a = TH$ أو $a = HT$ و $X(a) = 2$ إذا كـــانت $a = HH$ وعلى ذلك فضاء المتغير العشوائي X سوف يكون :

$$R = \{x \mid x = 0,1,2\}.$$

بفرض أن B فئة جزئية من الفضاء R حيث $B = \{x \mid x = 1\}$. الســـؤال الآن مـــا هـــو احتمال الحادثة B ؟ لأن $X(a) = 1$ فهذا يعني أن a إما أن تكون HT أو TH وعلـــى ذلك :

$$A = \{a \mid HT \text{ أو } TH \text{ هي } a \text{ حيث}\}.$$

وبالتـــالي $P(B) = P(X \in B) = P(A)$. وبمـــا أن $B = \{x \mid x = 1\}$ فـــإن $P(B) = P[X \in B]$ يمكن كتابتها بطريقة أبسط وذلك على الشكل $P(X=1)$. ليكن :

$A_1 = \{a \mid$ حيث a هي TT $\}$ و $A_2 = \{a \mid$ حيث a هي TH $\}$ و

$A_3 = \{a \mid$ حيث a هي HT $\}$ و $A_4 = \{a \mid$ حيث a هي HH $\}$.

تمثل فئات جزئية من S. بفرض أن دالة الفئة الاحتمالية P(A) تعين الاحتمال $\frac{1}{4}$ لكل فئة من الفئات A_i حيث $i = 1,2,3,4$. وعلى ذلك فإن $P(A_1) = \frac{1}{4}$ و $P(A_2 \cup A_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ و $P(A_4) = \frac{1}{4}$ ولان X تمثل عدد الصـــور التـــي تظهر عند إلقاء عمله مرتين وبما أن :

$P(A_1) = \frac{1}{4}$ فإن $P(X = 0) = \frac{1}{4}$

وبما أن $P(A_2 \cup A_3) = \frac{1}{2}$ فإن $P(X = 1) = \frac{1}{2}$

وبما أن $P(A_4) = \frac{1}{4}$ فإن $P(X = 2) = \frac{1}{4}$

والتي يمكن تلخيصها في الجدول التالي :

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

الجدول السابق يمثل توزيع الاحتمال على عناصر الفضاء R المرتبط بالمتغير العشوائي X.

مثال (٢-٦) إذا ألقيت عملة ثلاث مرات وإذا كان فضاء العينة هو :

$S = \{ HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT \}$.

يفرض أن X متغير عشوائي يعرف على كل نقطة عينة في الفضاء S عدد الصور التي تظهر . أي أن :

$X(HHH) = 3$ $X(THH) = 2$
$X(HHT) = 2$ $X(THT) = 1$
$X(HTH) = 2$ $X(TTH) = 1$
$X(HTT) = 1$ $X(TTT) = 0$

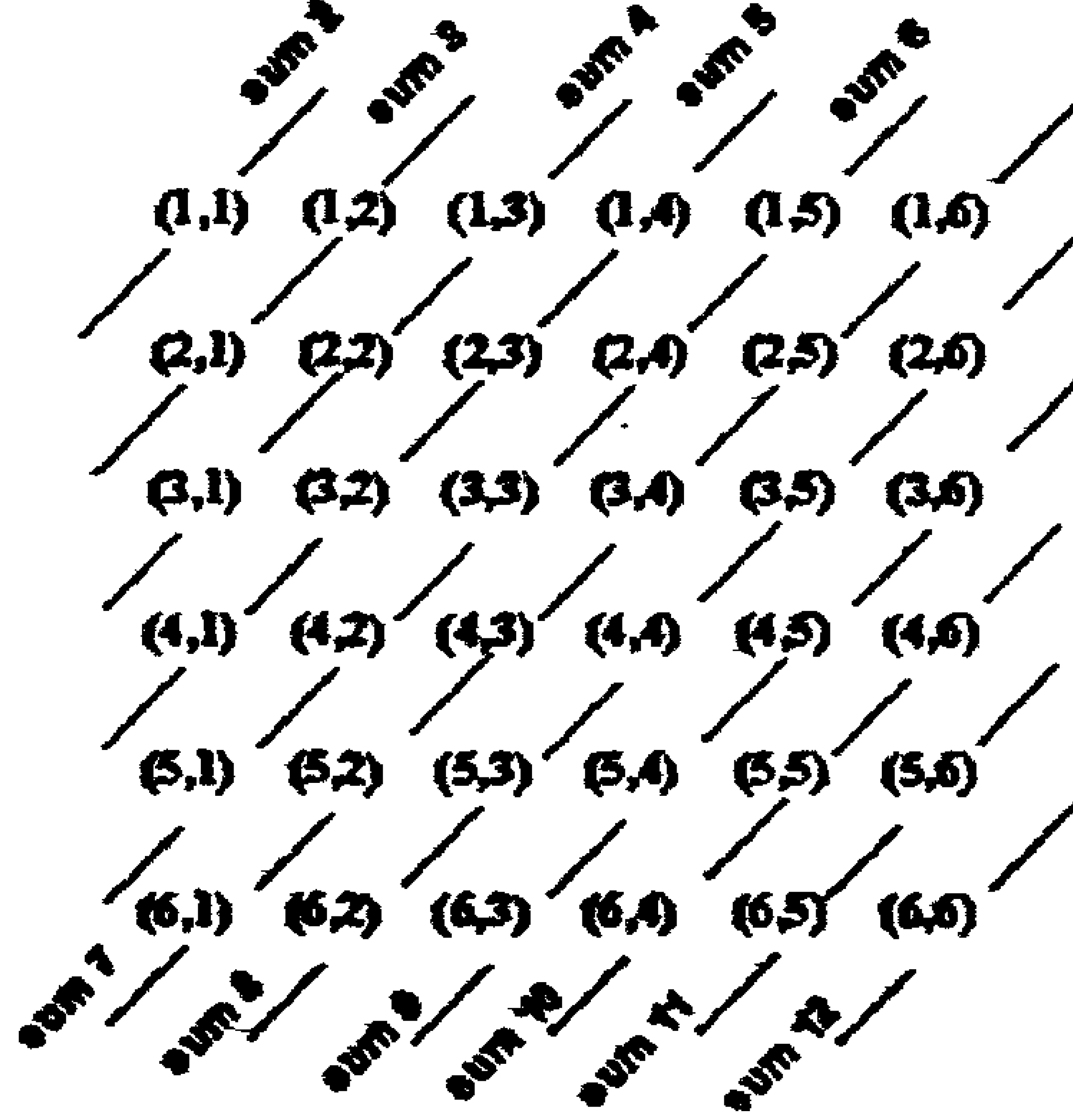
يعطي الجدول التالي الاحتمالات المختلفة لقيم المتغير العشوائي X

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مثال (٢-٧) في تجربة إلقاء زهرتي نرد وإذا كان فضاء العينة معرف كالتالي :

$S = \{ (a,b) | a,b = 1,2,3,4,5,6\}$.

سوف نعرف المتغير X كالتالي $X[(a , b)] = a + b$ أي أن X تمثل مجموع النقط التي تظهر على سطح النردين. لتقدير $P(X=x)$ لابد من حصر عدد العناصر في فضاء العينة $S = \{ (a,b) | a,b = 1,2,3,4,5,6\}$ والتي تنتمي إلي الحادثة $\{X = x\}$ إن مجموع النقط على النردين يساوى x . إذا تم وضع فضاء العينة S على شكل مصفوفة كما هو موضح في شكل (٢-١) فإن الفئات الجزئية في فضاء العينة التي تقابل القيم المختلفة لقيم المتغير العشوائي X ، الحادثة $\{X = x\}$ ، تظهر على طول الأقطار العكسية .



شكل (٢-١)

يعطى الجدول التالي الاحتمالات المختلفة لقيم المتغير العشوائي X .

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مثال (٢-٨) في المثال السابق وإذا كان اهتمامنا بالمتغير Y الذي يمثل عـــدد النقـــاط الأكبر على سطح النردين أي أن $Y = \max [(a, b)]$. يعطي الجدول التالي الاحتمالات المختلفة لقيم المتغير العشوائي Y .

y	1	2	3	4	5	6
P(Y=y)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

الأحداث المختلفة { Y = y } موضحة في شكل (٢ -٢)

1	2	3	4	5	6
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

y

شكل (٢-٢)

هذا ويمكننا وضع صيغة لحساب $P(Y=y)$ على الشكل

$$P(Y=y)=\frac{2y-1}{36}, y=1,2,\ldots,6.$$

مثال (٢-٩) أعطيت فزوره لثلاث أطفال وتم تسجيل فيما إذا كان كل واحد نجح في حل الفزورة خلال فترة من الزمن . حيث F' ترمز للنجاح و F ترمز للفشل . النواتج الممكنة الثانية لهذه التجربة هي :

$$a_1 = F'F'F',\ a_2 = F'FF',\ a_3 = F'F'F,\ a_4 = F'FF,$$
$$a_5 = FF'F',\ a_6 = FF'F,\ a_7 = FFF',\ a_8 = FFF.$$

على سبيل المثال ، الرمز $F'F'F$ يعنى أن الطفل الأول والثانى سوف ينجحان في حل الفزوره ، بينما سوف يفشل الطفل الثالث في حل الفزروة . بفرض أننا نهتم بعدد الأطفال الذين سوف ينجحون في حل الفزروة وعلى ذلك :

$X(a_1)=3$ $X(a_5)=2$

$X(a_2)=2$ $X(a_6)=1$

$X(a_3)=2$ $X(a_7)=1$

$X(a_4) = 1$ $\qquad$ $X(a_8) = 0$

حيث أن $x = 0, 1, 2, 3$ هي القيم المختلفة للمتغير العشوائي X . الاحتمالات المختلفة للأحداث البسيطة المعرفة على الفضاء S معطاة في الجدول التالي :

الحادثة البسيطة	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
الاحتمال	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

حيث أن $A_i = \{a_i\}$, $p_i = P(A_i)$ حيث $i = 1,2,...,8$. لإيجاد الاحتمالات التي تكون للأحداث $\{X = 0\}, \{X = 1\}, \{X = 2\}, \{X = 3\}$ فإن :

$$\{X = 0\} = \{a_8\},$$
$$\{X = 1\} = \{a_4, a_6, a_7\} = A_4 \cup A_6 \cup A_7,$$
$$\{X = 2\} = \{a_2, a_3, a_5\} = A_2 \cup A_3 \cup A_5,$$
$$\{X = 3\} = \{a_1\} = A_1.$$

وعلى ذلك فإن الاحتمالات المختلفة للأحداث البسيطة في فضاء المتغير العشوائي X معطاة في الجدول التالي :

الحادثة البسيطة	$\{X = 0\}$	$\{X = 1\}$	$\{X = 2\}$	$\{X = 3\}$
الاحتمال	p_8	$p_4 + p_6 + p_7$	$p_2 + p_3 + p_5$	p_1

على سبيل المثال إذا كان $p_1 = p_2 = ... = p_8 = \frac{1}{8}$ فإن الاحتمالات المختلفة للأحداث البسيطة في فضاء المتغير العشوائي X يمكن وضعها في الجدول التالي :

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

من الجدول السابق يمكن الحصول على احتمال الحادثة $\{X \geq 2\}$ أي طفلين أو اكثر ينجحون في حل الفزورة " :

$$P(X \geq 2) = P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

مثال (٢ – ١٠) في المثال السابق بفرض أننا نهتم بنسبة الأطفال Y الذين ينجحون في حل الفزورة . وعلى ذلك فإن $Y(a_1)=1, Y(a_2)=\frac{2}{3}$ وهكـذا. لإيجـاد الاحتمـالات للأحداث $\{Y=0\}, \{Y=\frac{1}{3}\}, \{Y=\frac{2}{3}\}$ للمتغير Y . أي أن $Y = X/3$ وعلى ذلك :

$$P(Y=0)=P(X=0),$$

$$p(Y=\frac{1}{3})=P(X=1)$$

وهكذا .

مثال (٢–١١) إذا ألقي زوج من النرد (المتزن) وكل نرد لـه أربعـة أوجـه مرقمـة بالأرقام 1, 2, 3, 4 . فإذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل أعلى رقم يظهر على النردين أي أن $X[(a,b)] = \max[(a,b)]$. فضاء العينة S وفضاء X موضحتيـن فـي شكل (٢–٣).

	1	2	3	4
A_1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
A_2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
A_3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
A_4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

S

شكل (٢–٣)

هذا ويمكننا وضع صيغة لحساب $P(X=x)$ على الشكل :

$$P(X=x)=\frac{2x-1}{16}, x=1,2,\ldots,4.$$

كل حادثة من الحوادث A_1, A_2, A_3, A_4 والمعرفة على الفضـاء S تحتـوي علـى الأزواج (a,b) والذي سوف يأخذ القيمة $\max(a,b)$ عليها. بمعنى آخر $x=1$ يعين

على الفئة A_1 و $x = 2$ يعين على الفئة A_2 و $x = 3$ يعين على الفئـــة A_3 و $x = 4$ يعين على الفئة A_4 . بفرض أن الفئة B معرفة علـــى فضــاء المتغــير العشــوائي X والمطلوب حساب $P[X \in B]$. بفرض أن B الحادثة " على الأكثر ثلاثة " أي 1, 2, 3 والتي يمكن كتابتها على شكل فترة $B = (-\infty, 3]$ وعلى ذلك فإن :

$$P[X \in B] = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} = \frac{9}{16}.$$

ويمكن كتابة $P[X \in B]$ على الشكل $P(X \le 3)$ وبنفس الشكل يمكن إثبات أن :

$$P(X \le 2) = P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$$

ولأن $(-\infty, 2]$ تحتوي على 1, 2 وليس 3 كما أن $(-\infty, 3] = (-\infty, 2] \cup (2, 3]$ وعلى ذلك :-

$$P(X = 3) = P(X \le 3) - P(X \le 2)$$
$$= \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

(٢-٢) دالة كثافة الاحتمال The Probability Density Function

بفرض أن X متغيراً عشوائياً بفضاء R وإذا كانت B فئة جزئية مـــن R. إذا علمنـــا كيف نحسب P(A) حيث $A \subset S$ ، فإنــــه يمكننـــا حســـاب $P(B) = P(X \in B)$ ، أي نعرف كيف يتوزع الإحتمال على الفئات المختلفة من R. عندما نتكلم عن توزيع المتغير العشوائي X فإننا نتكلم عن توزيع الاحتمال .

إذا كان X متغيراً عشوائياً بفضاء R في البعد الأول . وبفرض أن الفضاء R هو فئة النقاط بحيث يوجد على الأكثر عدد محدود من النقاط في R لكل فترة محددة. تســـمى الفئة R ، في هذه الحالة ، فئة النقاط المتقطعة. أي أن المتغير العشوائي X يأخذ فقط قيـــم منفصلة isolated . وعلى ذلك إذا حددنا القيم الممكنة على خط الأعداد الحقيقية فســـوف نجد ثغرات (فجوات) gaps بين القيم كما هو موضح في شكل (٢-٤) . بمعنى آخـــر

فإن الفضاء المتقطع قد يكون فئة من القيم المنتهية أو فئة من القيم الغير منتهيـــة القابلـــة للعدد . من أمثلة المتغيرات المتقطعة عدد الحوادث في الأسبوع في مدينـــة مـــا ، عـــدد الأطفال الذين يولدون لأسرة ، عدد النقاط التى تظهر على سطح نرد عند إلقاءه ، الدخـل لأسرة (مقرب لأقرب جنية) .جميع الأمثلة فـــي البنـــد (٢-١) لمتغـــيرات عشـــوائية متقطعة.



شكل (٢ -٤)

لتكن الدالة $f(x)$ بحيث أن $f(x) > 0$ و $x \in R$ و $\sum_{R} f(x)=1$ ، فإذا أمكن التعبير عـــن دالة الفئة الاحتمالية $P(B)$ ، $B \subset R$ ، كدالة في $f(x)$ كما يلي :

$$P(B)=P[X \in B]=\sum_{B} f(x).$$

فإن X يسمي متغيرا عشوائيا من النوع المتقطع ويقال أن المتغـــير العشـــوائي X لـــه توزيع من النوع المتقطع. تسمى $f(x)$ دالة كثافة احتمـــال probability density (p.d. f.) لمتغير عشوائي متقطع X . كثير من المؤلفين يطلقون أسم دالة الكتلـــة mass function على دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متقطع وذلك لأنه يمكن اعتبار بيـــان دالة كثافة الاحتمال كمجموعة من الكتل وكل كتلة تقع على نقطة من النقاط x_1 , x_2 , x_3 ,... على الخط الأفقي وعلى ذلك فإن الوزن للكتلة التي تقع على x_i يقابل احتمـــال أن X تساوى x_i. وعلى ذلك يمثل كبر هذا الوزن بطول الخط على x_i .

مثال (٢-١٢) إذا كان X متغيرا عشوائيا من النوع المتقطع بفضاء :

$$R=\{x|x=0,1,2,3,4\}$$

ليكن :

$$P(B)=\sum_{B} f(x)$$

حيث :

$$f(x)=\frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad , \quad x \in R$$

وكالعادة ($0!=1$). إذا كانت $B=\{x|x=0,1\}$ فإن :

$$\Pr(X\in B)=\frac{4!}{0!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{4!}{1!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}.$$

مثـال (٢-١٣) إذا كـان X متغيراً عشـوائياً مـن النـوع المتقطـع بفضـاء $R=\{x|x=1,2,3,..\}$ وإذا كان :

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad , \quad x \in R$$

وعلى ذلك :

$$P[X\in B]=\sum_{B} f(x).$$

إذا كانت :

$$B=\{x|x=1,\ 3,\ 5,\ 7,...\}$$

فـإن :

$$P[X\in B]=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^5+...=\frac{2}{3}.$$

يمكن تبسيط الصيغة السابقة للمتغير العشوائي X للمثال (٢-١٢) حيث يمكننا كتابـة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x)=\frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4,\ x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$
$$=\ 0\ \text{elsewhere}.$$

مثال (٢-١٤) شحنت 6 صناديق تحتوى على أجهزة إلكترونية. يعطى الجدول التـالي عدد الأجهزة التالفة في كل صندوق :

الصندوق	1	2	3	4	5	6
عدد الوحدات التالفة	0	2	0	1	2	0

اختار شخص عشوائيا صندوق لعميل ما. فإذا كان X يمثل عدد الأجهزة التالفة فـــإن X يأخذ القيم 0, 1, 2 وعلى ذلك :

$$f(0) = P(X=0) = P(\text{الصندوق } 1 \text{ أو } 3 \text{ أو } 6) = \frac{3}{6},$$

$$f(1) = P(X=1) = P(\text{الصندوق } 4) = \frac{1}{6},$$

$$f(2) = P(X=2) = P(\text{الصندوق } 2 \text{ أو } 5) = \frac{2}{6}.$$

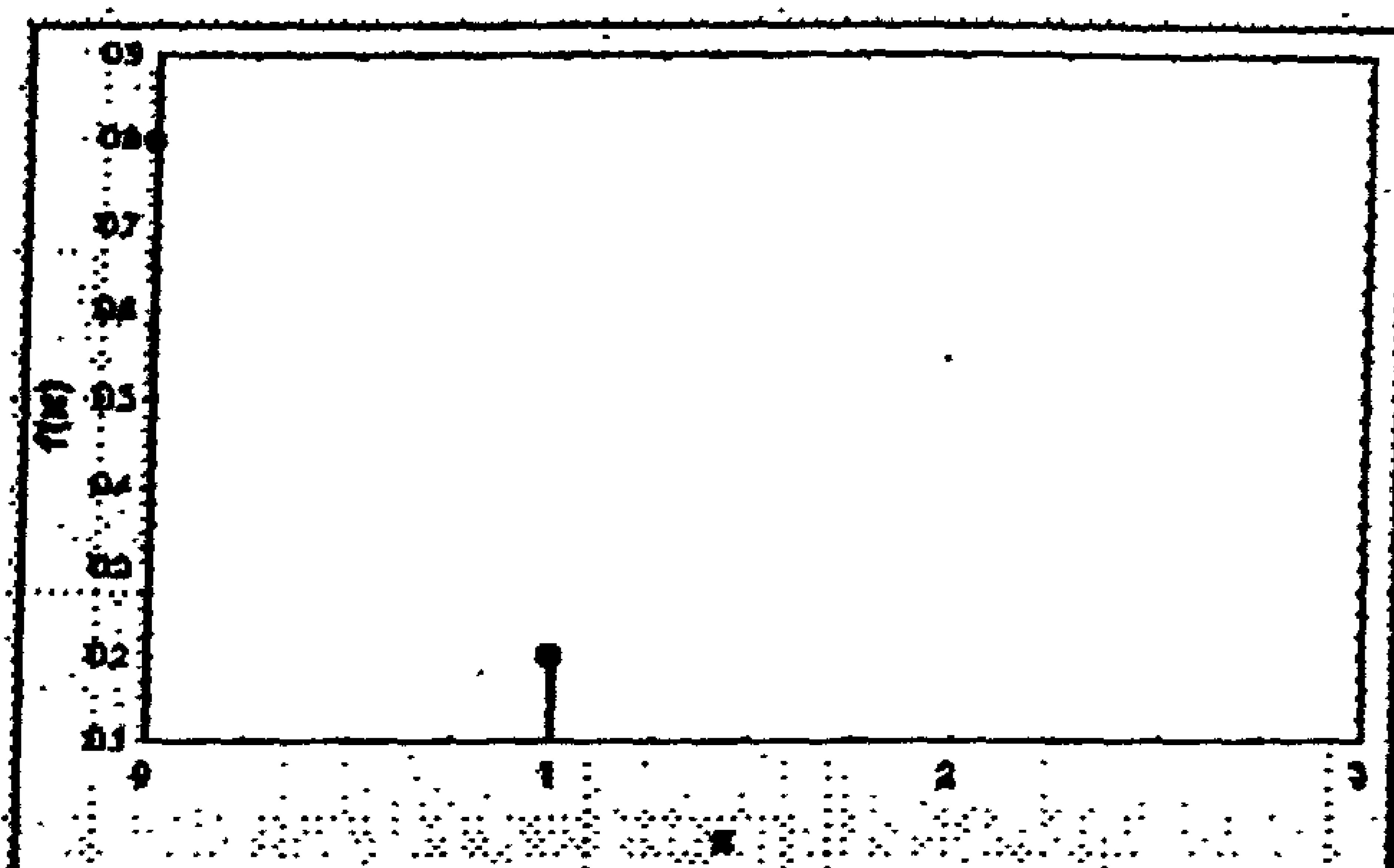
مثال (٢-١٥) قام باحث في مكتبة الجامعة في الأسبوع الأول من الدراســة بملاحظــة الطالب التالي وما إذا كان قد أشترى آلة حاسبة من نوع A أو من نــــوع B . ليكــن X متغيرا عشوائيا يأخذ القيمة 1 إذا أشترى الطالب النوع A ويأخذ القيمــة 0 إذا أشــترى الطالب النوع B . فإذا أشترى 20% من الطلبة الآلة من نوع A فإن p.d.f للمتغير X هي :

$$f(0) = P(X=0) = .8$$
$$f(1) = P(X=1) = .2$$
$$f(x) = 0 \text{ elsewhere}.$$

ويمكن وضع .p.d.f للمتغير العشوائي X على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} .8 & x=0 \\ .2 & x=1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

بيان الدالة f(x) موضح في شكل (٢-٥). ويلاحظ أن الخطين الرأسين المرسومين فوق قيمتي المتغير العشوائي على المحور الأفقي تتناسب مع احتمال هاتين القيمتين .



شكل (٢-٥)

في المثال السابق f(0) = .8 , f(1) = .2 لأن 20% من المشترين اختاروا الآلة الحاسبة من نوع A. في مكتبة أخرى يمكن أن تكون f(1) = .9 , f(0) = .1. عموما المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 أو 0 يسمى متغيرا عشوائيا يتبع برنولي Bernoulli إذا أمكن التعبير عن دالة كثافته الاحتمالية كالتالي :

$$f(x;p)=\begin{cases}1-p & x=0\\ p & x=1\\ 0 & \text{elsewhere.}\end{cases}$$

حيث $0 < p < 1$.

تعريف : بفرض أن f(x) تعتمد على كمية والتي يعين لها أي رقم من الأعداد الحقيقية ومع كل قيمة تقدر دالة كثافة احتمال مختلفة. مثل هذه الكمية تسمى المعلمة parameter للتوزيع. التجمع لكل التوزيعات الاحتمالية لقيم مختلفة من المعلمة تسمي عائلة من التوزيعات الاحتمالية family of probability distributions. فعلى سبيل المثال f (x ; 6) تختلف عن f (x ; 5).

مثال (٢-١٦) عند زمن محدد إذا تم ملاحظة الجنس لكل طفل حديث الولادة في مستشفي ما حتى ولادة طفل ذكر (b).

بفرض أن $p = P(\{b\})$ وبفرض أن (g) ترمز للحادثة أن الطفل أنثى وبفرض أن المحاولات مستقلة فإن :

$$f(1) = P(X=1) = P(\{b\}) = p,$$
$$f(2) = P(X=2) = P(\{g\,b\}) = P(\{g\})\,P(\{b\}) = (1-p)\,p,$$
$$f(3) = P(X=3) = P(\{ggb\}) = P(\{g\})\,P(\{g\})\,P(\{b\}) = (1-p)^2\,p.$$

وبالاستمرار على هذا المنوال فإنه يمكن الحصول على الصورة عامة لدالة كثافة الاحتمال كالتالي :

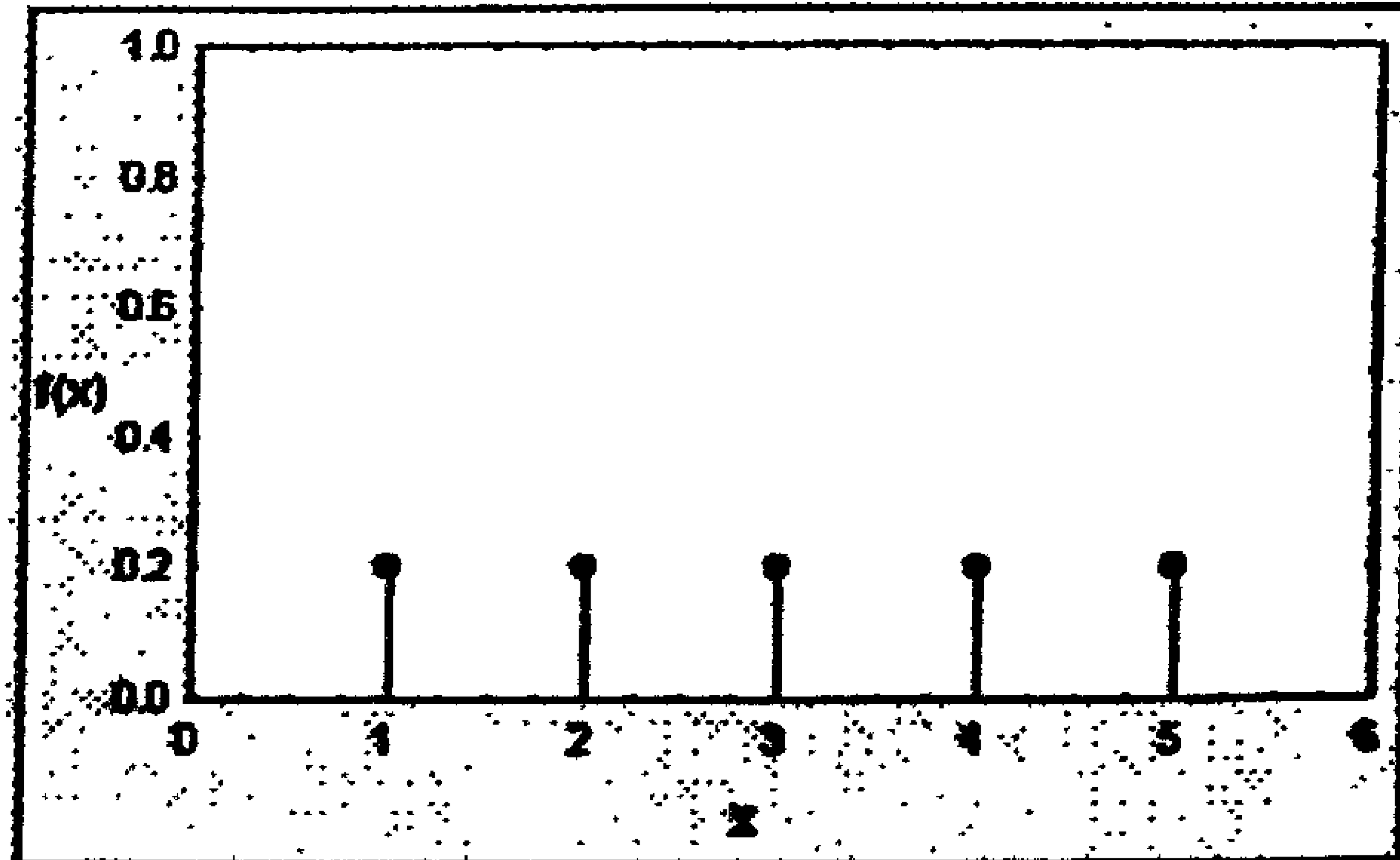
$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & x = 1,2,3,\ldots \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

الكمية p في الصيغة السابقة تمثل عدد ينحصر بين 0 , 1 . ويمثل معلمة لدالة كثافة الاحتمال .

مثال (٢-١٧) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة احتمال .p.d.f كالتالي :

$$f(x) = .2 \quad , \quad x = 1, 2, 3, 4, 5\,.$$

بيان $f(x)$ موضح في شكل (٢-٦) .



شكل (٢-٦)

يسمى التوزيع في هذه الحالة بالتوزيع المنتظم وذلك لأن الاحتمالات $(P(X=x) = .2)$ متساوية لجميع قيم المتغير العشوائي .

مثال (٢-١٨) اختيرت عينة عشوائية من الحجم 3 من وعاء يحتوى على 12 وحـــده منها 3 تالفة. إذا كان X يمثل عدد الوحدات التالفة في العينة . وعلى ذلـــك $x = 0, 1, 2,3$.

$$f(0) = P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{84}{220},$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{108}{220},$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{9}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{220},$$

$$f(3) = P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{9}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}$$

ويمكن وضع النتائج السابقة في جدول كالتالي:

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

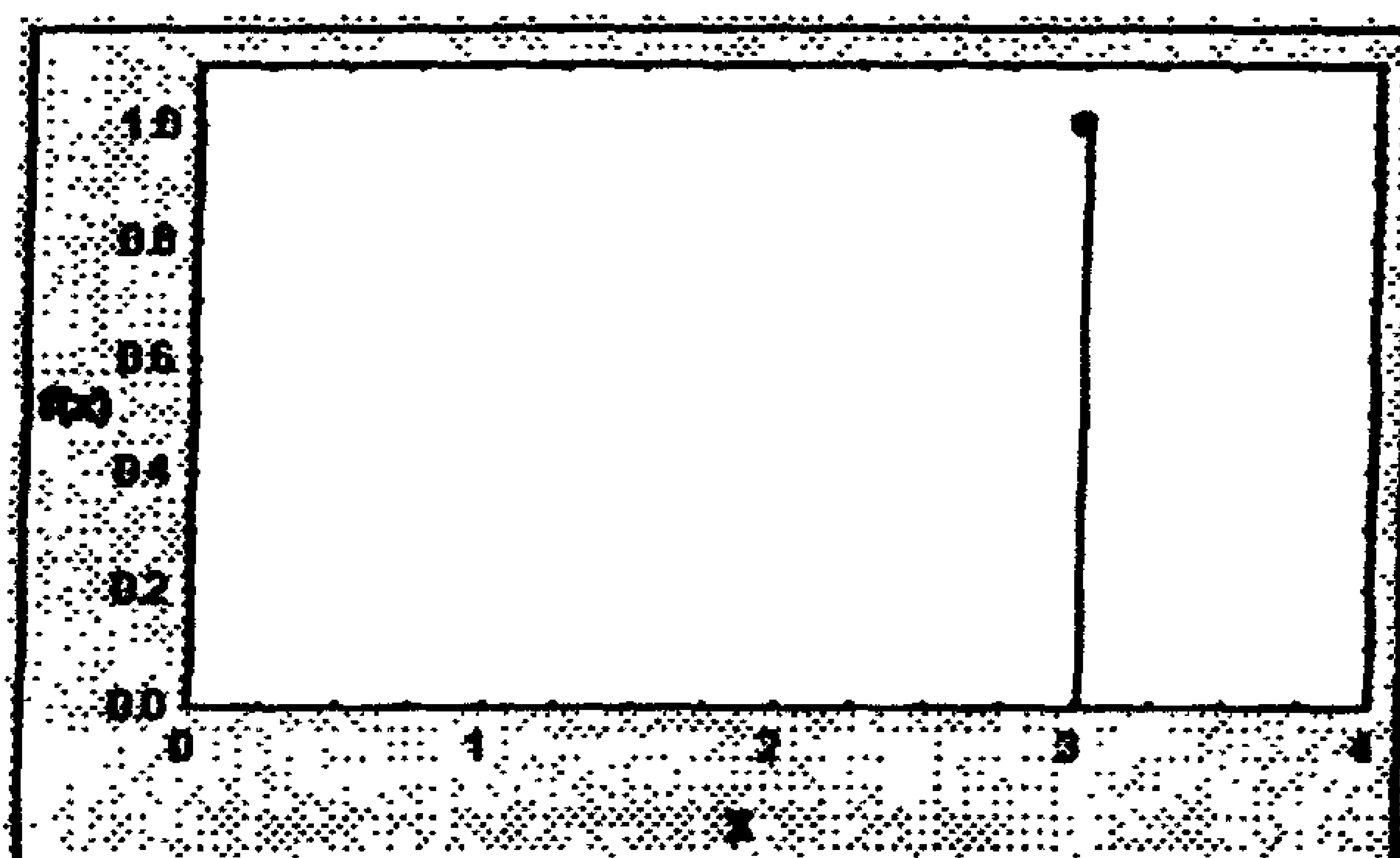
كما يمكن وضع صيغة لدالة كثافة الاحتمال للمتغير X كالتالي :

$$f(x)=P(X=x)=\frac{\binom{3}{x}\binom{9}{3-x}}{\binom{12}{3}}, x=0,1,2,3.$$

مثال (٢-١٩) إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x)=1 \quad , \quad x=x_1$$
$$=0 \quad \text{elsewhere.}$$

بيان f(x) موضح في شكل (٢-٧) عندما x = 3 .



شكل (٢-٧)

يسمى التوزيع الذي يأخذ قيمة واحدة بالتوزيع الخامل degenerated distribution .

مثال (٢-٢٠) إذا ألقي زوج من النرد (المتزن) وكل نرد لــه 12 وجــه وإذا كــانت الوجوه مرقمة بالأرقام الصحيحة من 1 إلي 12 . وبفرض أن X متغير عشوائي يمثــل أعلى رقم يظهر على النردين . وعلى ذلك X سوف يأخذ القيم 1, 2, 3, ...,12 .دالــة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X سوف تكون :

$$f(x)=c\,(2x-1) \quad x=1, 2, \dots,12$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

حيث (2x − 1) هى عدد الطرق لوقوع أي قيمة x . للحصول علـــى الثـــابت c نتبـــع الآتي:

$$1=\sum_{x=1}^{12} f(x)=c\sum_{x=1}^{12}(2x-1)=c\left[2\sum_{x=1}^{12}x-12\right]$$

$$=c\left[\frac{2(12)(13)}{2}-12\right]=c(12)^2$$

وعلى ذلك :

$$c=1/(12)^2=1/144.$$

(٢-٣) دالة التوزيع The Distribution Function

بفرض أن X متغيرا عشوائيا من النوع المتقطع له دالة فئة إحتماليه P(B) حيث B فئة في البعد الأول. وإذا كان x عدد حقيقي وكانت B فئة من ∞− إلي x حيث تشـتمل على النقطة x . لمثل هذه الفئات B فإن :

$$P(B)=P[X\in B]=P(X\le x).$$

حيث يعتمد الاحتمال على النقطة x ، أي أن هذا الاحتمال دالة في النقطة x . يرمز لدالـة النقطة هذه بالرمز $F(x)=P(X\le x)$. تسمى الدالة F(x) دالـــة التوزيـــع (دالـــة التوزيع التجميعي cumulative distribution function) للمتغـــير العشـــوائي X.

وبما أن $F(x)=P(X\le x)$ فإن ، حيث f(x) دالة كثافة الاحتمال ، :

$$F(x)=\sum_{w\le x} f(w)$$

مثال (٢-٢١) إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال :

x	1	2	3	4
P(X = x)	.4	.3	.2	.1

أوجد F(x) ومثلها بيانيا .

الحل :

$$F(1)=P(X\le 1)=P(X=1)=f(1)=.4,$$

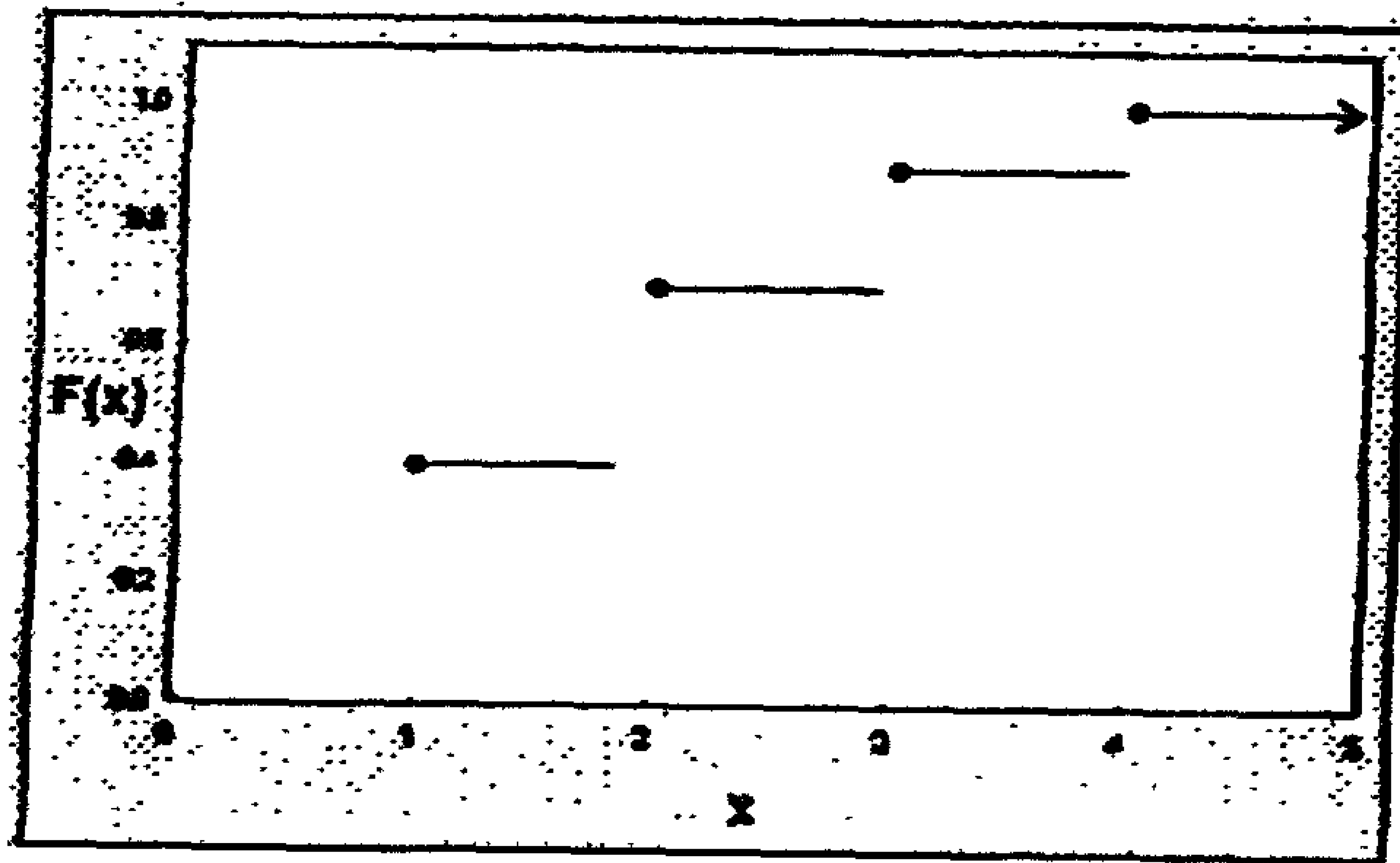
$$F(2)=P(X\le 2)=P(X=1 \text{ or } 2)$$
$$=f(1)+f(2)=.7,$$

$$F(3) = P(X \le 3) = P(X = 1 \text{ or } 2 \text{ or } 3)$$
$$= f(1) + f(2) + f(3) = .9,$$
$$F(4) = P(X \le 4) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$$
$$= 1,$$

وعلى ذلك :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ .4 & 1 \le x < 2 \\ .7 & 2 \le x < 3 \\ .9 & 3 \le x < 4 \\ 1 & 4 \le x. \end{cases}$$

بيان F(x) موضح في شكل (٢-٨)



شكل (٢-٨)

مثال (٢-٢٢) إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \begin{cases} .5 & x = 0 \\ .167 & x = 1 \\ .333 & x = 2 \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

أوجد F(x) .

الحل : دالة التوزيع للمتغير X هي :

$$F(x)= \begin{cases} 0 & x<0 \\ .5 & 0\le x<1 \\ .667 & 1\le x<2 \\ 1 & 2\le x. \end{cases}$$

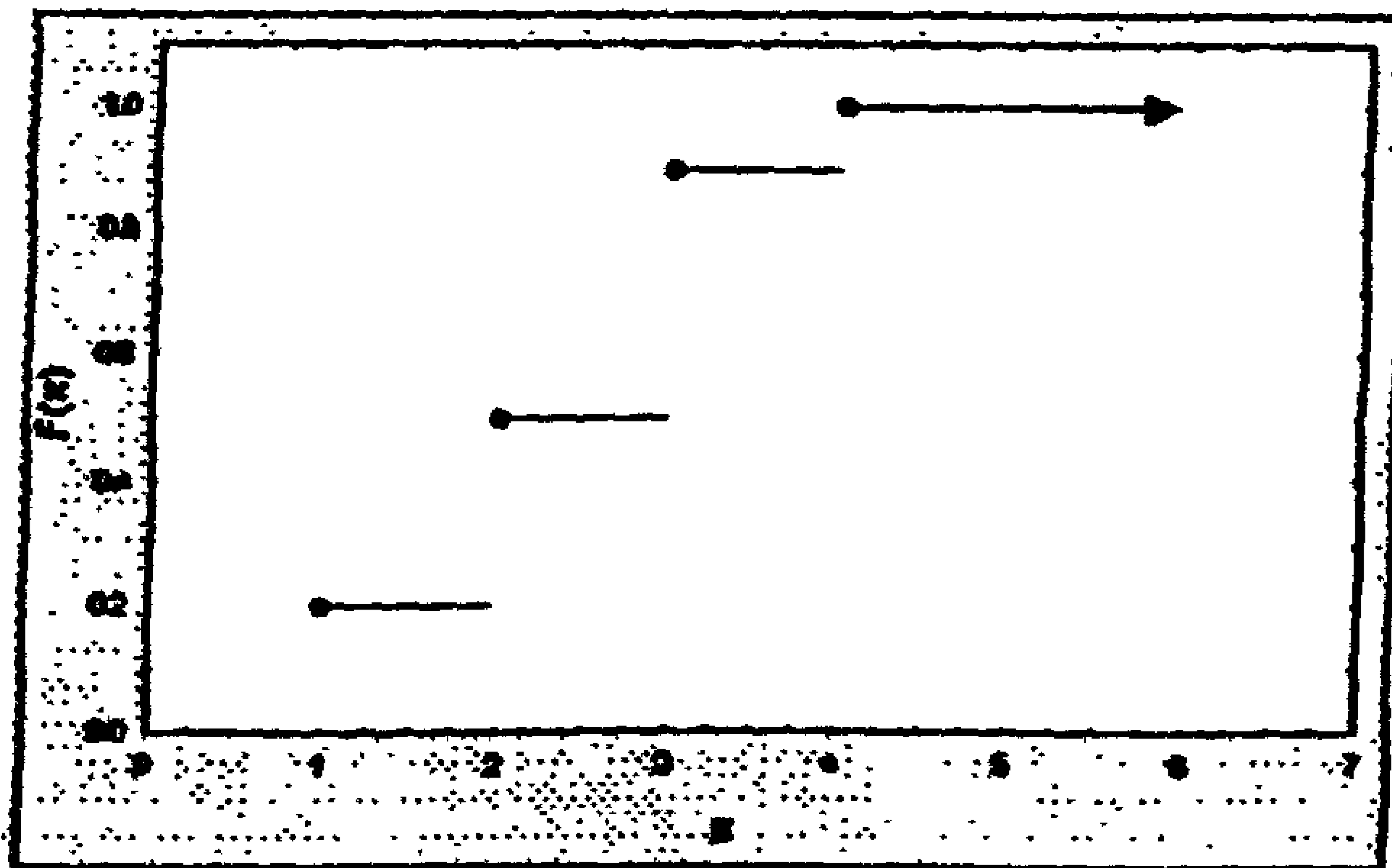
مثال (٢-٢٣) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي X كما في الجدول التالي :

x	1	2	3	4
P(X = x)	.2	.3	.4	.1

أوجد الدالة F(x) ومثلها بيانيا .

$$F(x)= \begin{cases} 0 & x<1 \\ .2 & 1\le x<2 \\ .5 & 2\le x<3 \\ .9 & 3\le x<4 \\ 1 & 4\le x. \end{cases}$$

بيان F(x) موضح في شكل (٢-٩) .



شكل (٢-٩)

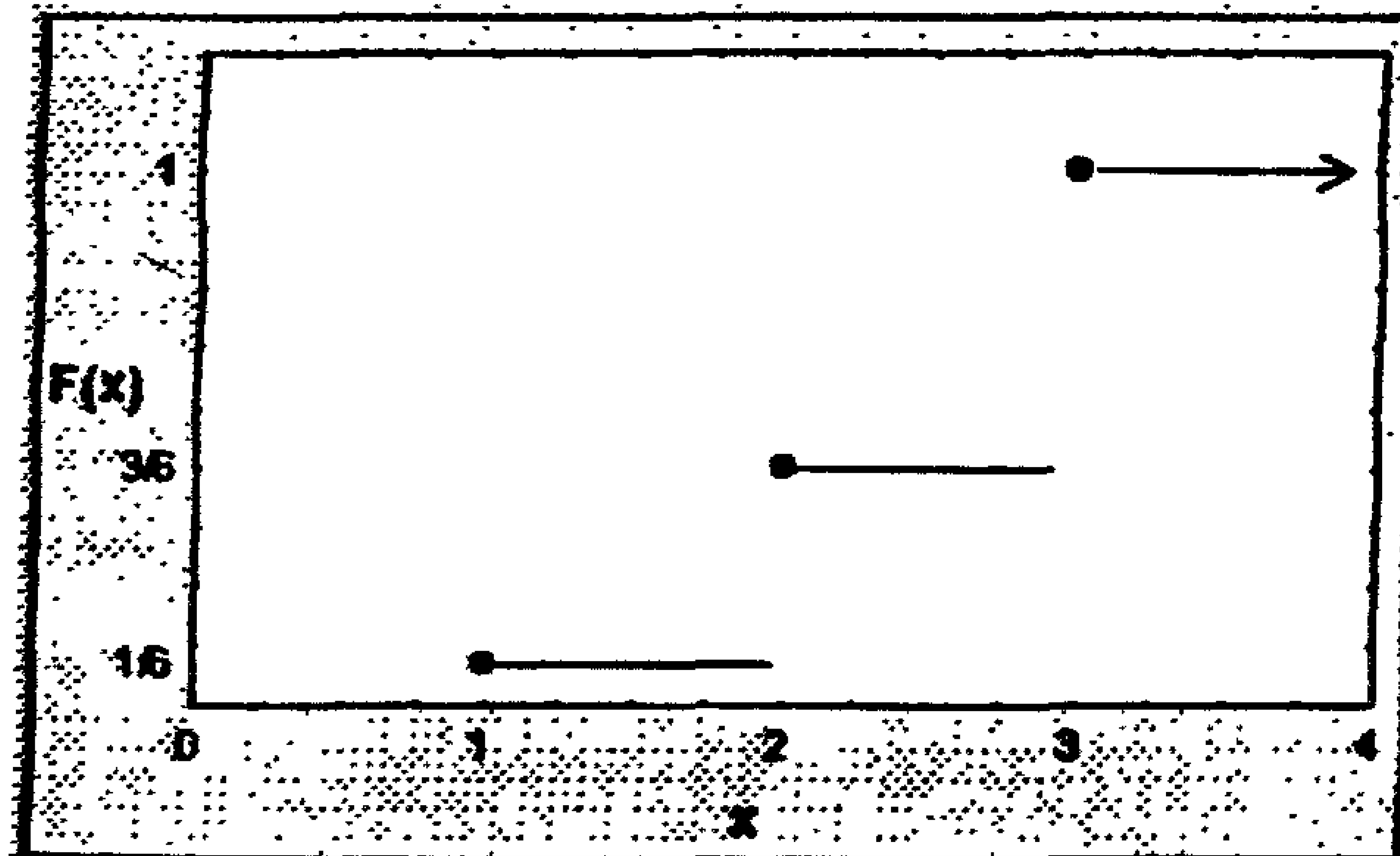
مثال (٢-٢٤) إذا كان X متغيرا عشوائيا من النوع المتقطع ودالة كثافة الاحتمال لـــه هي :

$$f(x) = x/6 \quad , \quad x = 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}$$

فإن دالة التوزيع للمتغير X هي :

$$F(x) = 0 \qquad x < 1$$
$$= \frac{1}{6} \qquad 1 \le x < 2$$
$$= \frac{3}{6} \qquad 2 \le x < 3$$
$$= 1 \qquad 3 \le x.$$

هنا كما هو موضح في شكل (٢-١٠) F(x) دالة سلمية والتي تكون ثابتة في أي فـــترة لا تحتوي على 1 أو 2 أو 3 ولكن لها قفزات بارتفاعات $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$ عند تلك النقط علـــى التوالي . أيضا يلاحظ أن F(x) متصلة من اليمين .



شكل (٢ – ١٠)

هناك بعض الخواص لدالة التوزيع لمتغير عشوائي X نذكر بعضها . سوف نستخدم الرمزين $F(\infty)$ و $F(-\infty)$ لتعني $\lim_{x\to\infty} F(x)$, $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ على التوالي . أيضا الرمزين $\{x|x\le\infty\}$, $\{x|x\le-\infty\}$ تمثل على التوالي ، النهايات للفئتين : $\{x|x\le b\}$, $\{x|x\le -b\}$ عندما $b\to\infty$.

(أ) $0\le F(x)\le 1$ وذلك لأن $0\le P(X\le x)\le 1$.

(ب) الدالة $F(x)$ غير تناقصية في x بمعنى أنه إذا كانت $x'\le x''$ فإن :

$$\{x|x\le x''\}=\{x|x\le x'\}\cup\{x|x'<x\le x''\}$$

و

$$P(X\le x'')=P(X\le x')+P(x'<X\le x'').$$

أي أن :

$$F(x'')-F(x')=P(x'<X\le x'')\ge 0.$$

(ج) $F(\infty)=1$ و $F(-\infty)=0$ لأن الفئة $\{x|x\le\infty\}$ هي خط الأعداد الحقيقية وأن الفئة $\{x|x\le-\infty\}$ هي فئة العدم .

من البرهان في (ب) ، أثبتنا إذا كان $a<b$ فإن :

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a).$$

ويفرض أننا نريد استخدام $F(x)$ لحساب الاحتمال $P(X=b)$. لإجراء ذلك ، $h>0$ ، أعتبر :

$$\lim_{h\to 0} P(b-h<X\le b)=\lim_{h\to 0}[F(b)-F(b-h)].$$

وبما أن $\lim_{h\to 0} P(b-h<X\le b)=P(X=b)$ وذلك لأنه عندما تؤول h إلي الصفر فإن نهاية الفئة $\{x|b-h<x\le b\}$ هي فئة تحتوى على نقطة واحدة $x=b$ (نظرية سوف نقبلها بدون برهان). وتبعا لذلك .

$$P(X=b)=F(b)-F(b-)$$

حيث $F(b-)$ هي النهاية من اليسار للدالة $F(x)$ عند $x=b$. وعلى ذلك الاحتمال أن $X=b$ هو طول القفزة التي تأخذها $F(x)$ عند $x=b$.

(d) الدالة $F(x)$ متصلة من اليمين عند كل نقطة x.لإثبات هذه الخاصية ،$h>0$ ، أعتبر

$$\lim_{h\to 0} P(a<X\le a+h)=\lim_{h\to 0}[F(a+h)-F(a)].$$

سوف نقبل بدون برهان ، $h>0$ ، أن :

$$\lim_{h \to 0} P(a < x \le a+h) = P(\phi) = 0.$$

وتبعاً لذلك :

$$0 = F(a+) - F(a).$$

حيث $F(a+)$ هي النهاية من اليمين للدالة $F(x)$ عند $x = a$. وعلى ذلك $F(x)$ متصلة من اليمين عند كل نقطة. يعطى الجدول التالي الصيغ المختلفة لحساب الاحتمالات لأحـداث متعددة وذلك باستخدام دالة التوزيع $F(x)$.

الصيغة الاحتمالية الحادثة	الحادثة
مقدار القفزة على بيان $F(x)$ عند $x = a$	$\{X = a\}$
$1 - F(a)$	$\{a < X\}$
$1 - F(a) + P\{X = a\}$	$\{a \le X\}$
$F(b)$	$X \le b$
$F(b) - P\{X = b\}$	$X < b$
$F(b) - F(a) - P\{X = b\}$	$\{a < X < b\}$
$F(b) - F(a) + P\{X = a\}$	$\{a \le X \le b\}$
$F(b) - F(a) + P(X = a\} - P\{X = b\}$	$\{a \le X < b\}$
$F(b) - F(a)$	$\{a < X \le b\}$

مثال (٢-٢٥) إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة كثافة الاحتمالية هي :

$$f(x) = (1-p)^{x-1} p \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

أوجد : $F(x)$.

الحل :

$$F(x) = \sum_{w \le x} p(w) = \sum_{w=1}^{x} (1-p)^{w-1} p$$
$$= p \sum_{w=0}^{x-1} (1-p)^{w}.$$

لحساب هذا المجموع سوف نستفيد من العلاقة التالية :

$$\sum_{w=0}^{k} a^{w} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}.$$

أي أن :

$$F(x)=p\frac{1-(1-p)^x}{1-(1-p)}=1-(1-p)^x,$$

و x عدد صحيح موجب . وحيث أن F(x) ثابتة بين الأعداد الصحيحة الموجبة فإن :

$$F(x)=0 \qquad x<1$$
$$=1-(1-p)^{[x]} \qquad x\geq 1$$

حيث [x] هو أكبر رقم صحيح أصغر أو يساوي x ، على سبيل المثال 2 = [2.5] .

(٢-٤) القيم المتوقعة Expected Values

سوف نسهل فهم القيمة المتوقعة بالمثال التالي : بفرض أن طالب اختير عشوائياً من 15000 طالبا (يمثلون مجتمع) تم تسجيلهم للفصل الدراسي في جامعة ما . إذا كان X = عدد المقررات التي يختارها الطالب وبفرض أن X لها دالة كثافة الاحتمال :

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	.01	.03	.13	.25	.39	.17	.02

وبما أن f(1) = .01 فإن هذا يعني أن 150 = (15000) (.01) طالبا قاموا بالتسجيل لمقرر واحد. بنفس الشكل القيم الأخرى من x وذلك كما هو موضح في الجدول التالي :

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	.01	.03	.13	.25	.39	.17	.02
عدد المسجلين	150	450	1950	3750	5850	2550	300

لحساب متوسط عدد المقررات لكل طالب ، أو القيمة المتوسطة للمتغير X في المجتمع ، سوف نحسب العدد الكلي للمقررات ونقسمه بالعدد الكلي للطلاب كما يلي :

$$\frac{(1)(150)+(2)(450)+(3)(1950)+\ldots+(7)(300)}{15000}=4.57.$$

وحيث أن f(2) = .03 = 450 / 15000 و f(1) = .01 = 150 / 15000 وهكذا. وعلى ذلك يمكن كتابة الصيغة السابقة ، متوسط عدد المقررات لكل طالب ، على الشكل :

$$(1)\ f(1)\ +\ (2)\ f(2)+\ \ldots +(7)\ f(7)\ .$$

يتضح من الصيغة السابقة أنه يمكن حساب القيمة المتوسطة للمجتمع والخاصة بـالمتغير العشوائي X من القيمة المختلفة للمتغير X مع الاحتمالات المقابلة لـها. أي أن القيمة المتوسطة للمجتمع والخاصة بالمتغير X تمثل الوسط المرجح لكل القيم الممكنة : 1, 2, ..7 حيث أن الأوزان تمثل بالاحتمالات المقابلة لتلك القيم .

تعريف : إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا وكانت دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ ، فإن القيمة المتوقعة أو القيمة المتوسطة للمتغير X، ويرمز لها بالرمز $E(X)$ أو μ_X هي :

$$E(X)=\mu_X=\sum_x x\ f(x).$$

حيث $E(X)$ موجود فقط إذا كان $E|x|<\infty$ أي أن $E|x|=\sum_x |x|f(x)<\infty$ ، أي يتقارب المجموع تقاربا مطلقا . وإذا لم يتحقق هذا الشرط فإنه لا يوجد للمتغير قيمة متوقعة أو متوسط .

عادة يستبدل الرمز μ_X بالرمز μ حيث يحذف الدليل وذلك عند التعامل مع متغير عشوائي واحد .

من الناحية الفيزيائية يمكن اعتبار القيمة المتوقعة هي مركز الكتلة أو نقطة الاتزان لتوزيع الكتل على نقاط في نظام فيزيائي. فعلى سبيل المثال إذا كانت الكتل .25 , .25 , .5 grams تم وضعها على القيم $x = 2, 4, 8$ cm على التوالي على محور أفقي فإن القيمة $2(.5) + 4(.25) + 8(.25) = 4$ هي مركز الكتلة أو نقطة الاتزان للنظام الفيزيائي كما هو موضح في شكل (٢-١١) . في مجال الإحصاء يعتبر μ مقياس لموقع دالة كثافة الاحتمال (أو مقياس للنزعة المركزية) .

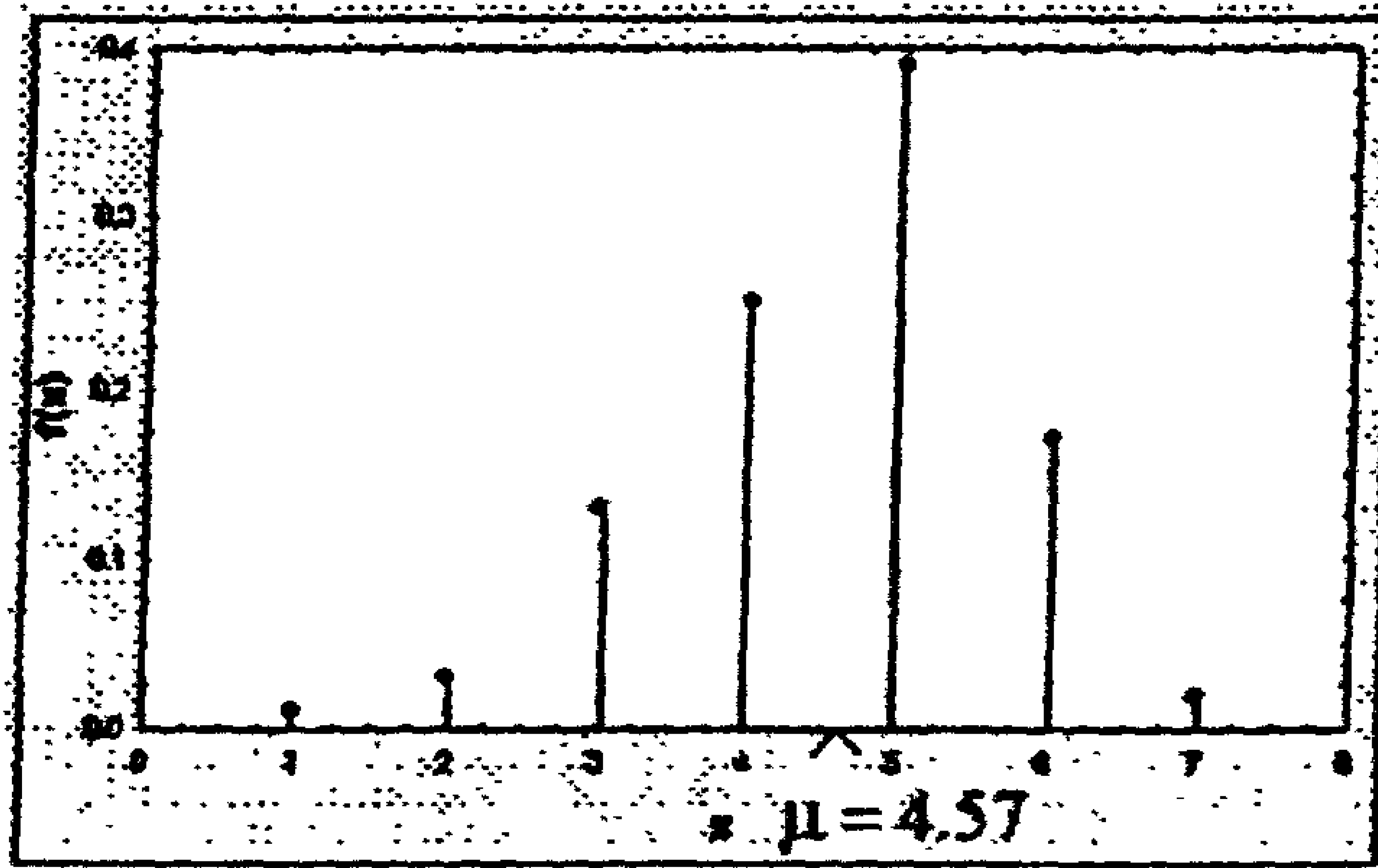


شكل (٢-١١)

مثال (٢-٢٦) للمثال السابق الخاص بمجتمع الطلبة المسجلين في للمقررات في جامعة ما فإن :

$$\mu = (1)f(1) + (2)f(2) + ... + 7f(7)$$
$$= (1)(.01) + (2)(0.03) + ... + (7)(.02)$$
$$= .01 + .06 + .39 + 1.00 + 1.95 + 1.02 + .14 = 4.57.$$

دالة كثافة الاحتمال للمتغير X موضحة في شكل (٢-١٢) مع μ . عادة يشار إلي μ بالوسط الحسابي للمجتمع (متوسط المجتمع) ويجب أن يكون معلوماً من أن μ ليس من الضروري أن تكون قيمة من قيم المتغير العشوائي X . في هذا المثال ($\mu = 4.57$) .



شكل (٢-١٢)

مثال (٢-٢٧) إذا كان X متغيراً عشوائياً من النوع المتقطع بدالة كثافة احتمال p.d.f.

$$f(x) = 6/\pi^2 . \frac{1}{x^2} \qquad x = 1, -2, 3, -4, ...$$
$$= 0 \ \text{elsewhere} .$$

أوجد المتوسط واثبت أن المتوسط غير موجود

الحل :

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x\ f(x)$$
$$= \frac{6}{\pi^2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right]$$

بما أن :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

وعلى ذلك :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log(2)$$

وبالتالي فإن :

$$E(X) = \frac{6}{\pi^2}\log(2)$$

أي أن $E(X)$ له قيمة إلا أنه غير موجود لأن :

$$E|X| = \frac{6}{\pi^2}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right] = \infty.$$

مثال (٢-٢٨) الصيغة العامة لدالة كثافة الاحتمال للمتغير X والذي تمثل عـــدد الأطفــال الذين يولدون حتى الحصول على أول ذكر هي :

$$f(x) = p(1-p)^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}$$

من التعريف :

$$E(X) = \sum_{x} xf(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\ p(1-p)^{x-1}$$
$$= p\sum_{x=1}^{\infty}\left[-\frac{d(1-p)^x}{dp}\right]$$

بتغيير ترتيب أخذ المشتقة والجمع ، فإن المجموع يمثل مسلسلة هندسية. بعد حساب المجمــوع يأخذ المشتقة والنتيجة النهائية $E(X)=\frac{1}{p}$. إذا كانت p قريبة من 1 نتوقع أن ولادة طفل ذكر سريعة جداً. بينما إذا كانت p قريبة من الصفر فإننا نتوقع محاولات كثيرة قبــل ولادة طفــل ذكر.

مثال (٢-٢٩) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = .5\ (.5)^{x-1} \quad x = 1, 2, 3,....$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

فإن :

$$\mu=\frac{1}{p}=\frac{1}{.5}=2.$$

مثال (٢-٣٠) إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمال :

$$f(x)=\frac{k}{x^2} \qquad x=1,2,3,...$$
$$=0 \ \text{elsewhere.}$$

حيث أن k يختار تحت شرط أن $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{k}{x^2}=1$ (من مقرر التفاضل فــإن $\sum_{x=1}^{\infty}(1/x^2)<\infty$ والتي تعني أن k معرفة. ولكن قيمتها لا تهمنا هنا. القيمة المتوقعة للمتغير X هي :

$$\mu=E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}x.\frac{k}{x^2}=k\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x}.$$

المجموع في الجانب الأيمن من المعادلة السابقة يمثــل مسلســلة تبــا عديــة مشــهورة فــي الرياضيات، هنا نقول أن μ غير موجود .

مثال (٢-٣١) يحتوى وعاء على 4 كرات أثنين منهم مرقمين بالرقم 2 وواحـــدة مرقمــة بالرقم 4 والأخرى مرقمــة بــالرقم 8. متوســط الأعــداد علــى الكــرات الأربعــة هــو $(2+2+4+8)/4=4$. أن تجربة اختيار كرة عشوائياً وتســجيل الرقــم الــذي يظــهر يرتبــط بالمتغير العشوائي X الذى يأخذ القيم $x = 2, 4, 8$ والذي له دالة كثافة احتمال من النـــوع المتقطع حيث أن :

$$f(2)=\frac{1}{2} \quad , \quad f(8)=\frac{1}{4} \quad , \quad f(4)=\frac{1}{4}$$

وعلى ذلك فإن المتوسط أو القيمة المتوقعة هي :

$$\mu = E(X) = 2(\frac{1}{2}) + 4(\frac{1}{4}) + 8(\frac{1}{4}) = 4.$$

مثال (٢-٣٢) إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا يمثل عدد الأطفال في الريف وإذا كان Y متغيرا آخر يمثل عدد الأطفال في المدينة . فإذا استخدمت البيانات في الحصول على دالة كثافة الاحتمال لكل من X و Y كالتالي :

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f(x)	.05	.05	.1	.15	.2	.2	.15	.03	.02	.02	.02	.01
g(y)	.12	.15	.19	.16	.12	.1	.07	.02	.02	.02	.02	.01

القيمة المتوقعة لكل من X و Y هي :

$$\mu_X = (0)(.05) + (1)(.05) + \ldots + (11)(.01) = 4.26,$$
$$\mu_Y = (0)(.12) + (1)(.15) + \ldots + (11)(.01) = 3.2.$$

مثال (٢-٣٣) لمتغير عشوائي برنولي بمعلمة p أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X .

الحل :

$$E(X) = (0)\,(q) + (1)\,(p) = p.$$

مثال (٢-٣٤) قطعة من المجوهرات تساوي 10000$ فإذا كان احتمال أن تسرق أو تفقد خلال سنة هو 003. واحتمال أن لا تسرق أو تفقد هو 0.997. فإذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل مقدار الفقد خلال سنة . أوجد القيمة المتوقعة للمتغير X .

الحل :

$$E(X) = (0)\,(.997) + (10000)\,(.003) = 30\ \$.$$

مثال (٢-٣٥) إذا ألقيت زهرة نرد حتى ظهور الرقم 6 وإذا كانت X تمثل عدد المحاولات اللازمة بدالة كثافة احتمال :

x	1	2	3	...	k
f(x)	$\frac{1}{6}$	$(\frac{5}{6})\,.\frac{1}{6}$	$(\frac{5}{6})^2.\frac{1}{6}$		$(\frac{5}{6})^{k-1}.\frac{1}{6}$

وعلى ذلك :

$$E(X)=(1)(\frac{1}{6})+2(\frac{5}{6})(\frac{1}{6})+3(\frac{5}{6})^2(\frac{1}{6})+....$$

أي أن :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k(\frac{5}{6})^{k-1}(\frac{1}{6})$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k(\frac{5}{6})^{k-1}.$$

وهي تساوى تفاضل مسلسلة هندسية . بضرب كل حد في المسلسلة بـ $\frac{6}{5}.\frac{5}{6}=1$ لأن المعامل الذي يخرج هو $\frac{6}{5}$ وعلى ذلك :

$$E(X)=(\frac{1}{6})(\frac{6}{5})\sum_{k=1}^{\infty} k.(\frac{5}{6})^k$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty} k.(\frac{5}{6})^k$$

$$=\frac{1}{5}\;\frac{\frac{5}{6}}{(1-\frac{5}{6})^2}=6.$$

مثال (٢-٣٦) يحتوي وعاء على كرة بيضاء وكرة سوداء ، تختار كرة من الوعاء عشوائيا. إذا كانت بيضاء ، فإن التجربة توقف ، ولكن إذا كانت الكرة سوداء تضاف الكرة ومعها كرة سوداء وتستمر العملية حتى تظهر كرة بيضاء . وإذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد المحاولات حتى ظهور كرة بيضاء حيث {...,1,2,3}=X :

$$P(X=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})$$

$$P(X=3)=(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{1}{4})=(\frac{1}{3})(\frac{1}{4})$$

$$P(X=4)=(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{3}{4})(\frac{1}{5})=(\frac{1}{4})(\frac{1}{5})$$

عموما الحادثة $\{X=k\}$ تعني سحب $(k-1)$ من الكرات السوداء قبل انتهاء السحب وظهور كرة بيضاء في المحاولة رقم k . وعلى ذلك :

$$P(X=k)=(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{3}{4})\ldots\left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X هي :

X	1	2	3	...
f(x)	$1-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$	...

وعلى ذلك دالة كثافة احتمال للمتغير X هي :

$$f(k)=\left[\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k+1}\right)\right],\quad k=1,2,3,\ldots$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)$$

وعلى ذلك :

$$E(X)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

يمثل مسلسلة تباعديه وعلى ذلك $E(X)=\infty$ (أي أن μ غير موجودة) .

(٢-٤-١) القيمة المتوقعة لدالة The Expected Value of a Function

عادة يكون الاهتمام بالقيمة المتوقعة لبعض الدول u(X) أكثر من الاهتمام بالقيمة المتوقعة للمتغير X . فعلى سبيل المثال فإن مساحة قرص يكون دالة في نصف القطر أي أن $Y=\pi X^2$.

مثال (٢-٣٧) بفرض أن مكتبة لبيع الكتب تشترى 10 نسخ من كتاب بسعر 6.00$ للواحد ثم تبيعه بسعر 12 $ على أساس أنه بعد ثلاثة أشهر فإن النسخ التى لا تباع سوف يخفض سعرها إلي 2 $.فإذا كان X = عدد النسخ التي تباع فإن العائد من بيع الكتب سوف يكون :

$$u(X)= 12 X + 2 (10 - X) - 60 = 10 X - 40$$

مثال (٢-٣٨) إذا كان X متغيرا عشوائيا بدالة كثافة احتمال :

x	4	6	8
f(x)	.5	.3	.2

وإذا كانت :

$$Y= u(X) = 20 + 3X + .5 X^2$$

فإن دالة كثافة الاحتمال g(y) للمتغير Y هي :

y	40	56	76
g(y)	.5	.3	.2

وعلى ذلك فإن :

$$E(Y) = E[u(X)] = \sum_y y.g(y)$$

$$= (40)(.5) + (56)(.3) + (76)(.2)$$

$$= u(4).(.5) + u(6).(.3) + u(8).(.2)$$

$$= \sum_x u(x).f(x) = 52.$$

تبعا للمعادلة السابقة يكون من الضروري تقدير دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي Y للحصول على E(Y). بدلا من ذلك بأن القيمة المتوقعة المطلوبة هي المتوسطة المرجح لكل قيم u(X).

نظرية (٢-١) إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا بدالة كثافة احتمال f(x) وإذا كـــانت u(x) قيمة حقيقية لدالة مجالها كل القيم الممكنة من X فإن :

$$E[(u(X)] = \sum_{x} u(x)\ f(x)$$

تبعا للنظرية السابقة فإن E [u (x)] يمكن حسابها بنفس طريقة حساب E (X) فيما عـــدا u(x) تحل محل x .

مثال (٢-٣٩) يرغب مركز تجاري في شراء ثلاثة حاسبات آلية بسعر 500 $ للحاسـب الواحد ثم يبيع الحاسب الواحد بسعر 1000$ وقد وافق المصنع على أعـــادة شـــراء أي حاسب لا يباع بعد فترة زمنية بسعر 200$. إذا كانت X ترمز لعدد الحاسبات المباعـــة وإذا كان f(0) = .1 , f(1) = .2 , f(2) = .3 , f(3) = .4 . وإذا كـــان u(X) تمثـــل الربح الناتج من بيع X وحدة فإن :

$u(X) = 1000X + 200\ (3 - X) - 1500 = 800\ X - 900$. القيمـــة المتوقعـــــة للربح هي :

$$\begin{aligned} E[\ u(X)\ ] &= u(0)\ .\ f(0) + u(1)\ .f(1) + u(2)\ f(2) + u(3)\ .\ f(3) \\ &= (-900)\ (.1) + (-100)\ (.2) + (700)\ (.3) + (1500)\ (.4) \\ &= 700\ \$\ . \end{aligned}$$

مثال (٢-٤٠) إذا كان Xمتغيرا عشوائيا متقطعا بدالة كثافة إحتمال موضحـــــة فـــي الجدول التالي :

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير $u(X) = Y = (X - 3)^2$

(أ) باستخدام الصيغة E(Y).

(ب) باستخدام الصيغة E[u(X)]

الحل : (أ)

$$P(Y=0)=P(X=3)=\frac{3}{16}.$$

$$P(Y=1)=P(X=2)+P(X=4)=\frac{8}{16},$$

$$P(Y=4)=P(X=1)+P(X=5)=\frac{3}{16}.$$

$$P(Y=9)=P(X=0)+P(X=6)=\frac{2}{16},$$

وعلى ذلك :

$$E(Y)=(0)\left(\frac{3}{16}\right)+(1)\left(\frac{8}{16}\right)+(4)\left(\frac{3}{16}\right)+(9)\left(\frac{2}{16}\right)=\frac{19}{8}.$$

(ب)

$$E[u(x)]=E(X-3)^2=\sum_{x=0}^{6}(x-3)^2 f(x)$$

$$=(0-3)^2\left(\frac{1}{16}\right)+...+(6-3)^2\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$=\frac{19}{8}=\mu_Y\ .$$

بوضع $u(X)=(X-\mu)^2$ يمكن الحصول على قيمة متوقعة خاصة ومهمة :

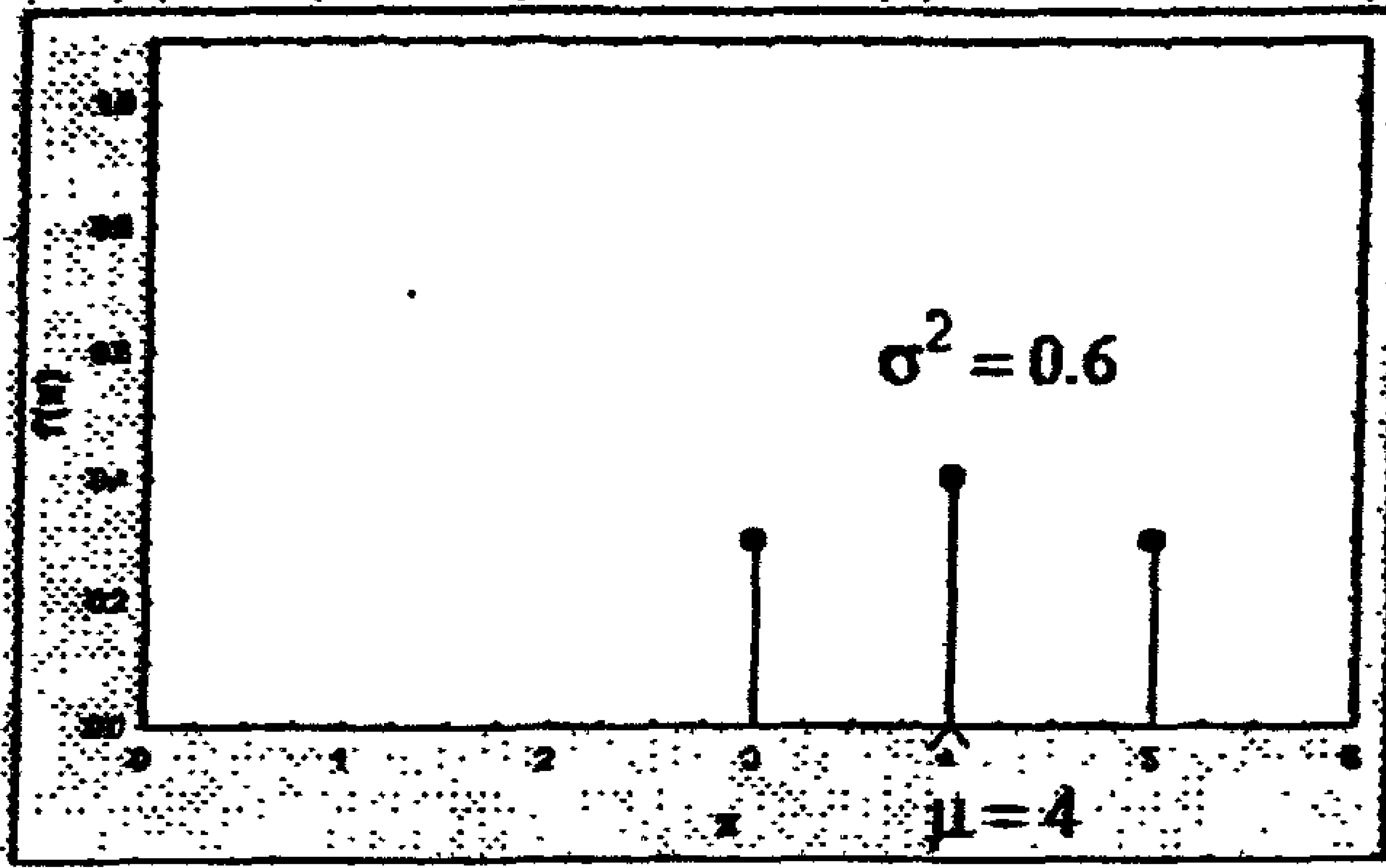
تعريف : التباين لمتغير عشوائي X هو :

$$Var(X)=E[(X-\mu)^2$$

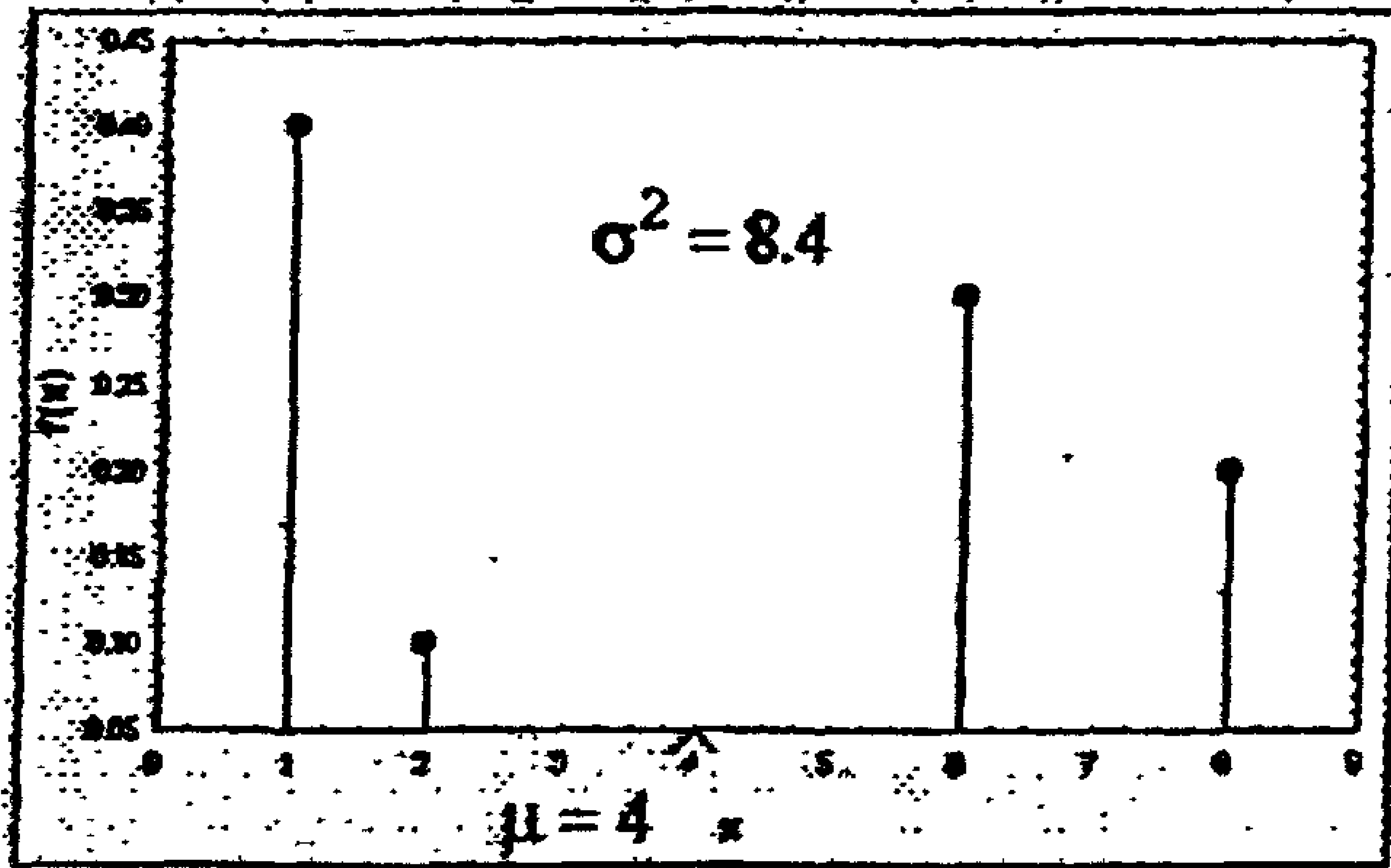
هناك رموز أخرى للتباين مثل σ^2 أو σ_X^2 أو $V(x)$. الجذر التربيعي للتبـــاين يســمي الانحراف المعياري standard deviation للمتغير العشوائي X. أي أن :

$$\sigma=\sigma_X=\sqrt{Var(X)}$$

يعطي التباين مقياس للتشتت variability أو كميــة الانتشـــار spread لدالــة كثافــة الاحتمال للمتغير X . ويمكن توضيح ذلك بشــكل (٢-١٣) و(٢-١٤) والــذي يمثــل دالتين مختلفتين (p.d.f.) حيث $\mu = 4$ لكلا الدالتين بينما التوزيع في شكل (٢-١٣) لــه تشتت أقل من التوزيع في شكل (٢-١٤) .



شكل (٢-١٣)



شكل (٢-١٤)

مثال (٢ – ٤١) إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً بدالة كثافة احتمال :

X	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

أوجد التباين للمتغير العشوائي X.

الحل : يحتوي الجدول التالي على الحسابات اللازمة لحساب التباين :

x	f(x)	x f(x)	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 f(x)$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-7}{4}$	$\frac{49}{16}$	$\frac{49}{128}$
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{18}{128}$
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{128}$
4	$\frac{2}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{50}{128}$
المجموع		$\mu=\frac{22}{8}$			$\sigma^2=\frac{120}{128}$

أي أن :

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) = \frac{22}{8},$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E[X-\mu]^2$$

$$= \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \frac{120}{128}.$$

مثال (٢-٤٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

x	-20	1	10	30
f(x)	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

أوجد التباين للمتغير العشوائي X.

الحل : يحتوي الجدول التالي على الحسابات اللازمة لحساب التباين :

x	f(x)	x f(x)	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 f(x)$
-20	$\frac{2}{8}$	$\frac{-40}{8}$	$\frac{-182}{8}$	517.56	129.39
1	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{-14}{8}$	3.06	0.77
10	$\frac{3}{8}$	$\frac{30}{8}$	$\frac{58}{8}$	52.56	19.71
30	$\frac{1}{8}$	$\frac{30}{8}$	$\frac{218}{8}$	742.56	92.82
المجموع		$\mu=\frac{22}{8}$			$\sigma^2=242.69$

أي أن :

$$\mu = E(X) = \sum_x x\, f(x) = \frac{22}{8},$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E[X-\mu]^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

$$= 242.69.$$

مثال (٢-٣٤) ترغب شركة في تعبئة الحبوب في صناديق بحيث أن كمية الحبوب في الصندوق تكون على الأقل 16 ounces . إذا كان X يمثل كمية الحبوب في الصندوق وكانت X لها دالة كثافة احتمال والمعطاة في الجدول التالي :

x	15.8	15.9	16.0	16.1	16.2
P(X=x)	.15	.20	.30	.20	.15

أوجد التباين .

الحل : المتوسط للمتغير X هو :

$$\mu = (15.8)(.15) + (15.9)(.20) + ... + (16.2)(.15)$$

$$= 16.0,$$

$$\sigma^2 = (15.8-16.0)^2 .15 + (15.9-16.0)^2(.20) + (16.0-16.0)^2(.30)$$
$$+ (16.1-16.0)^2(.2) + (16.2-16.0)^2(.15) = .016 .$$

مثال (٢-٤٤) في المثال السابق بفرض أن المصنع يرغب في تقليل التبـاين ولذلـك قام بتغيير الآلة وتم الحصول على التوزيع الاحتمالي للمتغير X بعد التغيير حيث :

X	15.8	15.9	16.0	16.1	16.2
f(x)	.01	.14	.72	.10	.03

من الجدول السابق فإن $\mu_X = 16.0$ بينما σ_X^2 هو :

$$\sigma_X^2 = (15.8-16.0)^2(.01) + (15.9-16.0)^2(.14) + (16.0-16.0)^2$$
$$.\quad (.72) + (16.1-16.0)^2(.10) + (16.2-16.0)^2(.03) = .004.$$

مثال (٢-٤٥) إذا كان X له دالة كثافة الاحتمال التالية :

x	3	4	5
f(x)	.3	.4	.3

أوجد التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

الحل :

$$\mu = E(X) = \sum_x x\ f(x) = (3)(.3) + (4)(.4) + (5)(.3) = 4,$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{x=3}^{5} (x-4)^2 f(x) = (3-4)^2(.3) + (4-4)^2(.4)$$
$$+ (5-4)^2(.3) = .6 .$$

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو :

$$\sigma = \sqrt{.6} = .77.$$

مثال (٢-٤٦) إذا كان X متغيرا عشوائيا دالة كثافته الاحتمالية هي :

X	1	2	6	8
f(x)	.4	.1	0.3	.2

أوجد التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

الحل :

$$\mu = E(X) = \sum_x x\ f(x)$$
$$= (1)(.4) + (2)(.1) + (6)(.3) + (8)(.2) = 4\ .$$

وعلى ذلك :

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X-4)^2$$
$$= \sum_x (x-4)^2 f(x)$$
$$= (1-4)^2(.4) + (2-4)^2(.1)$$
$$+ (6-4)^2(.3) + (8-4)^2(.2)$$
$$= 8.4\ .$$

والانحراف المعياري هو :

$$\sigma = \sqrt{8.4} = 2.9.$$

مثال (٢-٤٧) تلقى عملة حتى الحصول على أول صورة وإذا كان X متغيرا عشـوائيا يمثل عدد المحاولات حتى الحصول على أول صورة فإن التوزيع الاحتمالي للمتغـــير X معطي في الجدول التالي :

x	1	2	3	...k	...
f(x)	$(\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{1}{2})^3$	$...(\frac{1}{2})^k$	...

أوجد المتوسط والتباين .

$$E(X)=(1)(\frac{1}{2})+(2)(\frac{1}{2})^2+3(\frac{1}{2})^3+...$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} k.(\frac{1}{2})^k$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=2,$$

$$Var(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)^2.(\frac{1}{2})^k$$

والتي تعتبر أكثر صعوبة في فكها .

نظرية (٢-٢) إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا بدالة كثافة احتمال f(x) وإذا كان a, b مقدارين ثابتين وكان h(x) , g(x) قيمتان حقيقيتان لدالتين مجالهما كل القيم الممكنة مـــن X فإن :

$$E[\,a\,g(X)+b\,h(X)\,]=a\,E\,[g(X)]+b\,E[h(X)\,]$$

البرهان:

$$E[a\,g(X)+b\,h(X)]=\sum_x\,[a\,g(x)+b\,h(x)]\,f(x)]$$

$$=a\sum_x g(x)\,f(x)+b\sum_x h(x)\,f(x)$$

$$=aE[g(X)]+bE[h(X)]$$

نتيجة (٢-١)

$$E(a\,X+b)\;=\;a\,E(X)\;+\;b$$

نتيجة (٢-٢)

إذا كانت b = 0 فإن :

$$E(a\,X)=a\,E(X)$$

نتيجة (٢-٣)

إذا كانت a = 0 فإن :

$$E(b)=b\,.$$

صيغة مختصرة للتباين σ^2 **A shortcut Formula for σ^2**

عدد العمليات الحسابية الضرورية لحساب σ^2 يمكن اختزالها باستخدام الصيغة البديلة التالية :

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X)^2 - [E(X)]^2$$
$$= \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

البرهان :

$$Var(X) = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$
$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$
$$= E(X)^2 - 2\mu^2 + \mu^2$$
$$= E(X^2) - \mu^2$$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2.$$

تبعا لذلك فإن :

$$E(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

كما ذكرنا سابقا فإن التباين يمدنا بمقياس لكمية الانتشار في دالة كثافة الاحتمال أو التشتت حول عناصر المجتمع . إذا كان X يأخذ قيمة واحدة فقط ، أي أن $P(X=c) = 1$ في هذه الحالة $E(X) = c$ و $Var(X) = 0$.

مثال (٢-٨٤) إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا بدالة كثافة احتمال :

$$f(x) = .5 \qquad x = 2$$
$$= .25 \qquad x = 4, 8$$

التباين لهذه الدالة يحسب كالتالي :

$$E(X) = (2)(.5) + (4)(.25) + (8)(.25) = 4,$$

$$E(X^2) = (2^2)(.5) + 4^2(.25) + 8^2(.25)$$
$$= 22.$$

التباين هو :

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= 22 - 4^2 = 6.$$

الانحراف المعياري هو :

$.\sigma = \sqrt{6} = 2.45$

لعمل مقارنة وبفرض تجربة عشوائية مختلفة قليلا حيث أن :

$$g(y) = .5 \qquad y = 0$$
$$= .25 \qquad y = 4, 12.$$

فإن $E(Y) = 4$ بينما $Var(Y) = 24$ و $\sigma_Y = 2\sqrt{6} > \sigma_X$ والذي يعكس الحقيقة أن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y لها تشتت أكبر من X .

مثال (٢-٤٩) للمثال (٢-٤١) أوجد التباين بالصيغة المختصرة .

x	f(x)	x f(x)	x^2	$x^2 f(x)$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	4	$\frac{8}{8}$
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	9	$\frac{27}{8}$
4	$\frac{2}{8}$	$\frac{8}{8}$	16	$\frac{32}{8}$
المجموع		$\mu = \frac{22}{8}$		$E(X^2) = \frac{68}{8}$

وعلى ذلك :

$$\mu = E(X) = \sum_x x\ f(x) = \frac{22}{8},$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2\ f(x) = \frac{68}{8},$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= \frac{68}{8} - (\frac{22}{8})^2 = 0.9375.$$

نظرية (٢-٣) إذا كان X متغيرا عشوائيا وكان b, a ثابتين فإن :

$$Var(aX+b) = a^2 \; Var(X)$$

البرهان :

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E(aX+b-a\mu-b)^2 \\ &= E[a^2(X-\mu)^2] \\ &= a^2 Var(X) \end{aligned}$$

النتيجة السابقة تعني أن إضافة الثابت b لا يؤثر على التباين وذلك لأن إضافة b غير الموقع (القيمة المتوسطة) ولم يؤثر على انتشار القيم .

نتيجة (٢-٤)

$$\sigma^2_{aX} = a^2\,\sigma^2_x \qquad , \qquad \sigma_{ax} = |a|\sigma_x$$

وجود القيمة المتوقعة في صيغة الانحراف المعياري σ_{aX} سببها أن a قد تكون سالبة بينما الانحراف المعياري لا يمكن أن يكون سالب .

نتيجة (٢-٥)

$$\sigma^2_{X+b} = \sigma^2_X .$$

إذا كان X متغيرا عشوائيا بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن المتغير العشوائي $u(X) = Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ يسمى الشكل المعياري (أو القياسي) للمتغير X.

من السهل إثبات أن :

$$E(Y) = 0 \;,\; Var(Y) = 1$$

فمن نتيجة (٢-١) فإن :

$$E(Y) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)E(X-\mu) = 0.$$

ومن نظرية (٢-٣) فإن :

$$Var(X) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 Var(X-\mu)$$
$$= \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 Var(X) = 1.$$

بحل المعادلة $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ في X فإن :

$$X = \mu + (\sigma.Y)$$

وعلى ذلك القيمة المعيارية y = 2 تعني أن القيمة x على بعد انحرافين معياريين بعد المتوسط ، بينما القيمة المعيارية y = -3 تعني أن القيمة x تبعد ثلاثة انحرافات معيارية أقل من المتوسط.

مثال (٢-٥٠) إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الأسرة التي تزور عيادة طبية سنويا وإذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير X هي :

x	0	1	2	3	4
f(x)	.37	.40	.15	.05	.03

أوجد القيم المختلفة للمتغير العشوائي Y حيث $Y = (X-\mu)/\sigma$.

الحل :

$$\mu_X = .97 \qquad \sigma_X^2 = .9891 \qquad , \qquad \sigma_X = \sqrt{.9891} = .9945.$$

يعطي الجدول التالي القيم المختلفة للمتغير العشوائي Y.

x	القيمة المعيارية $y = [(x - E(X)]/\sigma$	$P(X = x) = P(Y = y)$
0	-.98	.37
1	.03	.40
2	1.04	.15
3	2.04	.05
4	3.05	.03

(٢-٤-٢) العـزوم Moments

بفرض أن $u(X) = X^r$ فإن العزم من الدرجة r حول نقطـة الأصـل يعـرف كالتالي :

$$\mu_r' = E(X^r) = \sum x^r f(x), r = 1,2,3,...$$

(أ) عندما يكون $r = 0$ فإن :

$$\mu_r' = E(X^0) = \sum_x x^0 f(x) = \sum_x f(x) = 1$$

(ب) عندما تكون $r = 1$ فإن :

$$\mu_r' = E(X) = \sum_x x\ f(x) = \mu\ .$$

بفرض أن $u(X) = (X-\mu)^r$ فإن العزم من الدرجة r حول المتوسط يعرف كالتالي:

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \sum_x (x-\mu)^r f(x), r = 1,2,3,...$$

(أ) عندما $r = 1$ فإن $\mu_1 = 0$ لأن :

$$\mu_1 = E(X-\mu)^1 = \sum_x (x-\mu)\ f(x)$$

$$= \sum_x x\ f(x) - \mu \sum_x f(x)$$

$$= \mu - \mu = 0.$$

(ب) عندما $r = 2$ فإن $\mu_2 = \sigma^2$ لأن :

$$\mu_2 = E(X-\mu)^2 = \sigma^2 .$$

يمكن التعبير عن العزم حول المتوسط بدلالة العزم حول الصفر كالتالى :

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \sum_x (x-\mu)^r f(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-\mu)^{r-j} \sum_x x^j f(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-\mu)^{r-j}\ \mu_j'$$

على سبيل المثال عندما r = 2 فإن :

$$\mu_2 = \sigma^2 = \sum_{j=0}^{r} \binom{2}{j} (-\mu)^{2-j} \mu_j^{'}$$

$$= (-\mu)^2 \mu_0^{'} + \binom{2}{1} (-\mu)\ \mu_1^{'} + \mu_2^{'}$$

$$= \mu^2 - 2\mu^2 + \mu_2^{'} \ .$$

أي أن :

$$\sigma^2 = \mu_2^{'} - \mu^2 .$$

بفرض أن $u(X) = X(X-1)(X-2)\ldots(X-j+1)$ فإن :

عزم المضروب (العزم العاملى) من الدرجة j هو :

$$\mu_{[j]} = E[X(X-1)(X-2)\ldots(X-j+1)].$$

(أ) عزم المضروب الأول هو :

$$\mu_{[1]} = E(X) = \sum_x x\ f(x) = \mu .$$

(ب) عزم المضروب الثاني هو :

$$\mu_{[2]} = E[X(X-1)] = \sum_x x^2 f(x) - \sum_x x\ f(x) = E(X^2) - E(X)$$

$$= \mu_2^{'} - \mu .$$

وعلى ذلك فإن :

$$\mu_2^{'} = \mu_{[2]} + \mu.$$

(ج) عزم المضروب الثالث هو :

$$\mu_{[3]} = E[X(X-1)(X-2)]$$

$$= \sum_x x^3 f(x) - 3\sum_x x^2 f(x) + 2\sum_x x\ f(x)$$

$$= \mu_3^{'} - 3\mu_2^{'} + 2\mu \ .$$

ومنها :

$$\mu'_3 = \mu_{[3]} + 3\mu'_2 - 2\mu$$
$$= \mu_{[3]} + 3[\mu_{[2]} + \mu] - 2\mu$$
$$= \mu_{[3]} + 3\mu_{[2]} + \mu_{[1]} .$$

بفرض أن $u(X) = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^r$ فإن العزم القياسي من الدرجة r (المعياري) لمتغير عشوائي X يعرف كالتالي :

$$\alpha_r = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^r = \sum_x \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^r f(x)$$
$$r = 1,2,3,....$$

عندما $r = 1$ فإن :

$$\alpha_1 = 0 .$$

عندما $r = 2$ فإن:

$$\alpha_2 = 1.$$

عندما $r = 3$ فإن :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}.$$

والذي يسمي معامل الالتواء والذي سوف نتناوله بالتفصيل فى الفصل الثالث .

عندما $r = 4$ فإن :

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} .$$

والذي يسمي معامل التفلطح والذي سوف نتناوله بالتفصيل فى الفصل الثالث .

مثال (٢-٥١) إذا كان X يمثل عدد الصور التي ظهر عند إلقاء عملتين. أوجد العزوم الأربعة الأولي (أ) حول الصفر . (ب) حول المتوسط. (ج) عزوم المضروب (د) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X هو

x	0	1	2
f(x)	.25	.5	.25

(أ) الجدول التالي يحتوي على الحسابات اللازمة .

x	f(x)	x f(x)	$x^2 f(x)$	$x^3 f(x)$	$x^4 f(x)$
0	.25	0	0	0	0
1	.5	.5	.5	.5	.5
2	.25	.5	1.0	2.0	4
المجموع		$\mu = 1$	$\mu'_2 = 1.5$	$\mu'_3 = 2.5$	$\mu'_4 = 4.5$

(ب) الجدول التالي يحتوي على الحسابات اللازمة .

x	f(x)	x f(x)	$(x-\mu)$	$(x-\mu)f(x)$	$(x-\mu)^2 f(x)$	$(x-\mu)^3 f(x)$	$(x-\mu)^4 f(x)$
0	.25	0	-1	-.25	.25	-.25	.25
1	.5	.5	0	0	0	0	0
2	.25	.5	1	.25	.25	.25	.25
المجموع		$\mu = 1$		$\mu_1 = 0$	$\mu_2 = .5$	$\mu_3 = 0$	$\mu_4 = .5$

(ج) الجدول التالي يحتوي على الحسابات اللازمة .

x	f(x)	x f(x)	$x(x-1)f(x)$	$x(x-1)(x-2) f(x)$	$x(x-1)(x-2)(x-3)f(x)$
0	.25	0	0	0	0
1	.5	.5	0	0	0
2	.25	.5	.5	0	0
المجموع		$\mu = 1$	$\mu_{[2]} = .5$	$\mu_{[3]} = 0$	$\mu_{[4]} = 0$

(د) $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2} = \frac{.5}{(.5)^2} = 2,\ \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu^{3/2}} = 0, \quad \alpha_2 = 1\ \alpha_1 = 0.$

(٢-٥) المنوال والوسيط Mode and Median

يتناول هذا البند باختصار مقاييس أخرى للنزعة المركزية ، بخلاف المتوسط μ ، وهما المنوال والوسيط .

تعريف : المنوال هو القيمة التى عندها تكون دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي من النوع المتقطع X لها أكبر قيمة أي أن (أي قيمة أخرى = P (X ≥ (المنوال = X) P وهذا يعنى أن دالة كثافة الاحتمال قد يكون لها أكثر من منوال .

مثال (٢-٥٢) للمتغير العشوائي X فى مثال (٢-٧) والذي يمثل مجموع النقط على السطح العلوي للتردين فإن المنوال يساوي 7 لأن :

$P(X=7)=\frac{6}{36}>P$ (أي قيمة أخرى = X)

المنوال هنا وحيد unique.

مثال (٢ -٥٣) أوجد المنوال للدالة الآتية :

$$f(x)=(\tfrac{1}{2})^{x} \qquad x=1,2,3,....$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

الحل :

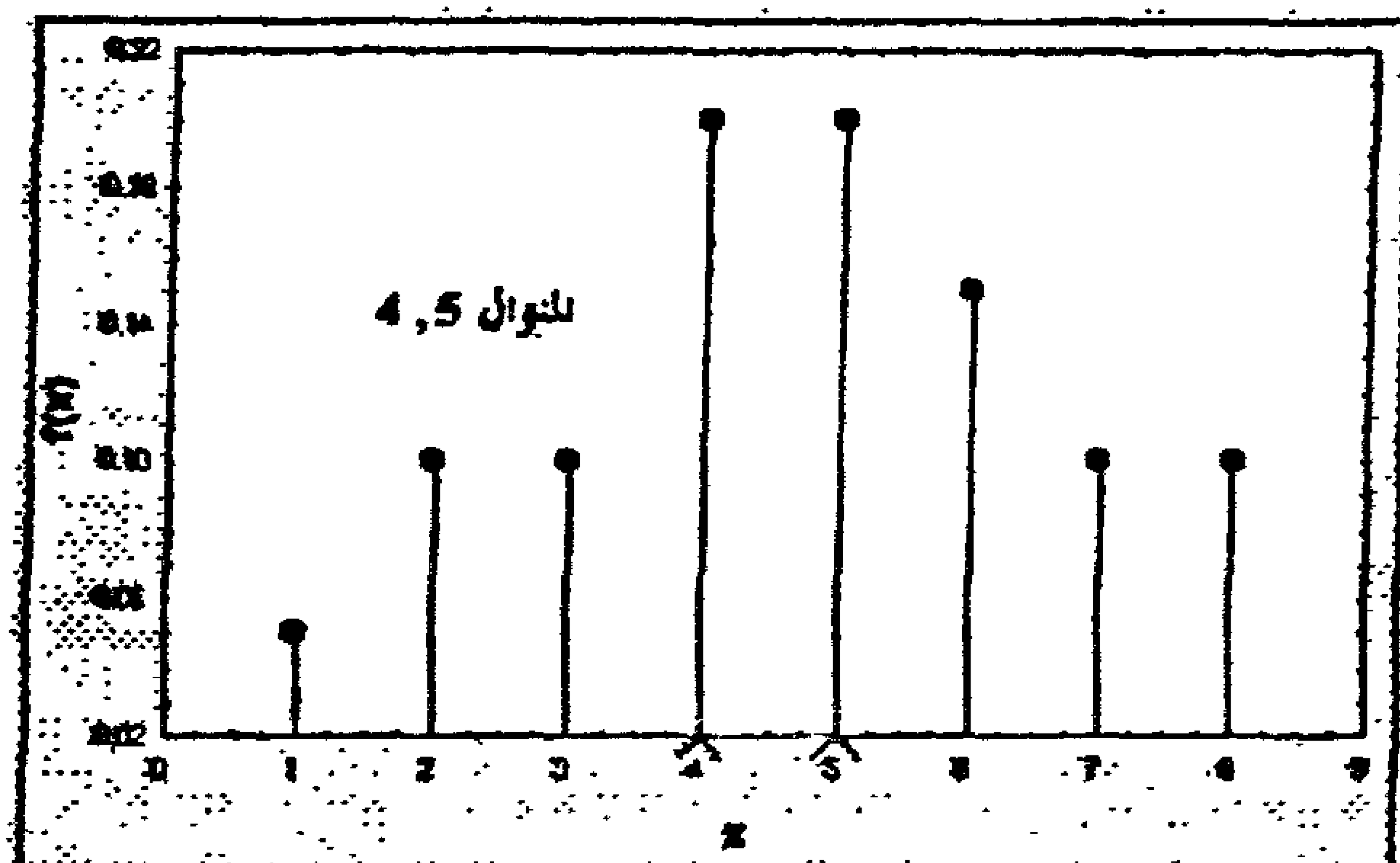
المنوال هو x = 1 وذلك لأن (أي قيمة أخرى = P (X > $P(X=1)=\frac{1}{2}$

مثال (٢-٥٤) أوجد المنوال للدالة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} .05 & x=1 \\ .1 & x=2,3 \\ .2 & x=4,5 \\ .15 & x=6 \\ .1 & x=7,8 \end{cases}$$

الحل :

المنوال هو x = 4, 5 أي أن التوزيع ثنائي المنوال unimodal. دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X موضحة فى شكل (٢-١٥) وموضح عليها المنوال :



شكل (٢- ١٥)

تعريف : الوسيط لمتغير عشوائي X هو القيمة x بحيث أن

$$P(X<x)\leq\frac{1}{2} \text{ and } P(X\leq x)\geq\frac{1}{2}$$

مثال (٢- ٥٥) إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا بدالة كثافة احتمال :

x	1	2	3	4
f(x)	0	½	½	0

أوجـد الوسيـط .

الحل :

$$P(X<2)=0\leq\frac{1}{2},$$

$$P(X\leq 2)=\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

أي أن x = 2 هو الوسيط .

أيضا :

$$P(X<3)=\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2},$$

$$P(X\leq 3)=1\geq\frac{1}{2}$$

أي أن $x = 3$ هو الوسيط . وعلى ذلك الوسيط أي قيمة فى الفترة المغلقة $2 \leq x \leq 3$.

مثال (٢-٥٦) أوجد الوسيط للمتغير X والذي له دالة كثافة الاحتمال :

$P(X=1)=.1\ ,\ P(X=2)=.2\ ,$
$P(X=3)=.3\ ,\ P(X=4)=.4$

بتطبيق القاعدة السابقة فإن الوسيط هو $x = 3$.

مثال (٢-٥٧) أوجد الوسيط للمتغير العشوائي X والذي له دالة كثافة الاحتمال :

$P(Y=1)=.1\ ,\ P(Y=2)=.4$
$P(Y=3)=.3\ ,\ P(Y=4)=.2$

الوسيط أي قيمة فى الفترة المغلقة $2\leq x\leq 3$.

<u>تمارين :</u>

-١- يقوم المسئولين بمستشفى بعمل برنامج يتضمن فحص أربعة مرضي يعانون من مرض ما. بعد أن يمكث المريض فى المستشفى لمدة أربعة أشهر يتم التشخيص وأقرار ما إذا كان المريض قد شفى (R)أم لا (N) .

(أ) ما هو فضاء العينة لهذه التجربة العشوائية ؟

(ب) بفرض أن المسئولين فى المستشفى يفترضون أن التشخيص للمرضى الأربعة مستقل وأن $P(R)=.75$ أوجد الاحتمال لكل نقطة فى فضاء العينة .

(ج)أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X والذي يمثل عدد المرضى الذين يشفون .

(د) أوجد $F(x)$ للمتغير X .

-٢- يعرض فى مركز تجاري 10 بطاريات . إذا اختيرت عينة من $n = 2$ من البطاريات عشوائيا وبدون إرجاع لاستخدامها في تشغيل جهاز الراديو. إذا كان 3 من العشرة بطاريات تالفة وبفرض أن X يمثل عدد البطاريات التالفة فى العينة . أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير X ودالة التوزيع .

-٣- إذا كان X يمثل عدد الفيضانات في فصل بارد لها دالة كثافة الاحتمال .

الحادثة البسيطة	{X=0}	{X=1}	{X=2}	{X = 3}	{X = 4}	{X = 5}	{X = 6}
الاحتمال	.2466	.3452	.2417	.1127	.0395	.0110	.0033

أوجد F(x) للمتغير العشوائي X وأوجد $P(X \geq 2)$ و $P(1 < X \leq 4)$ وتأكد أن الدالة تمثل دالة كثافة احتمال .

-٤- إذا كان I_A دليل لحادثة A.أثبت أن $P(I_A = 1) = P(A)$, $P(I_A = 0) = P(A^c)$

-٥- إذا كان X هو عدد الصور التي تظهر عند إلقاء أربع عملات متزنة. أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X.

-٦- اختيرت ثلاث كرات ، بدون إرجاع ، من وعاء يحتوى على 8 كرات حمراء و 8 كرات سوداء . الكرة الحمراء تساوى نقطة والكرة السوداء تساوى نقطتين فإذا كان X هو العدد الكلي من النقط للثلاث كرات . أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير X.

-٧- إذا كان X يمثل الفرق بين عدد الصور وعدد الكتابة عند إلقاء n من العملات . أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X.

-٨- يحتوي وعاء A على كرتين لونهما أبيض وأربع كرات حمراء . ويحتوي الوعاء B على 8 كرات بيضاء وأربع كرات حمراء ويحتوي الوعاء C على كرة بيضاء وثلاث كرات حمراء . سحب وعاء عشوائيا ثم سحبت كرة من الوعاء وإذا كان X يمثل عدد الكرات البيضاء أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X.

-٩- إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا له دالة كثافة الاحتمال f(x).

(أ) إذا كانت $f(x) = k(1/2)^x, \quad x = 1, 2, 3$

$= 0$ elsewhere.

أوجد قيمة k .

(ب) إذا كانت

$$f(x)=k[(\frac{1}{2})^x-\frac{1}{2}] \qquad x=0,1,2$$

هل الدالة احتمالية لأي قيمة من k .

-١٠- لكل مما يأتي ، أوجد الثابت c بحيث أن f(x) تحقق شروط دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي X .

(أ) $f(x)=c\ (\frac{2}{3})^x, \quad x=1,2,3,...$

zero elsewhere.

(ب) $f(x)=c\left(\frac{3}{4}\right)^x, x=0,1,2,3, \frac{81}{256}, x=4,$

zero elsewhere .

-١١- إذا كانت $f(x)=x/15, x=1,2,3,4,5,$

zero elsewhere.

دالة كثافة احتمال لمتغير عشوائي X أوجد :

$P(X=1 \text{ or } 2), P(\frac{1}{2}<X<\frac{2}{5}),$

$P(1\le X\le 2).$

-١٢- إذا كانت $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{32}{31}\right), \ x=1,2,3,4,5,$

zero elsewhere.

دالة كثافة احتمال لمتغير عشوائي X وإذا كان :

$$B_1=\{x|1<x<2\}, \ B_2=\{x|0<x<2\}$$

أوجد $P(B_1\cap B_2), P(B_1\cup B_2)$

-١٣- إذا كانت f(x) دالة كثافة احتمال لمتغير عشوائي X . أوجد دالة التوزيع F(x) للمتغير X ومثلها بيانيا .

(أ) $f(x)=1 \ , \ x=0 \ , \text{ zero elsewhere} .$

(ب) $f(x)=\frac{1}{3}$, x = -1,0,1, zero elsewhere .

(ج) $f(x)=x/21$, x =1,2,3,4,5,6, zero elsewhere .

(د) $f(x)=x/28$, x=1,2,3,4,5,6,7, zero elsewhere

(هـ) $f(x)=\frac{1}{10}$,1,2,...,9, zero elsewhere .

(ز) $f(x)=c\,x^2$,x = 1,2,3,4, zero elsewhere.

-١٤- لتكن دالة التوزيع لمتغير عشوائي X على الشكل :

$$F(x)=0 \quad , \quad x<-1,$$
$$=\frac{x+2}{4}, -1\le x<1,$$
$$=1, \qquad 1\le x.$$

أوجد : (أ) $P(-\frac{1}{2}<X\le\frac{1}{2})$

(ب) $P(X=0)$

(ج) $P(X=1)$

(د) $P(2<X\le 3)$

(هـ) مثل الدالة بيانيا .

-١٥- إذا كانت دالة التوزيع لمتغير عشوائي X هي :

$$F(x)=.0 \qquad x<8$$
$$=.1 \qquad 8\le x<9$$
$$=.4 \qquad 9\le x<10$$
$$=.7 \qquad 10\le x<11$$
$$=.9 \qquad 11\le x<12.5$$
$$=1 \qquad x\ge 12.5.$$

(ا) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

(ب) ما هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير X.

(ج) استخدم دالة التوزيع في إيجاد $P(10\le X\le 11.5)$ و $P(X>10.8)$ و $P(9<X\le 11.5)$ و $P(X\le 9.5)$.

-١٦- إذا كان دالة التوزيع لمتغير عشوائي الشكل :

$$F(x)=0 \qquad x<0$$
$$=.9 \qquad 0\le x<1$$
$$=1 \qquad x>1.$$

(أ) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

(ب)استخدم قيم $F(x)$ فى إيجاد $P(\frac{1}{4}\le X\le\frac{3}{4})$.

(ج)استخدم قيم $F(x)$ فى إيجاد $P(X>\frac{1}{2})$.

-١٧- إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا له دالة كثافة الاحتمال :

x	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(أ) أوجد المتوسط والوسيط والمنوال للمتغير العشوائي X.

(ب) أوجد التباين للمتغير X باستخدام صيغتين مختلفتين وأثبت أن النتيجة واحدة .

-١٨- اختير رقم صحيح عشوائيا من بين الأرقام الصحيحة 8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الأرقام الأعداد التي تقبل القسمة على الرقم المختار بدون باقي (على سبيل المثال إذا اختير الرقم 6 فإن x = 4 لأنه ، يقبل القسمة على 1 ,2 ,3 ,6 بدون باقي .

-١٩- إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x)=c(8-x) \qquad x=0,1,2,3,4,5$$
$$=0 \text{ elsewhere.}$$

(أ) أوجد الثابت c

(ب) أوجد $F(x)$ للمتغير X

(ج) أوجد $P(X>2)$

(د) أوجد $E(x)$

-٢٠- إذا كان X متغيرا عشوائيا (غير سالب) متقطعا له $f(x)$ على الشكل :

$$f(x)=1-(\frac{1}{2})^{x+1} \qquad x=0,1,2,...$$

$= 0 \text{ elsewhere}.$

(أ) أوجد $f(x)$ (ب) أوجد $P(0 < X \leq 20)$

(ج) أوجد $P\,(X =$ زوجى $)$

-٢١- أي من الدوال التالية تمثل دالة كثافة احتمال :

(أ) $f(x) = (\frac{1}{4})^x (\frac{1}{2})^{1-|x|} \qquad x = -1,1$

$= 0 \text{ elsewhere}.$

(ب) $f(x) = \binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad x = 0,1,2,$

$= 0 \text{ elsewhere}.$

(ج) $f(x) = \frac{(1-x)}{4}, x = -1,0,2$

$= 0 \text{ elsewhere}.$

-٢٢- يحتوى وعاء على 3 كرات مرقمة بالرقم 1 وكرتين مرقمة بالرقم 2 وكرة واحدة مرقمة بالرقم 3. سحبت كرتين بدون إرجاع . إذا كان X_i يمثل العدد الذي يظهر على الكرة رقم i حيث $i = 1,2,$ أوجد

$Var(X_2), Var(X_1)$

-٢٣- إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا له دالة كثافة الاحتمال :

$f(x) = \frac{x}{8} \qquad x = 1,2,5$

$= 0 \text{ elsewhere}.$

أوجد $E(2X + 3)$

-٢٤- إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال :

x	0	1	2	3	4
f(x)	.2	.3	.2	.2	.1

(أ) أوجد $E(X)$ (ب) أوجد $Var(X)$.

-٢٥- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي X على الشكل :

$$f(x)=(\frac{1}{2})^x(\frac{32}{31}) \qquad x=1,2,3,4,5$$
$$=0 \quad \text{elsewhere}.$$

(ا) أثبت أن $\sum_{x=1}^{5} f(x)=1$.

(ب)أوجد دالة التوزيع F(x) للمتغير العشوائي X .

(ج)أوجد $P(X\geq 3), P(2\leq x\leq 4)$ و $P(X<4)$.

-٢٦- إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x)=(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^x \qquad x=0,1,2,3$$
$$=\frac{81}{256} \qquad x=4$$
$$=0 \quad \text{elsewhere}.$$

(ا) أثبت أن $\sum_{x=0}^{4} f(x)=1$

(ب)أوجد F(x) للمتغير X.

(ج)أوجد $P(X\geq 3), P(1\leq x\leq 5)$ و $P(X<3)$

-٢٧- لمتغير عشوائي متقطع دالة كثافة احتمال على الشكل :

$$f(x)=c\ x^2 \qquad x=1,2,3,4$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

(ا) أوجد قيمة الثابت c .

(ب)أوجد F(x) للمتغير X .

(ج) أوجد $E(X), Var(X)$.

٢٨- إذا كان X متغيرا عشوائيا بحيث أن $P(X = x) > 0$ إذا كـــان $X = 1,2,3,4$ وغير ذلك $P(X = x) = 0$ بفرض أن $f(x) = .05\ x(1 + x)$ عند النقـــط $x = 1,2,3,4$.

(أ) أوجد بيان $F(x)$, $f(x)$.

(ب) أوجد $E(x)$.

٢٩- إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال :

X	-3	-1	0	2	$2\sqrt{2}$
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{6-3\sqrt{2}}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3\sqrt{2}}{16}$

(أ) أوجد العزوم الأربعة الأولي حول الصفر .

(ب) أوجد العزوم الأربعة الأولي حول المتوسط .

(ج) مثل الدالة $f(x)$ بيانيا .

الفصل الثالث

المتغيرات العشوائية المتصلة
وتوزيعاتها الاحتمالية

Continuous Random Variables
And Their Probability Distributions

(٣-١) مقدمـــة Introduction

بفرض أن فضاء العينة S يمثل بفترة ، فئة من القيم الغير منتهية والغير قابلة للعد ، وإذا كـــان $A \subset S$,R يمثل فضاء المتغير العشوائي و $B \subset R$ وإذا كانت P دالـــة الفئـــة الاحتماليـــة المعرفة على الفضاء S وإذا كان $A = \{a|\ a \in S \text{ and } X(a) \in B\}$ فإن :

$$P(X \in B) = P_X(B) = P(A).$$

حيث $P(X \in B)$ هو الاحتمال المعين للفئة B و والمقدر بدالة الفئة الاحتمالية $P_X(B)$ والمتغير العشوائي X , $P(A)$ هي دالة الفئة الاحتمالية المعرفة على الفئات الجزئية A مـن الفضاء S .

مثال (٣-١) بفرض أن نتيجة تجربة عشوائية هي نقطة في الفترة (1 , 0) حيث :

$$S = \{a|\ 0 < a < 1\}.$$

وبفرض أن دالة الفئة الاحتمالية المعرفة على الفضاء S هي :

$$P(A) = \int_A dz.$$

على سبيل المثال إذا كانت $A = \{a|\ \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}\}$ فإن :

$$P(A) = \int_{1/4}^{1/2} dz = \frac{1}{4}.$$

بفرض أن $X(a) = a + 2$. تبعا لذلك فإن فضاء المتغير العشوائي X سوف يكون :

$$R = \{x|\ 2 < x < 3\}.$$

والمطلوب تقدير دالة الفئة الاحتمالية للمتغير X والمسماة $P(B)$ حيث $B \subset R$.

بفرض أن الفئة B على الشكل :

$$B = \{x|\ 2 < x < b\}.$$

حيث $2 < b < 3$. الآن X سوف تكون بين 2 , b عندما وفقط إذا كان :

$$a \in A = \{a|\ 0 < a < b - 2\}.$$

وعلى ذلك فإن :

$$P_X(B) = P(B) = P(A) = \int_0^{b-2} dz.$$

بوضع $x = z + 2$ فإن :

$$P_X(B) = P(B) = \int_2^{b} dx = \int_B dx.$$

حيث :

$$B = \{x | \ 2 < x < b\}$$

وهذا يتحقق لكل فئة $B \subset R$ تحت شرط أن التكامل :

$$P(B) = \int_B dx$$

يكون موجود .

في الإحصاء ، عادةً يكون الاهتمام بدالة الفئة الاحتمالية للمتغير العشوائي X أكثر من الاهتمام بدالة الفئة الاحتمالية P(A) والمعرفة على الفضاء S. وعلى ذلك سوف نبدأ من الآن بافتراض دالة الفئة الاحتمالية للمتغير العشوائي X . وسوف نوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٣-٢) بفرض أن دالة الفئة الإحتمالية P (B) للمتغير العشوائي X هي :

$$P(B) = \int_B f(x) \ dx$$

حيث :

$$f(x) = \frac{3 \ x^2}{8}, x \in R = \{x | \ 0 < x < 2\}.$$

ليكن :

$$B_1 = \{x | \ 0 < x < \frac{1}{2}\} \ ,$$

$$B_2 = \{x | \ 1 < x < 2\}.$$

فئتين معرفتين على الفضاء R . اذن:

$$P(B_1) = P(X \in B_1) = \int_{B_1} f(x) \ dx = \int_0^{1/2} \frac{3 \ x^2}{8} \ dx = \frac{1}{64},$$

$$P(B_2) = P(X \in B_2) = \int_{B_2} f(x) \ dx = \int_1^{2} \frac{3 \ x^2}{8} \ dx = \frac{7}{8}.$$

لحساب $P(B_1 \cup B_2)$ فإننا نعلم أن $B_1 \cap B_2 = \phi$ وعلى ذلك :

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{57}{64}.$$

(٣- ٢) المتغيرات العشوائية المتصلة

Continuous Random Variables

بفرض أن R يمثل فضاء المتغير العشوائي X في البعد الأول وإذا كان :

$$\int_R f(x)\ dx = 1$$

حيث (أ) $f(x) > 0\ ,\ x \in R$

(ب) f(x) لها على الأكثر عدد محدود من عدم الاتصال في كل فترة محدودة تمثل فئة جزئية من R وإذا كانت دالة الفئة الاحتمالية $B \subset R , P(B)$ ، يمكن التعبير عنها كالآتي :

$$P(B) = P(X \in B) = \int_B f(x)\ dx\ .$$

في هذه الحالة يقال أن X متغيراً عشوائياً متصلاً وله توزيع من هذا النوع . ومن أمثلة المتغيرات العشوائية المتصلة كمية زيت البترول المستخرجة من بئر بترول ، كمية الكحل المقطرة في عملية التقطير ، ذكاء طفل ، المسافة التي تقطعها سيارة بجالون بنزين ، ضغط الدم ، الطول ، الوزن .

مثال (٣- ٣) إذا كان فضاء متغير عشوائي متصل هو :

$$R = \{x|\quad 0 < x < \infty\}$$

وإذا كان :

$$f(x) = e^{-x}\quad ,\quad x \in R ,$$

فإن :

$$P(X \in B) = \int_B e^{-x}\ dx\ .$$

وإذا كان :

$$B = \{x|\ 0 < x < 1\}\ ,$$

فإن :

$$P(X \in B) = \int_0^1 \bar{e}^x \, dx = 1 - \bar{e}^1.$$

مثال (٣-٤) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً بفضاء $R = \{x | 0 < x < 1\}$ وله دالــة فئة احتمالية على الشكل :

$$P(B) = \int_B f(x) \, dx \ ,$$

حيث :

$$f(x) = c \ x^2 , \quad x \in R \ ,$$

وحيث أن $P(B)$ دالة فئة احتمالية و $P(R) = 1$ فإن الثابت c يمكن تقديره كالآتي :

$$\int_0^1 c \ x^2 \, dx = 1,$$

$$c = 3.$$

يتضح من المثال السابق أن الاحتمال $P(X \in A)$ يقدر من الدالة $f(x)$ والمسماة دالــة كثافــة الإحتمال (p.d.f.) كما أن $f(x)$ لابد أن تكون أكبر من الصفر وتكاملــها علــى الفضــاء R يساوي 1. من الآن سوف نبسط الصيغ المستخدمة كما يتضح من المثــال التــالي . بفــرض فضاء المتغير العشوائى X هو $R = \{x | 0 < x < \infty\}$ وإن دالة كثافته الاحتماليـــة هـــي $f(x) = \bar{e}^x \quad , \quad x \in A$ فإنه يمكننا كتابة المعلومات السابقة على الصورة :

$$f(x) = \bar{e}^x \quad , \quad 0 < x < \infty$$
$$= 0 \ \text{elsewhere} .$$

أي إننا سوف نعتبر الفضاء $R = \{x | -\infty < x < \infty\}$

وعلى ذلك :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \, dx + \int_0^{\infty} \bar{e}^x \, dx = 1.$$

وعلى ذلك يمكننا استبدال $\int_R f(x) \, dx$ بـــ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$.

إذا كانت $f(x)$ دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل وكانت B الفئة :

$$B = \{x | a < x < b\}$$

فإن :

$$P(B) = P(X \in B),$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

أيضا إذا كانت $B = \{x |\ x = a\}$ فإن :

$$P(B) = P\ (X \in B) = P(X = a) = \int_a^a f(x)\ dx = 0,$$

حيث أن $\int_a^a f(x)\ dx$ يعرف من علم التكامل بأنه يساوي صفر وعلى ذلك لمتغير عشوائي X ، فإن الاحتمال لفئة تحتوي على نقطة واحدة هو الصفر. هذه الحقيقة تسمح لنا بكتابة :

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \le X < b) \\ &= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) \end{aligned}$$

الحقيقة السابقة تسمح لنا بتغيير قيمة لدالة الكثافة الاحتمالية وذلك لمتغير عشوائي X من النوع المتصل عند نقطة واحدة بدون التأثير على توزيع X . فعلى سبيل المثال ، دالة كثافة الاحتمال :

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{e}^{x} \qquad 0 < x < \infty \\ &= 0 \ \text{elsewhere}. \end{aligned}$$

يمكن كتابتها على الشكل :

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{e}^{x} \qquad 0 \le x < \infty \\ &= 0 \ \text{elsewhere}. \end{aligned}$$

بدون تغيير أي من P(B). نلاحظ أن الدالتين السابقتين يختلفان فقط عند $x = 0$ حيث $P(X = 0) = 0$. عموماً ، إذا كان لدينا دالتين كثافة احتمال لمتغيرين عشوائيين من النوع المتصل تختلفان فقط في فئة احتمالها يساوي صفر، فإن الدالتان يكونان متماثلتان وهذا لا يتحقق إذا كانت المتغيرات العشوائية من النوع المتقطع .

مثال (٣ — ٥) بفرض أن الشخص I يستقل وسيلة النقل العام في الذهاب إلى عمله . وبفرض أن كل خمسة دقائق تصل سيارة إلى المحطة .إذا كان X متغيراً عشوائياً

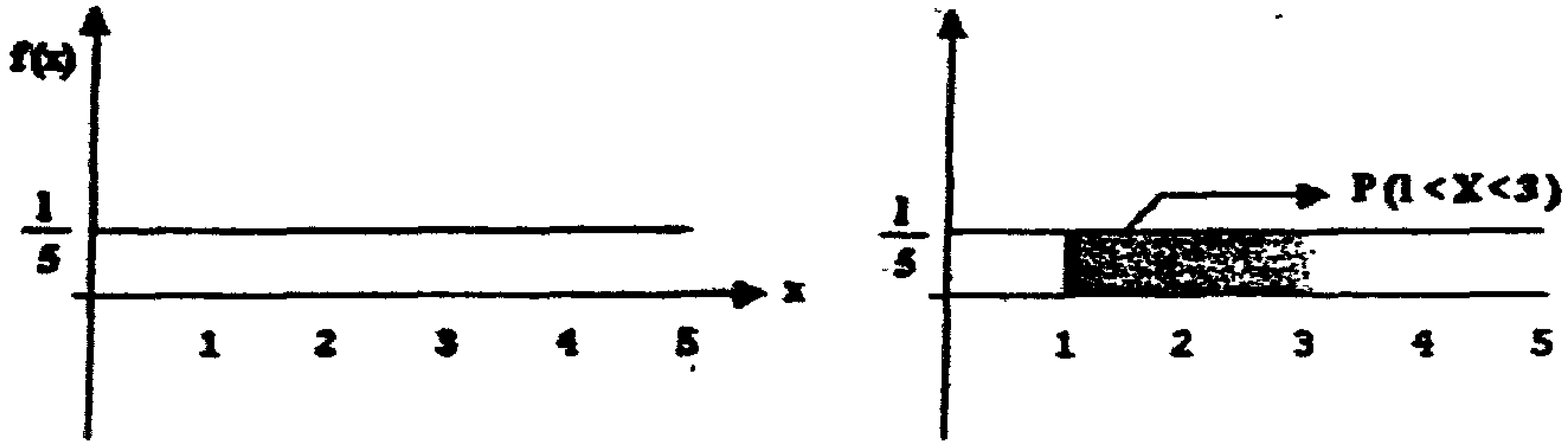
متصلاً يمثل زمن الانتظار لهذا الشخص على المحطة في الفترة [0 , 5] بدالة كثافة احتمال :

$$f(x)=\frac{1}{5} \qquad 0\le x\le 5$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ موضحة بيانيا في شكل (٣-١) ، من الواضح أن $f(x)\ge 0$ وأن المساحة تحت المنحنى تساوي $1=5\left(\frac{1}{5}\right)$. احتمال أن I سوف ينتظر من 1 إلى 3 دقائق هو :

$$P(1\le X\le 3)=\int_1^3 f(x)\ dx=\int_1^3 \frac{1}{5}\ dx=\frac{x}{5}\Big|_1^3=\frac{2}{5}.$$

هذا الاحتمال موضح في شكل (٣-١) .



شكل (٣-١)

وبنفس الشكل :

$$P(X\ge 4)=\int_4^{\infty} f(x)\ dx=\int_4^5 \frac{1}{5}\ dx+\int_5^{\infty} 0\ dx=\frac{x}{5}\Big|_4^5=\frac{1}{5}.$$

التوزيع السابق يسمى التوزيع المنتظم .

مثال (٣-٦) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = .15\ \bar{e}^{.15(x-0.5)} \qquad x \geq 0.5$$
$$= 0 \ \text{elsewhere} .$$

(أ) المطلوب إثبات $\int_{.5}^{\infty} f(x) = 1$.

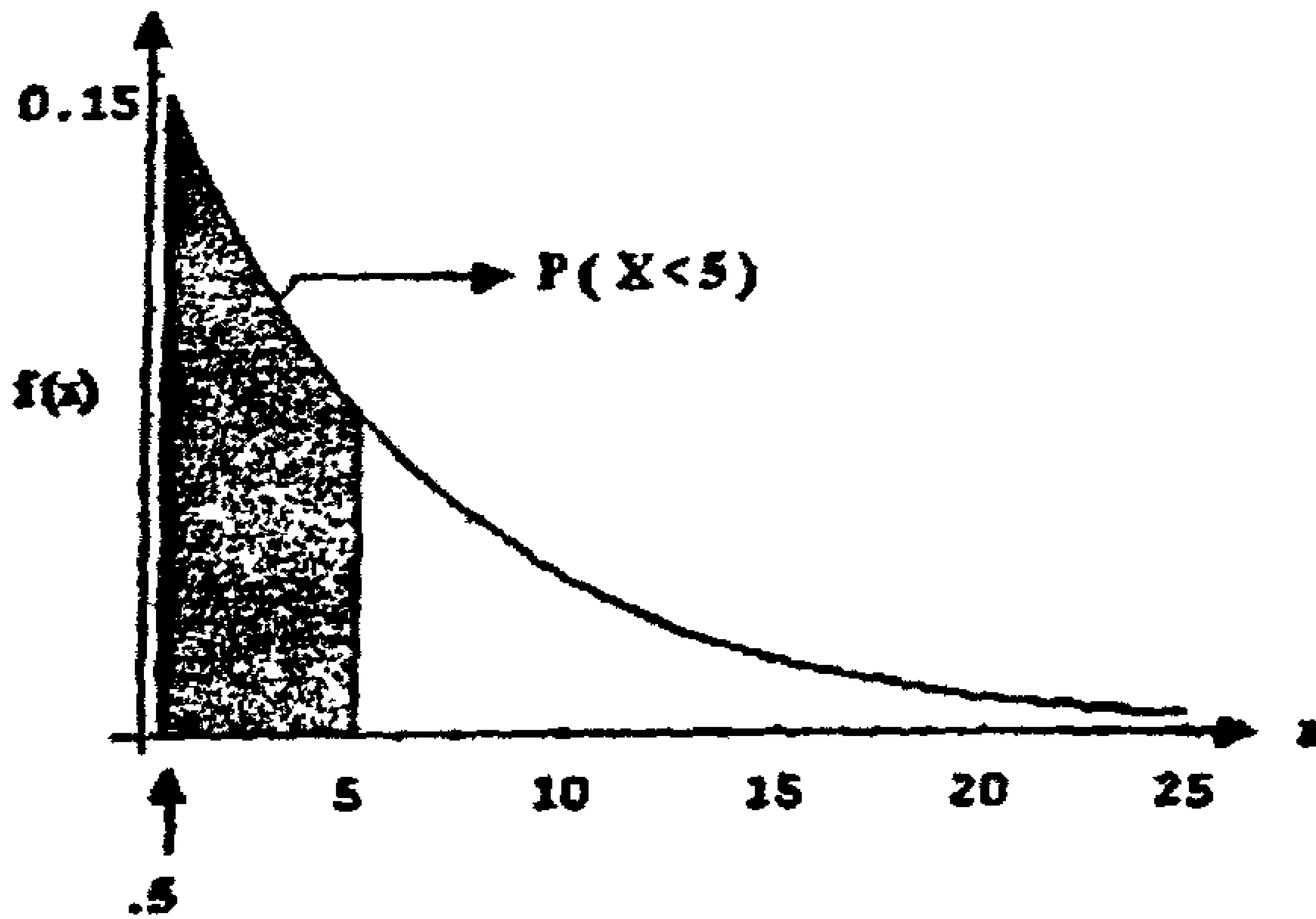
(ب) أوجد $P(X \leq 5)$ ووضحه بيانياً .

الحل : (أ)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{.5}^{\infty} .15\ \bar{e}^{.15(x-0.5)}\ dx = .15\ e^{.075} \int_{5}^{\infty} \bar{e}^{.15x} dx$$
$$= .15\ e^{.075} \cdot \frac{1}{.15}\ \bar{e}^{(.15)(.5)} = 1 .$$

(ب)

$$P(X \leq 5) = \int_{-\infty}^{5} f(x)\ dx = \int_{.5}^{5} .15\ \bar{e}^{.15(x-.5)}\ dx$$
$$= .15\ e^{.075} \int_{.5}^{5} \bar{e}^{.15x}\ dx = .15\ e^{.075} \left(-\frac{1}{.15} \bar{e}^{.15x} \Big|_{.5}^{5} \right)$$
$$= e^{.075}(-\bar{e}^{.75} + \bar{e}^{.075}) = 1.078(-.472 + .928) = .491.$$



شكـل (٣-٢)

مثال (٣ -٧) تحقق من أن الدوال الآتية تمثل دوال احتمالية :

(أ)

$$g_1(x) = 4x - 2x^2 - 1 \quad 0 \le x \le 2$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

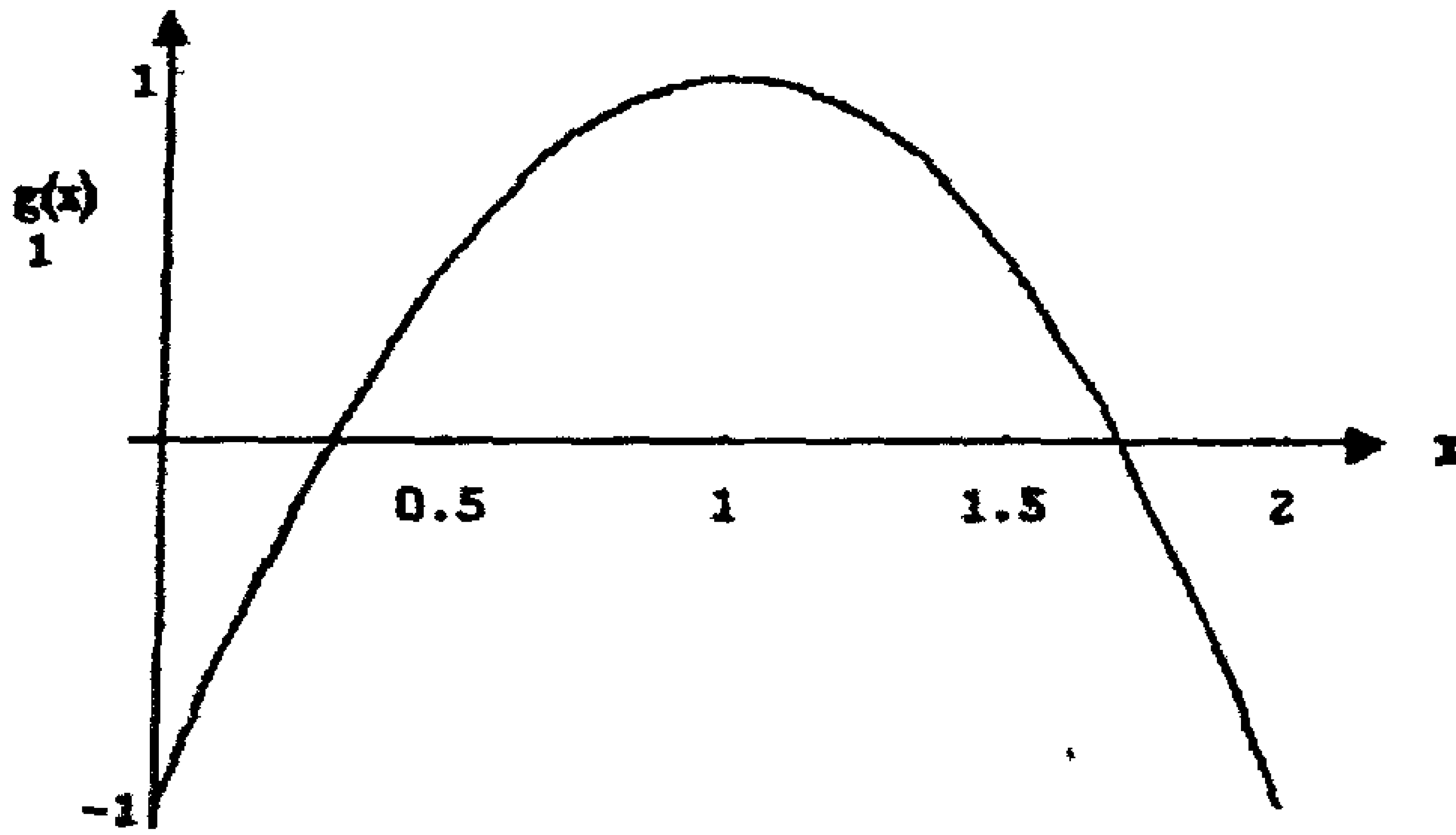
(ب)

$$g_2(x) = 4x - 2x^2 \quad 0 \le x \le 2$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

(ج)

$$g_3(x) = \frac{3}{8}(4x - 2x^2) \quad 0 \le x \le 2$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

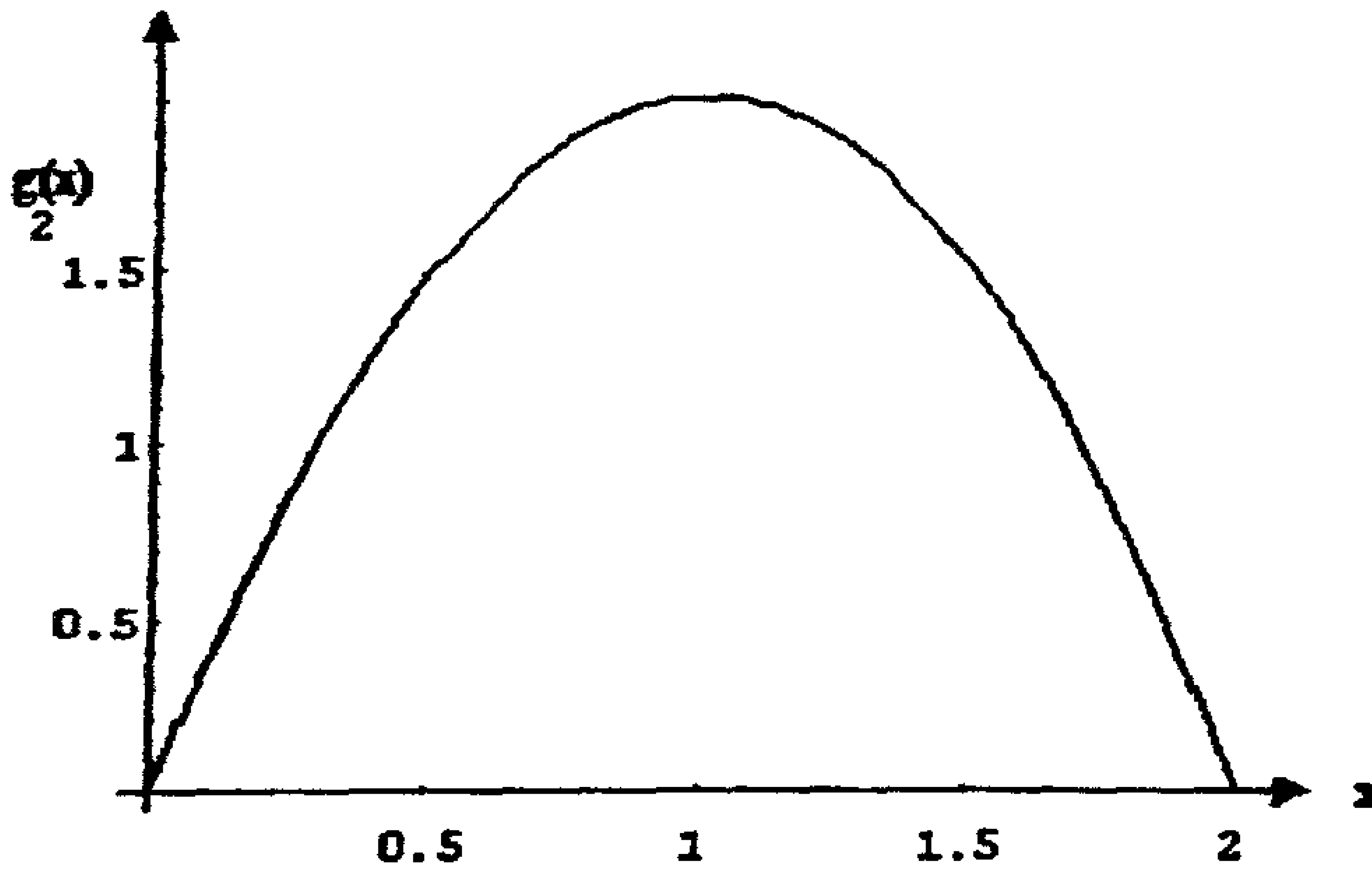
(أ) الدالة $g_1(x)$ سالبة لبعض قيم x , $0 \le x < \frac{1}{4}$(على سبيل المثـــال) وعلـــى ذلـــك $g_1(x)$ لا تمثل دالة كثافة احتمال كما يتضح من شكل (٣-٣) .



شكــل (٣-٣)

(ب) الدالة $g_2(x)$ موجبة لأي قيمة للمتغير X في الفترة $0 \le x \le 2$ وذلك لأن $4x - 2x^2 = 2x(2-x)$ وبما أن $0 \le x \le 2$ فإن $2 - x \ge 0$ وبالتالي $g_2(x) \ge 0$ ، ولكن $\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)\ dx = \int_{0}^{2} (4x - 2x^2)dx = \frac{8}{3} \ne 1$

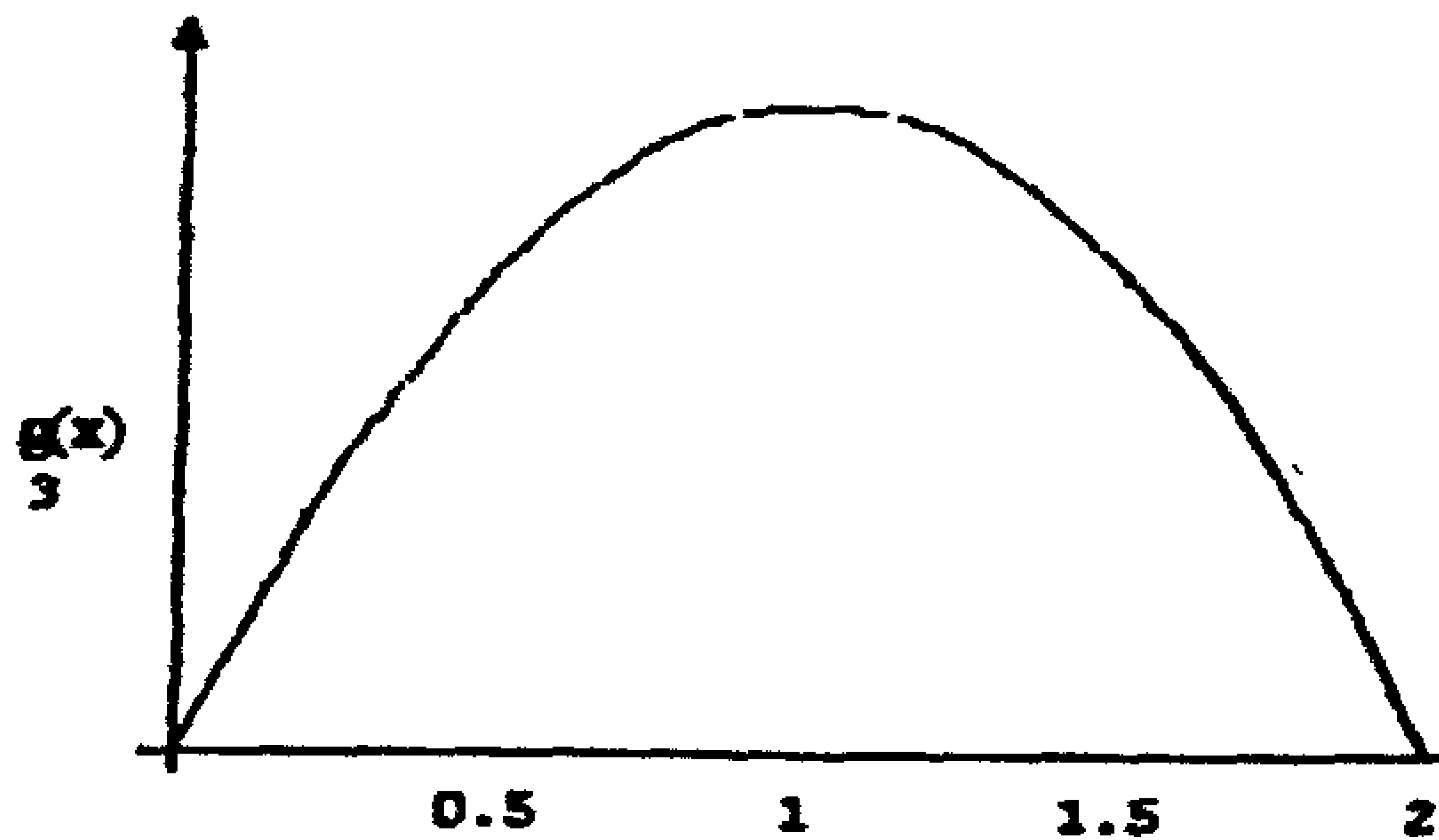
ولذلك $g_2(x)$ لا تمثل دالة كثافة احتمال . بيان $g_2(x)$ موضح في شكل (٣-٤) .



شكل (٣-٤)

(ج) الدالة $g_3(x)$ تمثل دالة كثافة احتمال لأن $g_3(x) \ge 0$ كما أوضحنا في (ب) كما أن $\int_{-\infty}^{\infty} g_3(x)dx = 1$. بيان $g_3(x)$ موضح في شكل (٣-٥) .

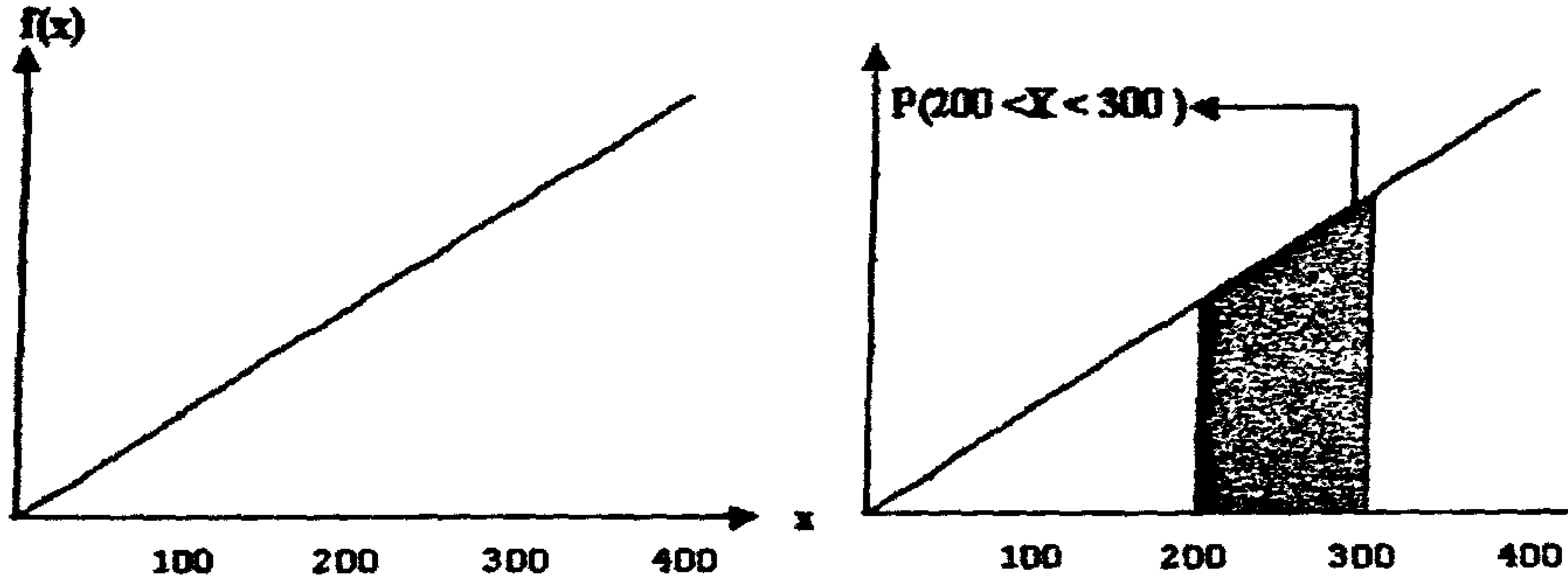
شكل (٣-٥)



مثال (٣-٨) في مركز تجاري لبيع اللحوم المحفوظة يتوفر 400 رطل من اللحم يومياً. بفرض أن X هو وزن اللحم المباع يومياً فإن دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير العشوائي هي :

$$f(x) = (1.25)10^{-5}\ x \qquad 0 \le x \le 400$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

بيان f (x) موضح في شكل (٣ - ٦) .



شكل (٣-٦)

يلاحظ أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{400} (1.25)10^{-5}x\ dx + \int_{400}^{\infty} 0\ dx$$

$$= (1.25)10^{-5}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{400} = 1,$$

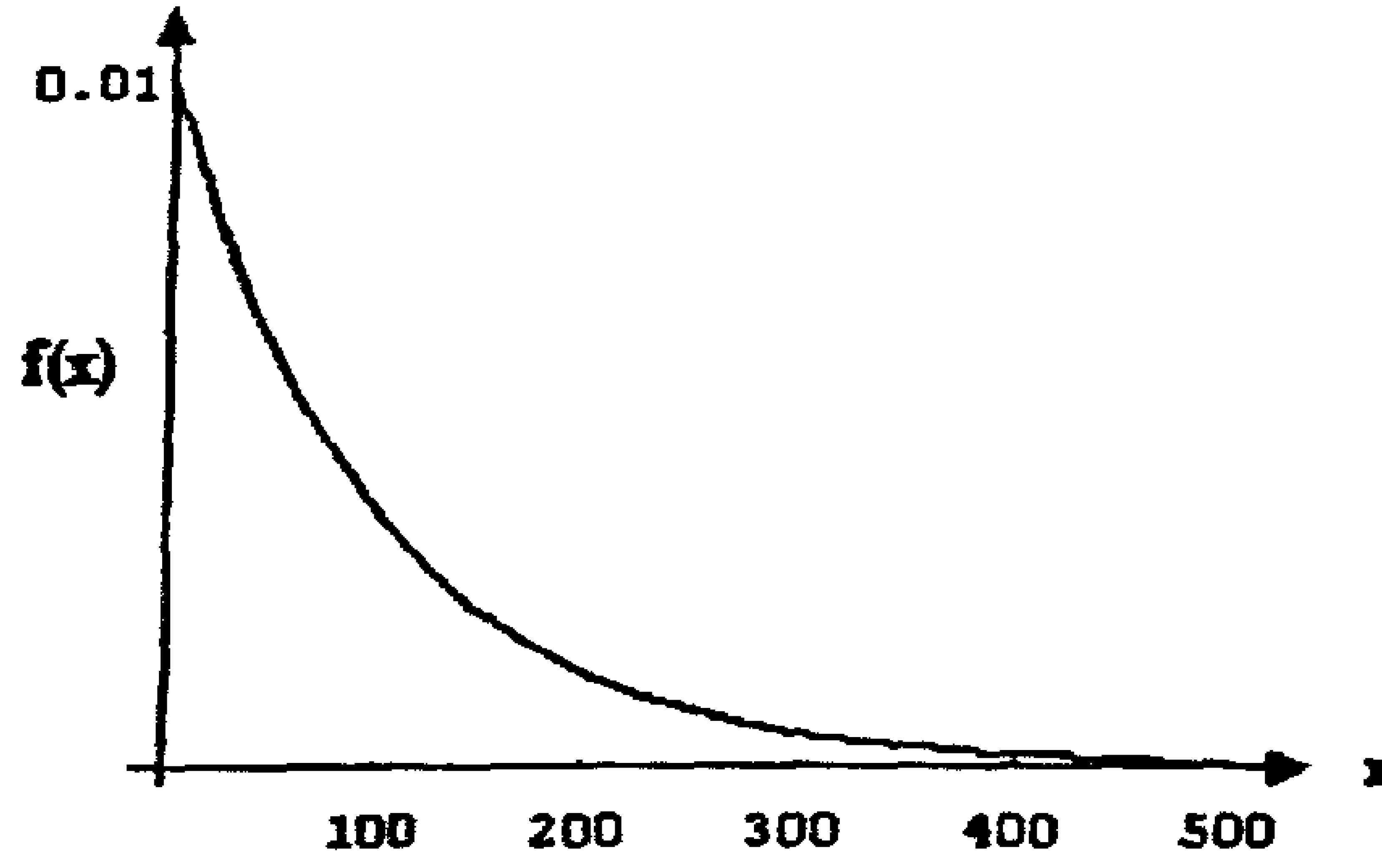
$$P(200 \le X \le 300) = \int_{200}^{300} (1.25)10^{-5}x\ dx = (1.25)10^{-5}\frac{x^2}{2}\Big|_{200}^{300} = .3125.$$

هذا الاحتمال موضح في شكل (٣-٦) .

مثال (٣ -٩) إذا كان زمن الفشل لنوع من الإبر الماسية المستخدمة في الجراماقون (جهاز تسجيل) لها دالة كثافة احتمال كالتالي :

$$f(x)=\begin{cases}(1/100)\ \bar{e}^{x/100} & x\geq 0\\ 0 \ \text{elsewhere.} & x<0\end{cases}$$

بيان الدالة f(x) موضح في شكل (٣-٧) .



شكل (٣-٧)

الاحتمال (P (X > 150 هو :

$$\int_{150}^{\infty} f(x)\ dx=\int_{150}^{\infty}\frac{1}{100}\ \bar{e}^{(x/100)}dx=-\bar{e}^{(x/100)}\ \Big|_{150}^{\infty}=\bar{e}^{1.5}=.223.$$

مثال (٣- ١٠) ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x)=2\ x \quad 0<x<1$$
$$=0\ \text{elsewhere}.$$

أوجد :

$$P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}),$$
$$P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}).$$

الحل :

$$P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}) = \int_{1/2}^{3/4} f(x)\ dx = \int_{1/2}^{3/4} 2x\ dx = \frac{5}{16},$$
$$P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\ dx$$
$$= \int_{-1/2}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} 2x\ dx$$
$$= 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

مثال (٣-١١) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً يمثل زمن الفشل لصمام كهربي وله دالة كثافة احتمال :

$$f(x) = 0 \qquad\qquad x < 0$$
$$= \frac{1}{1000}\ \bar{e}^{(x/1000)} \qquad x \geq 0$$

أوجد (أ)

$$P(100 < X < 1000)$$

(ب) $P(X > 1000)$

الحل : (أ)

$$P(100 < X < 1000) = \int_{100}^{1000} f(x)\ dx = \frac{1}{1000}\int_{100}^{1000} \bar{e}^{x(/1000)}dx$$
$$= -\bar{e}^{(x/1000)}\ \Big|_{100}^{1000} = \bar{e}^{.1} - \bar{e}^{1} = .537,$$

(ب)

$$P(X>1000)=\int_{1000}^{\infty} f(x)\ dx$$

$$=\frac{1}{1000}\int_{1000}^{\infty} \bar{e}^{(x/1000)}dx$$

$$=-\bar{e}^{(x/1000)}\ \Big|_{1000}^{\infty}=\bar{e}^{1}=.368.$$

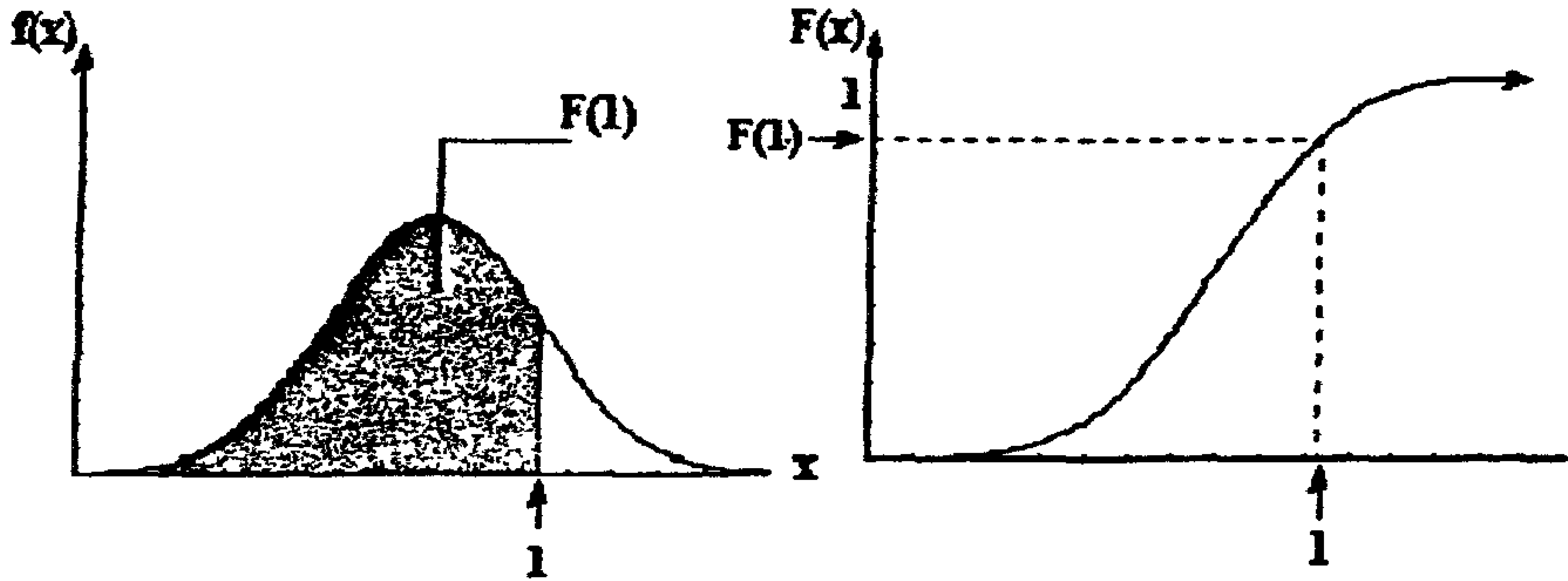
(٣-٣) دالة التوزيع The Distribution Function

عرفنا من الفصل الثاني أن دالة التوزيع لمتغير عشوائي متقطع $F(x)$ ، لأي عـدد حقيقي ، x ، هي $P(X \le x)$ ويمكن الحصول عليها بجمع $f(y)$ على جميع قيم y التـي تحقق الشرط أن $y \le x$. أيضا فإن دالة التوزيع لمتغير عشوائى متصل هي $P(X \le x)$ ولكن يمكن الحصول عليها بتكامل دالة كثافة الاحتمال $f(y)$ من $-\infty$ حتى x .

تعريف : دالة التوزيع $F(x)$ لمتغير عشوائي متصل لأي عدد حقيقى x تعرف كالتالي :

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\ dy.$$

تمثل الدالة $F(x)$ لأي عدد حقيقي x المساحة تحت المنحنى لدالة كثافة الاحتمـال على يسار العدد x كما هو موضح في شكل (٣-٨) . أيضا يلاحظ من بيان $F(x)$ أن $F(x)$ تزيد زيادة مضطردة مع زيادة x .



شكل (٣-٨)

تحقق دالة التوزيع $F(x)$ لمتغير عشوائي متصل الشروط التالية :

(أ) $0 \le F(x) \le 1$.

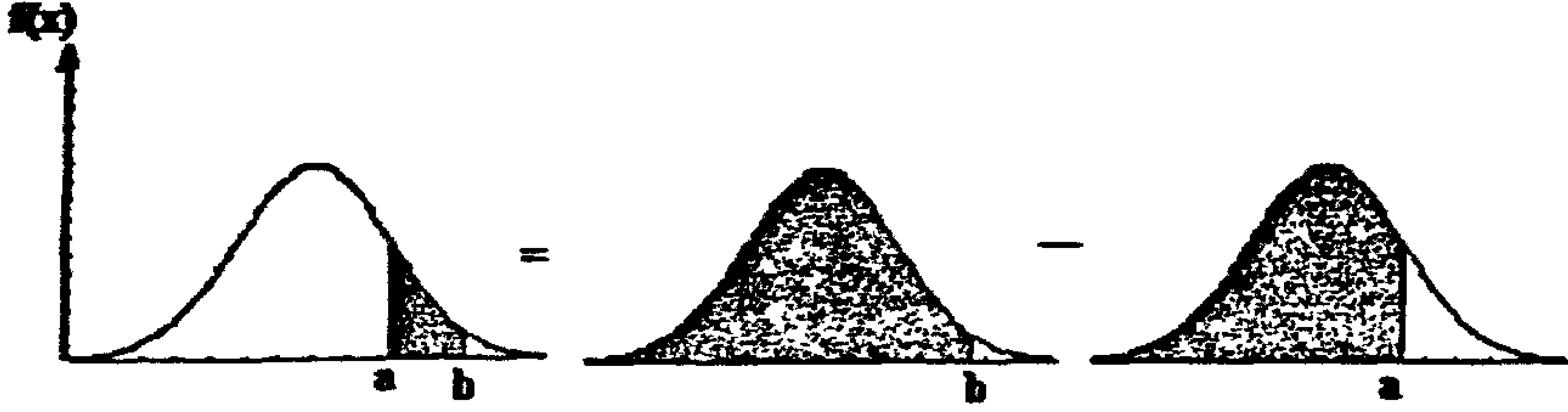
(ب) الدالة $F(x)$ تتزايد تزايداً مضطرداً لجميع قيم x ، أي أنه إذا كانت a , b قيمتين في نطاق الدالة $F(x)$ فإن $a < b \Rightarrow F(a) < F(b)$.

(ج) الدالة $F(x)$ متصلة عند جميع قيم x .

يرجع أهمية دالة التوزيع $F(x)$ في أنه يمكن حساب الاحتمالات للفترات المختلفة وذلك من صيغة $F(x)$ أو جدول خاص بدالة التوزيع $F(x)$. فإذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمال $f(x)$ ودالة توزيع $F(x)$ فإنه لأي قيمتين a , b حيث $a < b$ يكون

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

والموضح في شكل (٣- ٩) .



شكل (٣-٩)

مثال (٣ -١٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً وله دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x)=\frac{1}{6} \qquad 0<x<6$$
$$=0 \ \text{ elsewhere}.$$

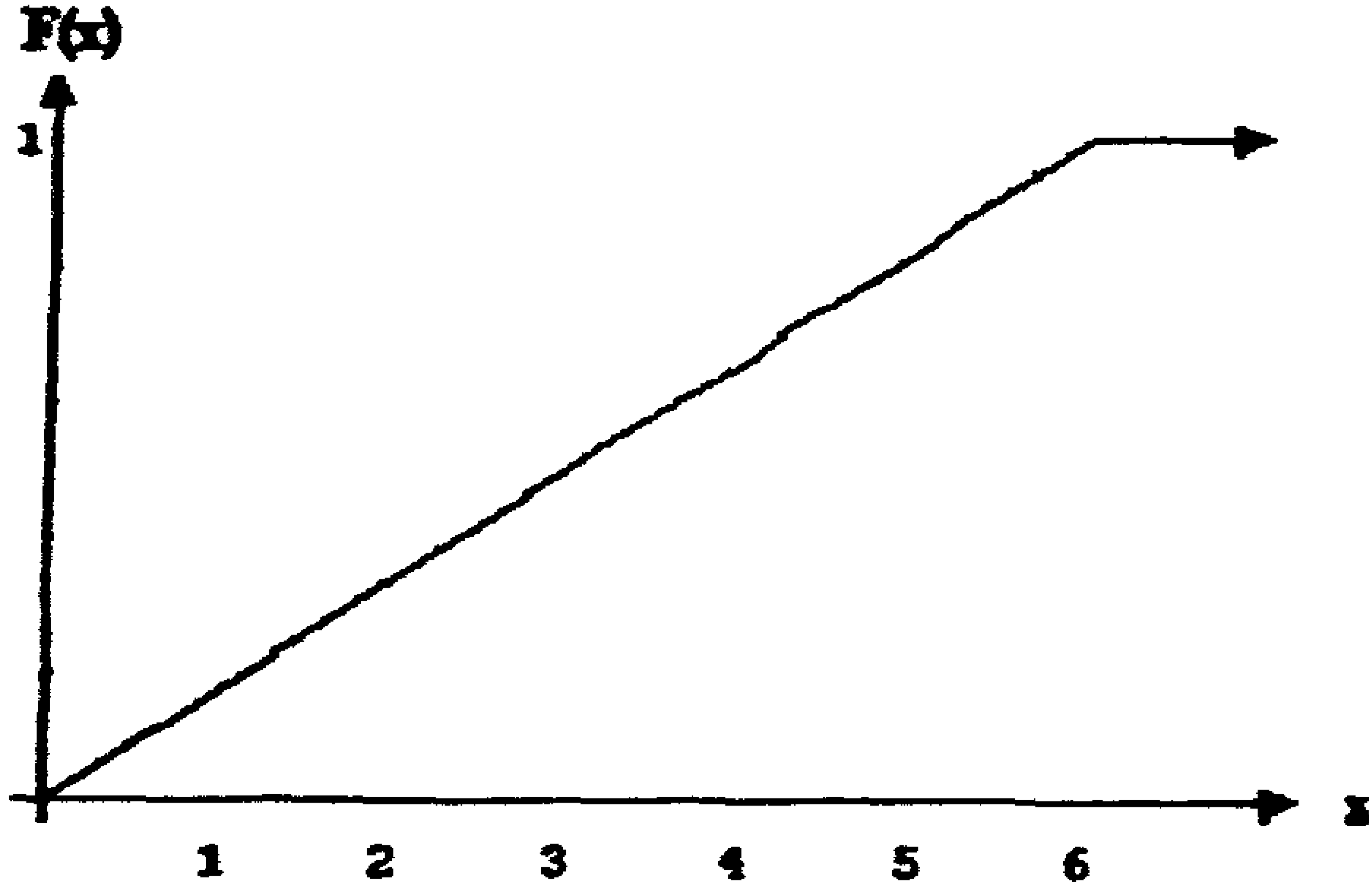
لقيم $x<0$ فإن $F(x)=0$ وذلك لعدم وجود مساحة تحت المنحنى لدالة كثافة الاحتمال على يسار القيمة x . لقيم $x\geq 6$ فإن $F(x)=1$ وذلك لأن كل المساحة تتجمع إلي اليسار من x . في النهاية لقيم $0\leq x\leq 6$ فإن :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=\int_{0}^{x} \frac{1}{6}\ dy=\frac{1}{6}\ y\ \Big|_{0}^{x}=\frac{x}{6}.$$

وعلى ذلك فإن دالة التوزيع هي :-

$$F(x)=0 \qquad x<0$$
$$=\frac{x}{6} \qquad 0\leq x<6$$
$$=1 \qquad x\geq 6.$$

بيان F(x) موضح في شكل (٣-١٠) .



شكل (٣-١٠)

مثال (٣-١٣) للمثال (٣-٨) أوجد دالة التوزيع .

الحل :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x (1.25)10^{-15}y\ dy=(6.25)10^{-6}x^2 & 0\le x\le 400 \\ 1 & x>400\ . \end{cases}$$

مثال (٣-١٤) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي X على الشكل :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ a^2x\ \bar{e}^{ax} & x\ge 0 \end{cases}$$

حيث a ثابت موجب أوجد دالة التوزيع :

الحل :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy \;=\; \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_{0}^{x} a^2y\ \bar{e}^{ay}dy & x\ge 0 \end{cases}$$

بوضـع $u = ay$ وبإجراء التكامل بالتجزئة فإن :

$$\int_{0}^{x} a^2y\ \bar{e}^{ay}dy=\int_{0}^{ax} u\ \bar{e}^{u}du=u(-\bar{e}^{u})\ \Big|_{0}^{ax}-\int_{0}^{ax}(-\bar{e}^{u})du$$

$$=-ax\ \ \bar{e}^{ax}+(-\bar{e}^{u})\ \Big|_{0}^{ax}$$

$$=1-(1+ax)\bar{e}^{ax},$$

وعلى ذلك:

$$F(x)\ =0 \qquad\qquad x<0$$

$$=1-(1+ax)\bar{e}^{ax}, x\ge 0$$

مثال (٣ -١٥) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت دالة كثافة احتماله هي :

$$f(x)=c(1+x)^{-3} \qquad x>0$$

$$=0 \qquad\qquad x\le 0$$

(أ) أوجد الثابت c .

(ب)أوجـد F (٨) .

(ج) $P(.4\le x\le .45)$

الحل :

(أ)

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{\infty} c(1+x)^{-3}dx=c(\frac{1}{2}).$$

أي أن $c = 2$.

(ب) $$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{x} 2(1+y)^{-3}dy \qquad x>0$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 0dy \qquad x \le 0$$

وعلى ذلك فإن :

$$F(x) = 1-(1+x)^{-2} \qquad x>0$$

$$=0 \qquad x \le 0.$$

$$P(.40 \le X \le .45) = F(.45) - F(.4) = .035. \qquad (ج)$$

مثال (٣-١٦) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x \qquad 0 \le x \le 2$$

$$=0 \text{ elsewhere .}$$

(أ) أوجد $F(x)$ ومثلها بيانيا .

(ب)أوجد $P(X \ge 1)$.

الحل : (أ)

$$F(x) = 0 \qquad x<0$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{0}^{x} (\frac{1}{8} + \frac{3}{8}y)dy$$

$$,0 \le x < 2.$$

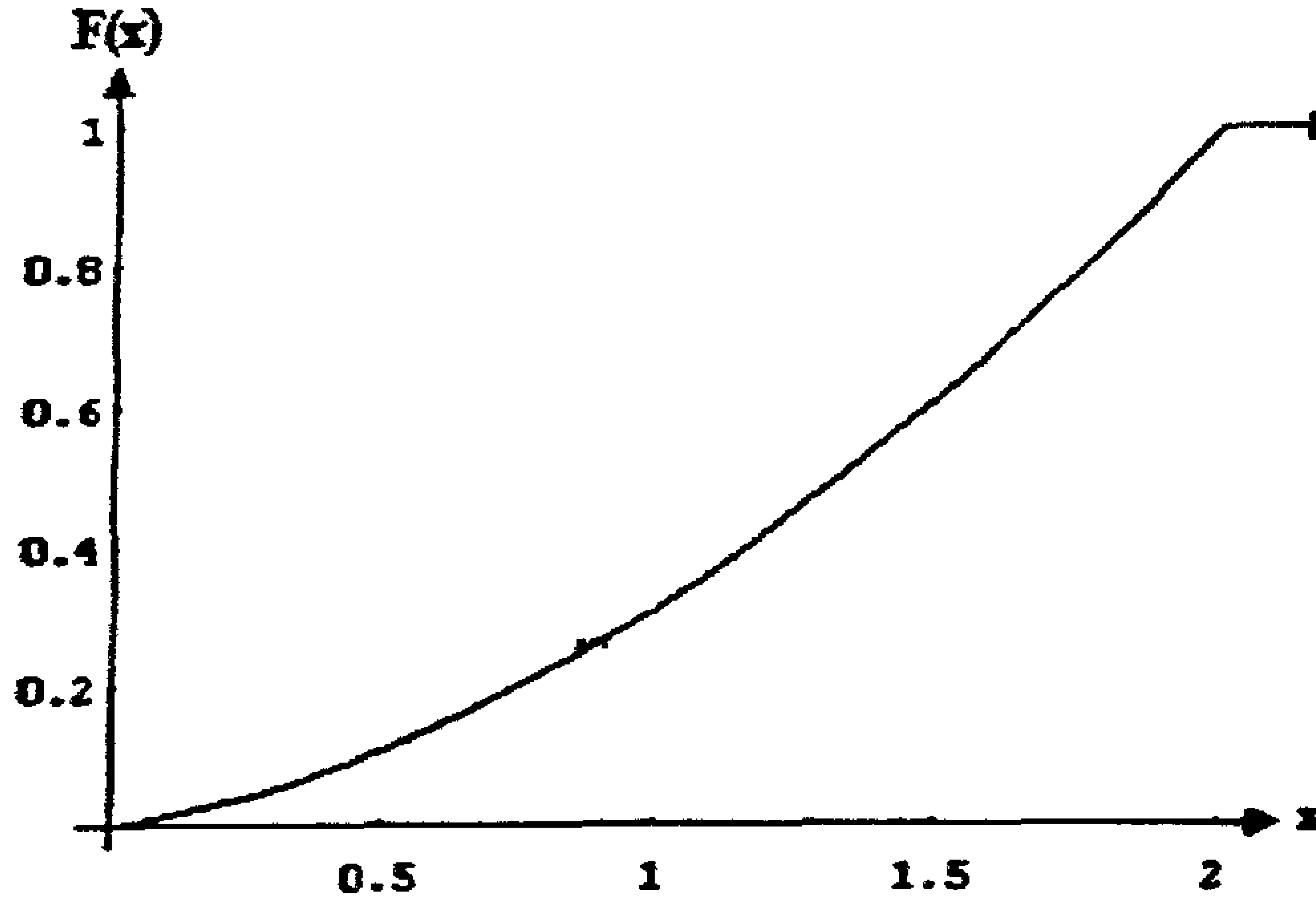
أي أن :

$$F(x) = \frac{x}{8} + \frac{3}{16}x^2 \qquad 0 \le x \le 2$$

$$=1 \qquad x>2$$

$$x=0, \qquad x \le 0.$$

بيان F (x) موضح في شكل (٣-١١) .



شكل (٣-١١)

(ب)

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F(1)$$
$$=1-\left[\frac{1}{8}(1)+\frac{3}{16}(1)^2\right]=\frac{11}{16}=.688.$$

<u>ايجاد F(x) من f(x)</u>

عرفنا مما سبق أنه لمتغير عشوائي متقطع فإن f(x) يمكن الحصول عليها بـــالفرق بين قيمتين للدالة F(x) . بينما إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً بدالة كثافـــة احتمـــال f(x) ودالة توزيع F(x) فإنه عند أي نقطة x حيث أن المشتقة الأولي F(x) معرفة فـــإن

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

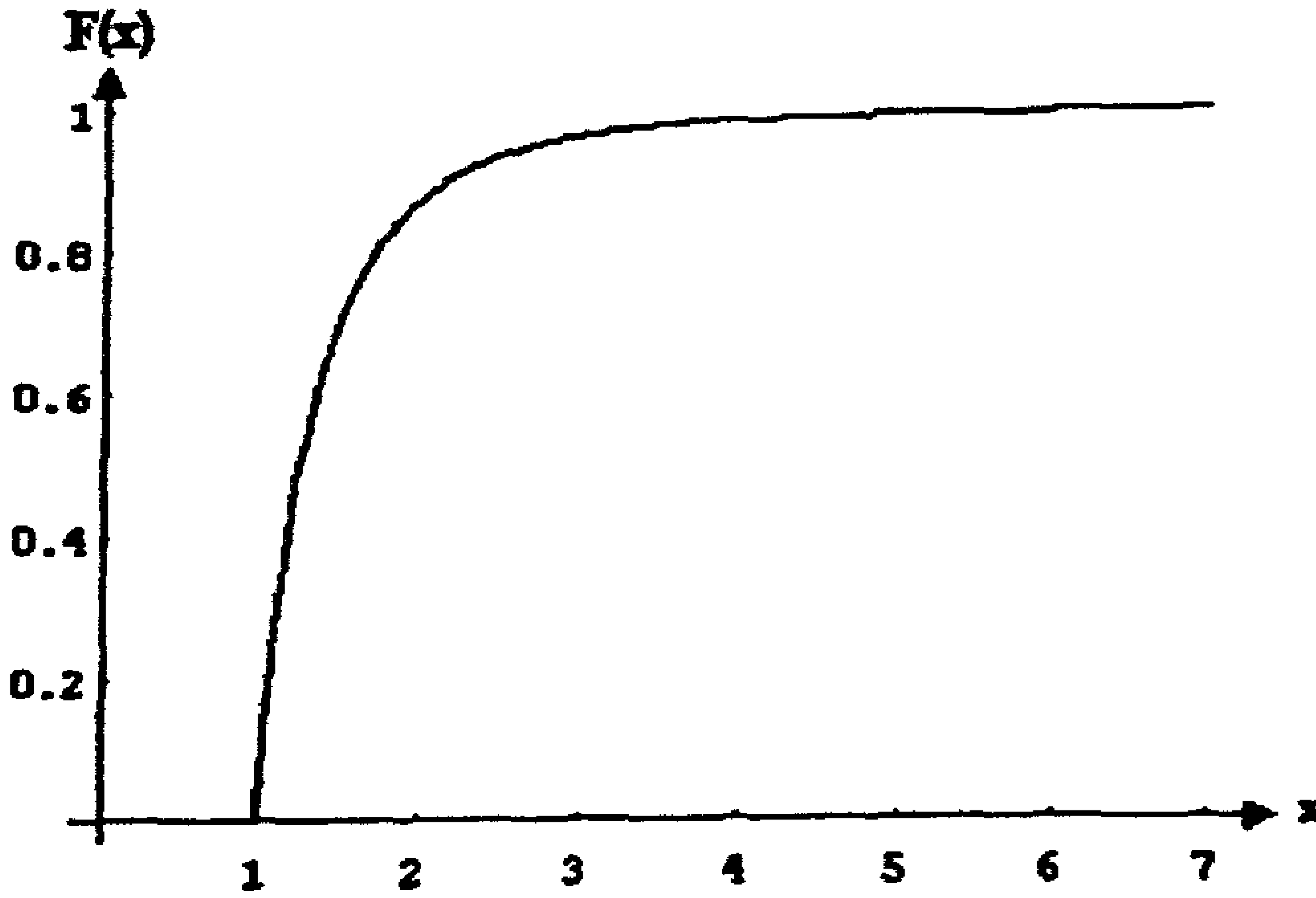
مثال (٣ -١٧) إذا كان X متغيراً عشوائياً من النوع المتصل ودالة كثافته الاحتماليـــة هي :

$$f(x)=2/x^3 \qquad 1<x<\infty$$
$$=0 \ \text{elsewhere.}$$

فإن دالة التوزيع للمتغير X هي :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \; dy = 0, \qquad x < 1,$$
$$= \int_{1}^{x} \frac{2}{y^3} dy = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad 1 \le x.$$

بيان F(x) موضح في شكل (٣-١٢).



شكل (٣-١٢)

يلاحظ من شكل (٣-١٢) أن F(x) متصلة لجميع الأعـداد الحقيقيـة x وخصوصـا F(x) متصلة من اليمين . وأكثر من ذلك ، فـإن مشـتقة F(x) . بالنسـبة للعـدد x ، معرفة لكل النقاط ما عدا x = 1 . وعلى ذلك فإن دالة كثافـة الاحتمـال للمتغـير X

معرفة لهذه المشتقة ما عدا عند $x = 1$. وحيث أن الفئـــة $B = \{x|x = 1\}$ هــي فئــة باحتمال يساوي صفر (أي أن $P(B) = 0$) وعلى ذلك سوف يكون لدينـــا حريـــة فـــي تعريف دالة كثافة الاحتمال بأي طريقة نختارها. واحدة من هذه الطرق هو كتابة :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = 2/x^3 \qquad 1 < x < \infty$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

مثال (٣-١٨) للمتغير العشوائي X في مثال (٣-١٢) فإن $F(x)$ قابله التفـــاضل مـــا عدا عند $x = 0$, $x = 6$ وعلى ذلك فإن $F(x) = 0$ لقيم $x < 0$ و $F(x) = 1$ لقيـــم $x > 6$, $\frac{dF(x)}{dx} = 0 = f(x)$ لهذه القيم . لقيم $0 < x < 6$ فإن :

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{6} = f(x).$$

(٣-٤) التوزيعات المختلطة والمراقبة

Mixed Distributions and Censoring

في كثير من التطبيقات يوجد اندماج بين متغيرات عشوائية من النوع المتقطع مـــع متغيرات عشوائية من النوع المتصل . ويمكن توضيح ذلك في المثال التالي .

مثال (٣-١٩) في اختبار لعمر مصباح ، يوضع المصباح تحت الاختبار لمدة ساعة ثـــم يغلق . ليكن X متغيراً عشوائياً يمثل زمن الحياة للمصباح خلال ساعة . في هذا الاختبار هناك احتمال أن لا يعمل المصباح عند تشغيله وهذا يحدث باحتمال موجـــب أي أن $P(X = 0) > 0$. أيضا قد يحترق المصباح خلال فترة زمنية طولها ساعة أي أن :

$$P(0 < X < 1) > 0$$

حيث $P(X = x) = 0$ عندما $X \in (0,1)$. أيضا من الممكن أن $P(X = 1) > 0$ وعندما لا يحترق المصباح خلال الاختبار فهذا يعنى أن زمن الفشل الحقيقـــي لا يمكـــن ملاحظته والذى يسمى المراقبة censoring والذي سوف نتناوله في نهاية هذا البند .

دالة التوزيع التجميعى لتوزيع من النوع المختلط سوف تكون اندماج لنوعية (المتصل والمتقطع) . وعلى ذلك عند كل نقطة لها احتمال موجب فإن دالة التوزيع سوف تكون غير متصلة وبالتالى فإن طول القفزة سوف تساوى الاحتمال المقابل . بينما عند كل النقط الأخرى فإن دالة التوزيع سوف تكون متصلة .

مثال (٣-٢٠) بفرض أن دالة التوزيع معطاة كالآتي :

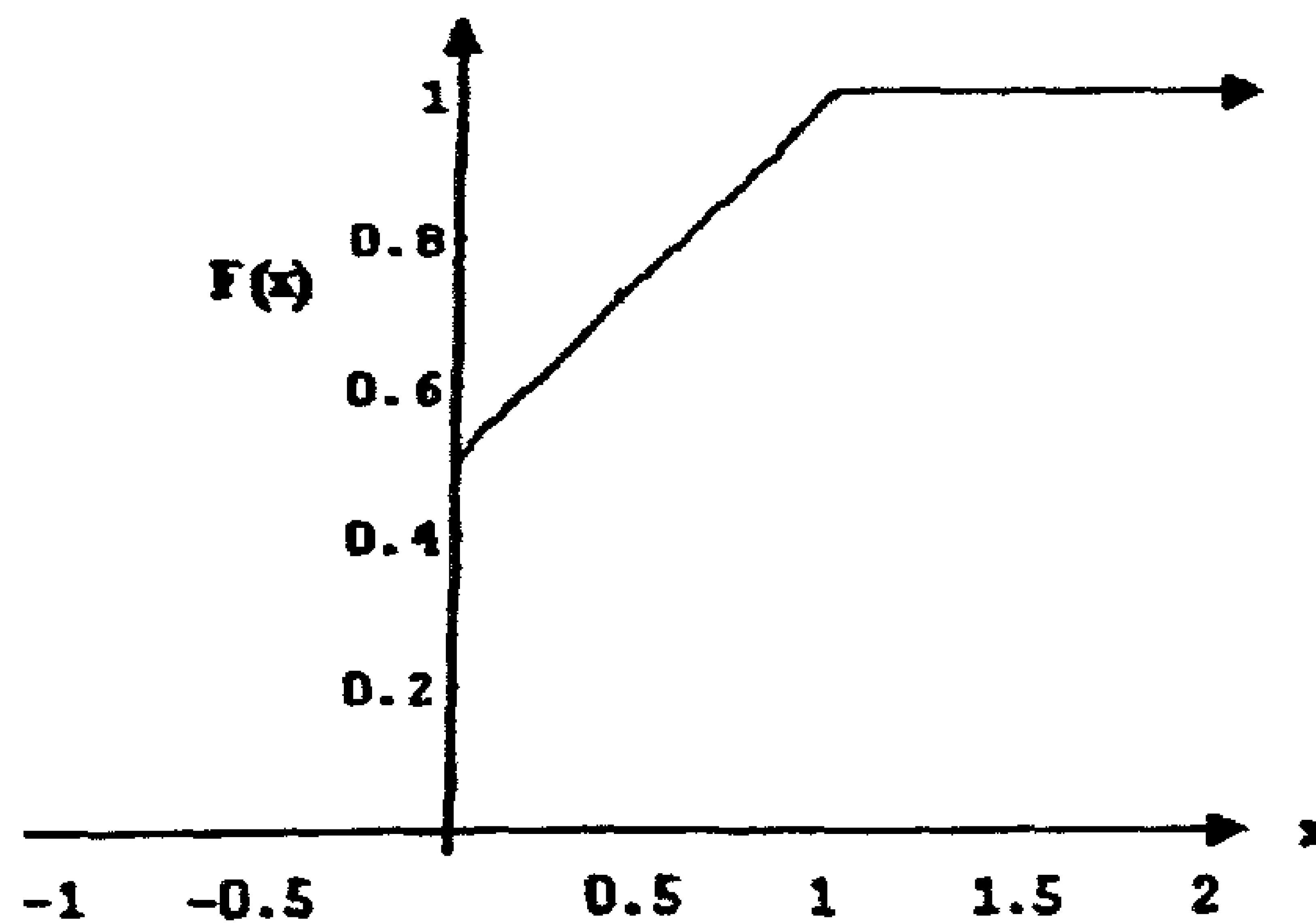
$$F(x) = 0 \qquad x < 0$$

$$= \frac{x+1}{2} \qquad 0 \le x < 1$$

$$= 1 \qquad 1 \le x.$$

$$P(X=0) = F(0) - F(0-) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

بيان $F(x)$ موضح في شكل (٣-١٣) . نلاحظ أن $F(x)$ ليست دالة متصلة وليست دالة سليمة. وعلى ذلك ، فإن دالة كثافة الإحتمال المقابلة سوف تكون غير متصلة وغير متقطعة. وسوف توصف بالدالة الخليط .



شكل (٣ – ١٣)

دالة كثافة الإحتمال سوف تكون على الشكل :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{2} \qquad 0 < x \le 1$$
$$= \frac{1}{2}, \qquad x = 0$$

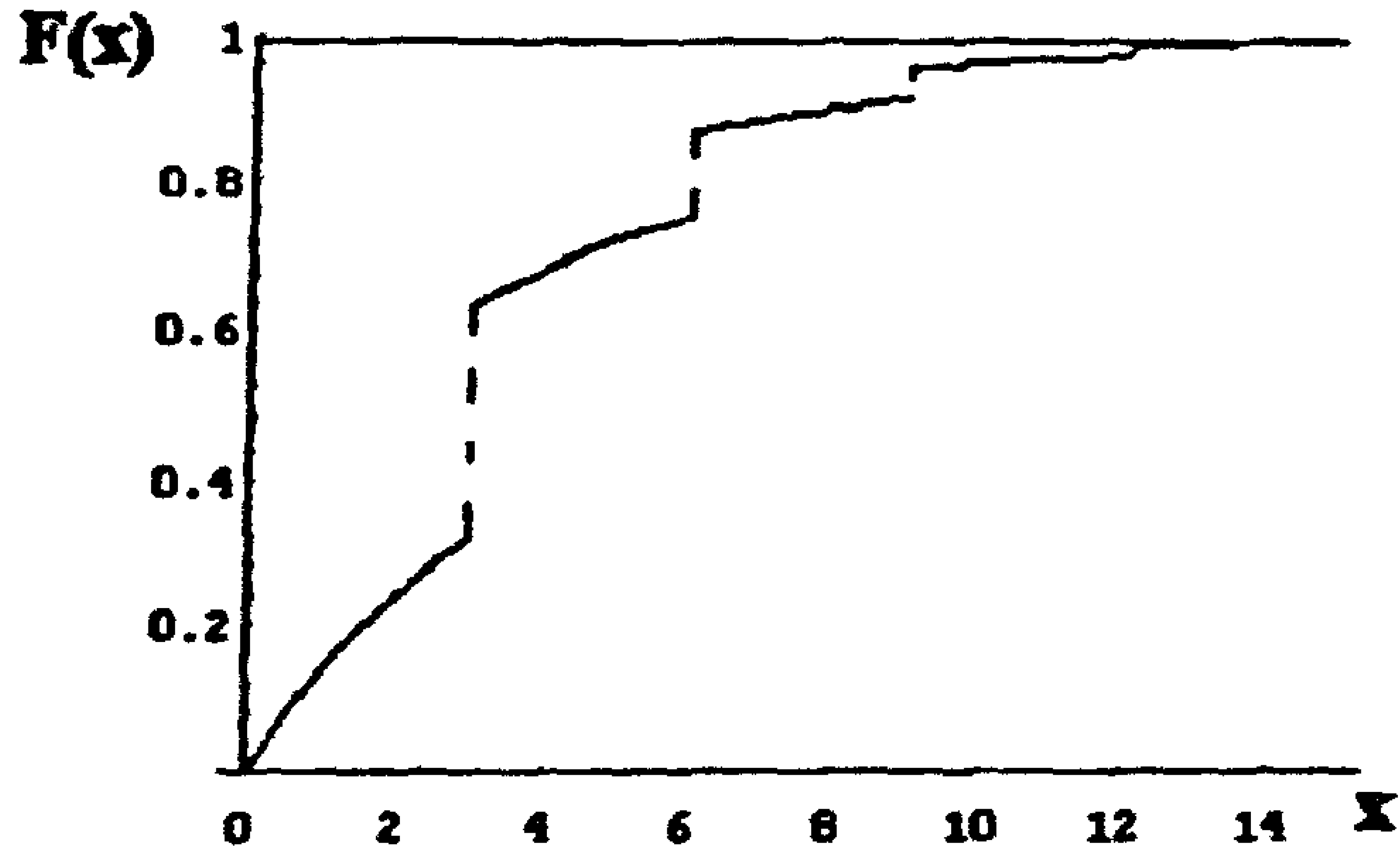
مثال (٣-٢١) بفرض أن زمن المكالمة التليفونية بالدقائق المطلوبة لمكان بعيد متغـــير عشوائي بدالة توزيع :

$$F(x) = 0 \qquad x < 0$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\bar{e}^{(x/3)} - \frac{1}{2}\bar{e}^{[x/3]} \qquad x \ge 0$$

حيث [y] هو أكبر عدد صحيح غير سالب أقل من أو يساوى y .
المتغير العشوائي هنا متغير خليط (ليس متصل ولا متقطع). بيان $F(x)$ موضـــح فـــي شكل (٣-١٤)

$$P(X < 4) = P(X \le 4) = F(4) = 1 - \frac{1}{2}\bar{e}^{(4/3)} - \frac{1}{2}\bar{e}^{[4/3]}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\bar{e}^{(4/3)} - \frac{1}{2}\bar{e}^{1} = .684.$$

وذلك لان دالة التوزيع متصلة عند النقطة 4 ولذا فلا توجد قفزات عند 4 .



شكل (٣ - ١٤)

$$P(X<9\ |X>5)=\frac{P(5<X<9)}{P(X>5)}$$

$$=\frac{F(9)-f(9)-F(5)}{1-F(5)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\bar{e}^{(5/3)}+\bar{e}^{1}-\bar{e}^{3}-\bar{e}^{2})}{\frac{1}{2}(\bar{e}^{(5/3)}+\bar{e}^{1})}$$

$$=\frac{.187}{.279}=.670.$$

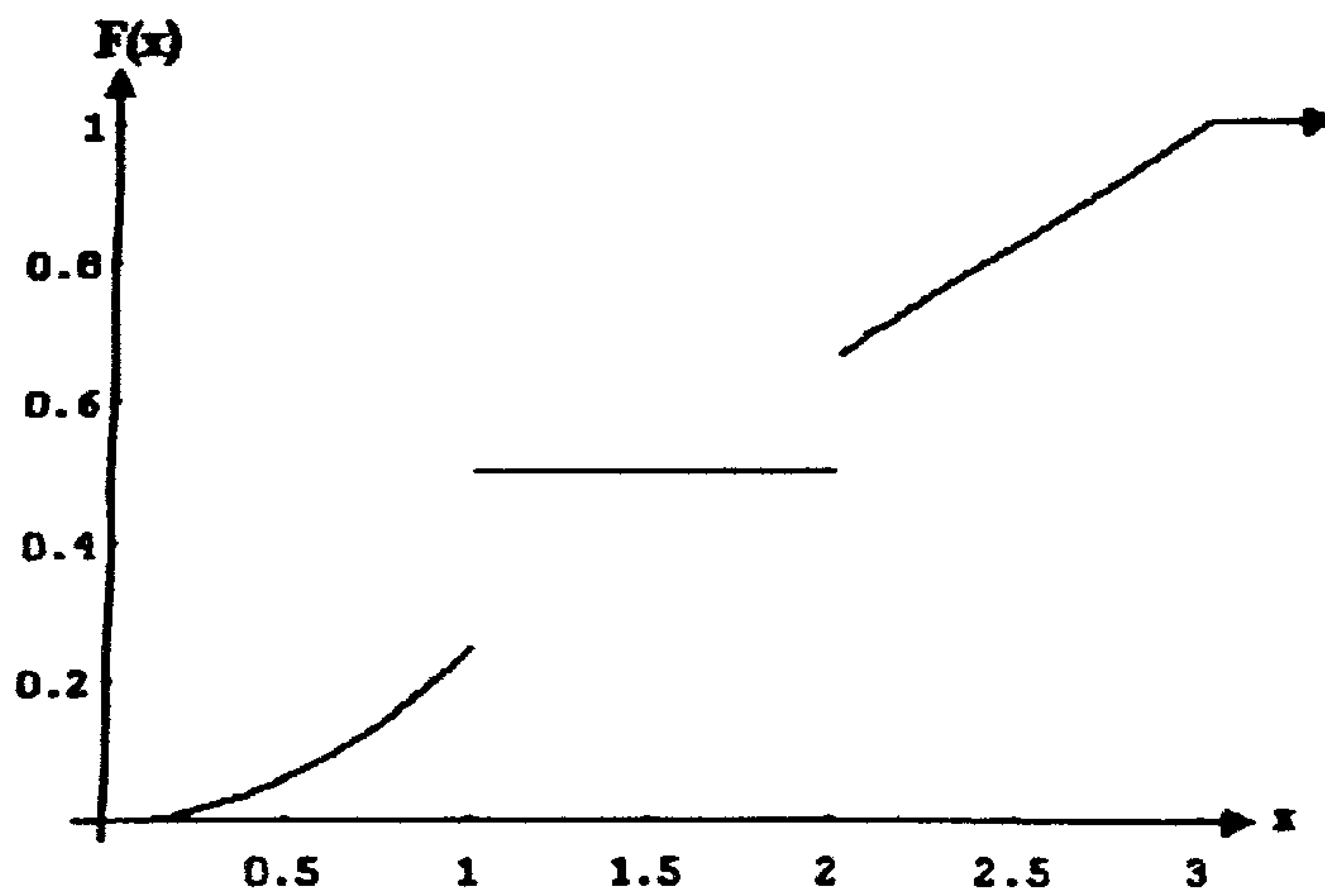
$$P(X>5\ |X<9)=\frac{P(5<X<9)}{P(X<9)}=\frac{F(9)-f(9)-F(5)}{F(9)-f(9)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\bar{e}^{(5/3)}+\bar{e}^{1}-\bar{e}^{3}-\bar{e}^{2})}{1-\frac{1}{2}(\bar{e}^{3}+\bar{e}^{2})}=\frac{.187}{.908}=.206.$$

مثال (٣-٢٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة التوزيع التجميعى F(x) المعرفة كالتالى :

$$F(x) = 0 \qquad x<0$$
$$= \frac{x^2}{4} \qquad 0 \le x < 1$$
$$= \frac{1}{2} \qquad 1 \le x < 2$$
$$= \frac{x}{3} \qquad 2 \le x < 3$$
$$= 1 \qquad 3 \le x.$$

بيان F(x) موضح في شكل (٣-١٥) .



شكل (٣-١٥)

يمكن حساب الاحتمالات باستخدام F(x) . على سبيل المثال :

$$P(0 < X < 1) = \frac{1}{4},$$

$$P(0 < X \leq 1) = \frac{1}{2},$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{4},$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

مثال (٣-٢٣) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة التوزيع التجميعى على شكل :

$$F(x) = 0 \qquad x < 0$$

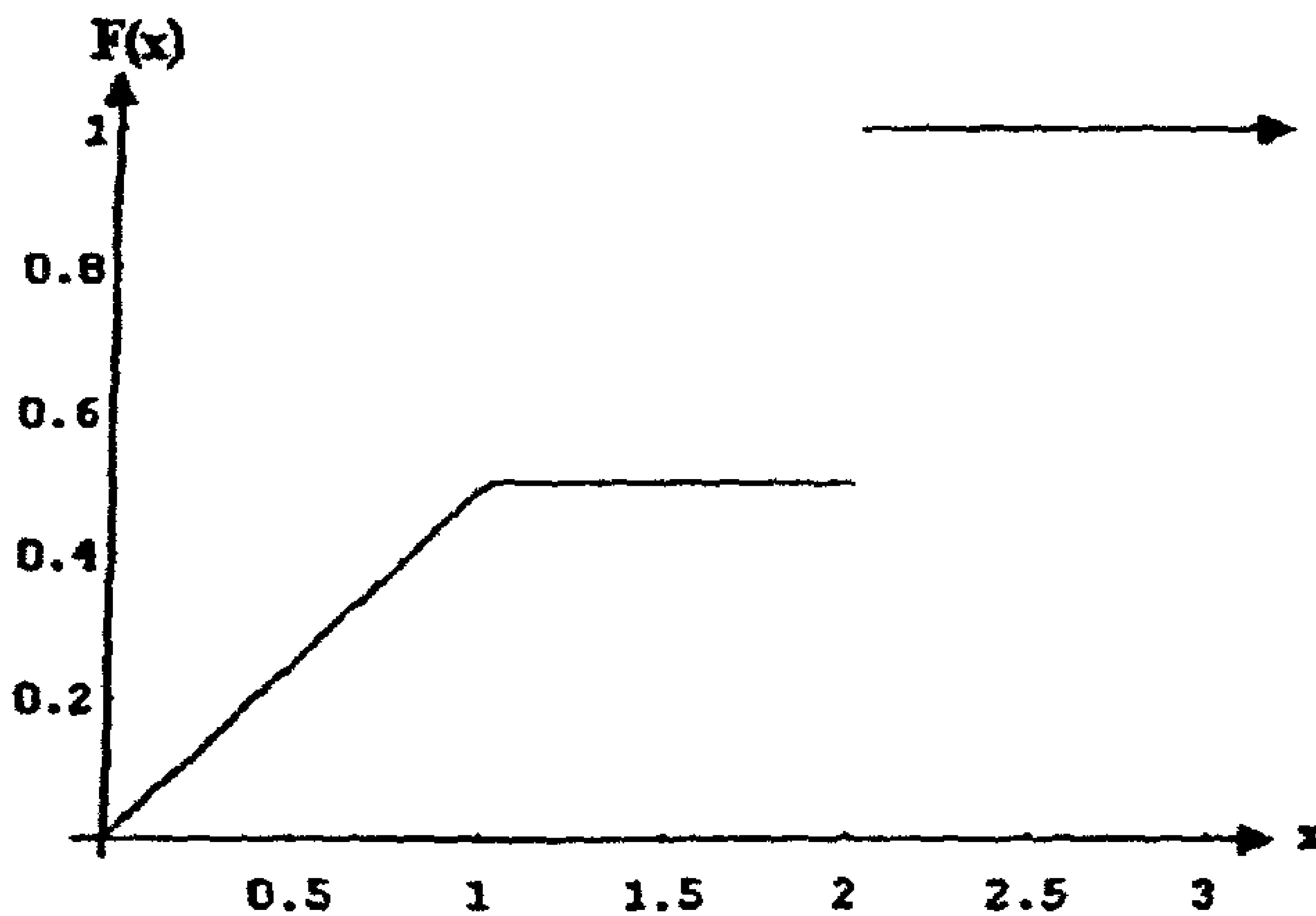
$$= \frac{x}{2} \qquad 0 \leq x < 1$$

$$= \frac{1}{2} \qquad 1 \leq x < 2$$

$$= 1 \qquad 2 \leq x.$$

بيان F(x) موضح في شكل (٣-١٦) .

شكل (٣ -١٦)



يمكن كتابة دالة التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى X من النوع المختلط (إذا كـــان جزء منها متقطع وجزء متصل) على الصورة التالية :

$$F(x)=a\ F_1(x)+(1-a)\ F_2(x)$$

حيث $F_1(x)$ و $F_2(x)$ هما دالتا توزيع متقطع ومتصلة على الترتيب و $0 < a < 1$.

مثال (٣-٢٤) بفرض أن سائق عندما يشاهد إشارة التوقف أما انه ينتظر لفترة زمنيـــة عشوائية قبل أن يتحرك أو انه يتحرك في الحال . فإذا كان نموذج زمن الانتظـــار علـــى الشكل التالى :

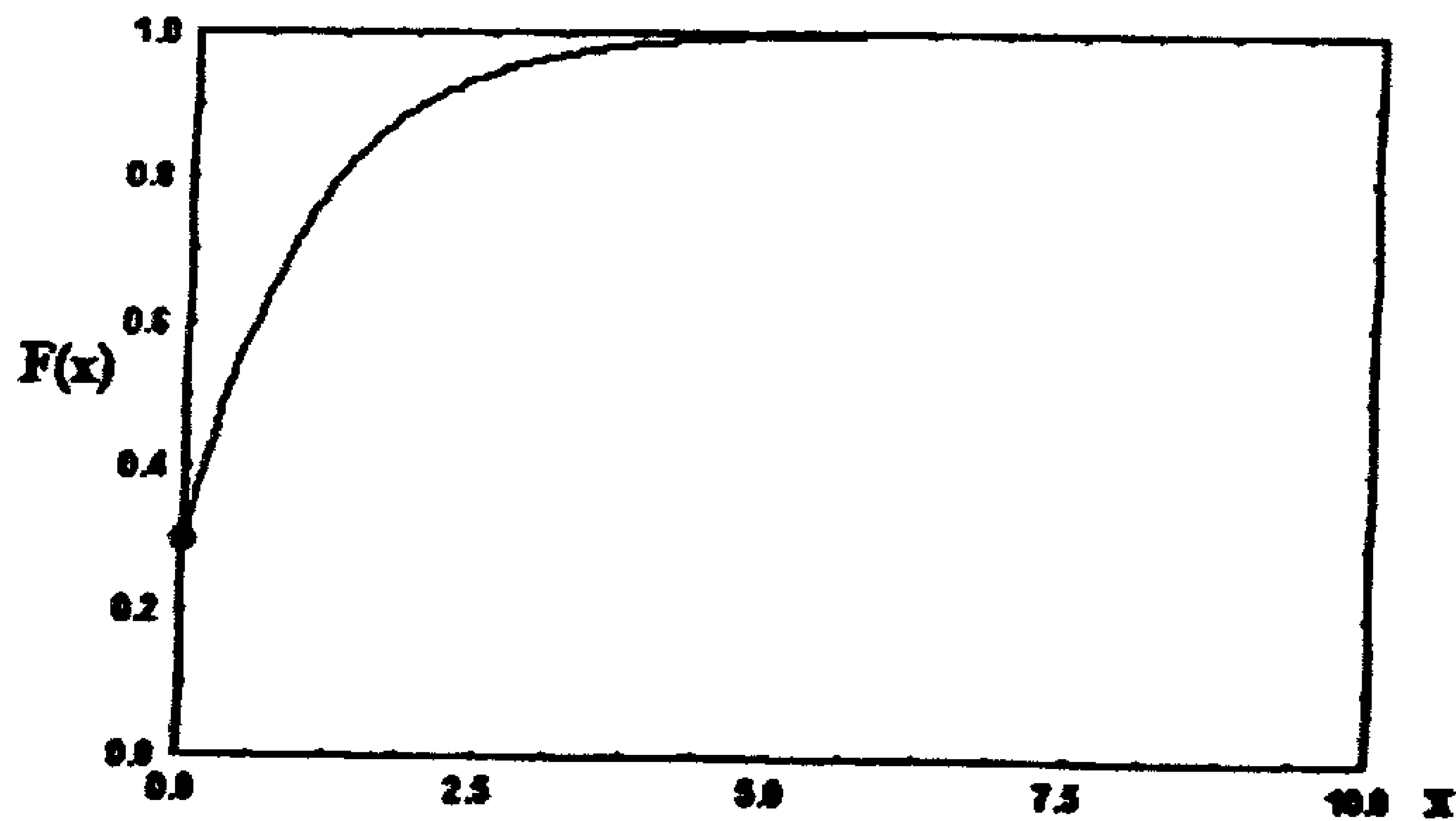
$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & x &< 0 \\ &= .3 & x &= 0 \\ &= (1-.7\bar{e}^{x\lambda}) & x &> 0 \end{aligned}$$

أيضا يمكن كتابة دالة التوزيع $F(x)$ على الشكل :

$$F(x) = .3\ F_1(x)+.7\ F_2(x)$$

$F_1(x)=1$, $F_2(x)=1-\bar{e}^{x\lambda}$ ، حيث $(\lambda>0)$ ، إذا كـــانت $x\geq 0$ بينما $F_1(x)=0, F_2(x)=0$ عندما $x<0$. بيان $F(x)$ موضح في شـــكل (٣-١٧) و أ=λ . وعلى ذلك احتمال التحرك في الحال هو $P(X=0)=.3$. احتمال أن يكـــون زمـــن الانتظار أقل من 4. دقيقة هو :

$$P[X\leq .4]=.3+.7(1-\bar{e}^{.4\lambda}).$$



شكل (٣-١٧)

توزيع المتغير العشوائى X إذا علم أن $X > 0$ هو :

$$P[X \le x \mid 0 < X] = \frac{P[0 < X \text{ and } X \le x]}{P[0 < X]}$$

$$= \frac{P[0 < X \le x]}{P[0 < X]}$$

$$= \frac{F(x) - F(0)}{1 - F(0)} = \frac{3. + .7(1 - e^{-x\lambda}) - .3}{1 - .3}$$

$$= .7\frac{(1 - e^{-x\lambda})}{.7} = (1 - e^{-x\lambda}).$$

عادة في اختبارات الحياة ، نعرف أن طول العمر ، ليكن X ، يزيـــد عــن عــدد b ولكن القيمة بالضبط تكون غير معلومة . وهو ما يسمى بالمراقبة . على ســبيل المثــال عندما يختفي مريض بالسرطان قبل انتهاء الاختبار و يعلم القائم بالاختبار أن المريــض أستمر خلال الاختبار لقيمة ما بالشهور ، ولكن زمن الحياة بالضبط يكون غير معــروف . أيضا في التجارب التي تتم على حيوانات التجارب قد تفقد بعض الفــئران أو أن يكــون القائم على البحث ليس له الوقت الكافي لاتمام التجربة أو عند الرغبة في تقليــل تكــاليف التجربة وإنهائها عند زمن ما .

(٣-٥) القيم المتوقعة

The Expected Values

لمتغير عشوائي متقطع ، كما عرفنا من الفصل الثاني ، فإن $E(X)$ يمكن الحصول عليه بجمع $x\,f(x)$ لجميع قيم المتغير العشوائي X. هنا (بالنسبة لمتغــير عشــوائي متصل) سوف نستبدل المجموع بالتكامل .

تعريف : القيمة المتوقعة أو القيمة المتوسطة لمتغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمالية $f(x)$ هو :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx\,.$$

ويقال أن $E(X)$ موجودة إذا و إذا فقط كان :

$$E|x| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\ dx < \infty$$

مثال (٣-٢٥) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمبيعات الأسبوعية لسلعة ما هي :

$$f(x) = \frac{3}{2}(1-x^2) \qquad 0 \le x \le 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

فـــإن :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\ dx = \int_{0}^{1} x.\frac{3}{2}(1-x^2)dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{1} (x - x^3)dx = \frac{3}{2}(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4})\ \Big|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

مثال (٣-٢٦) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة احتمال على الشكل :

$$f(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2} \qquad -\infty < x < \infty.$$

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير X .

الحل :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x/\pi}{1+x^2} dx = \lim_{h\to\infty} (\frac{1}{2\pi}\log(1+x^2)\ \Big|_{-h}^{h} = ٠$$

مثال (٣-٢٧) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال على الشكل :

$$f(x) = \quad 12x(1-x)^2 \qquad 0 \le x \le 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

أوجد المتوســط μ

الحل :

$$\mu = E(X) = \int_{0}^{1} x[12x(1-x)^2]\ dx = .4$$

مثال (٣-٢٨) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً له دالة كثافة الاحتمال على الشكل :

$$f(x)=\frac{1}{2} \qquad -1 \le x \le 1$$
$$=0 \qquad |x|>1$$

أوجد (أ) القيمة المتوقعة للمتغير X

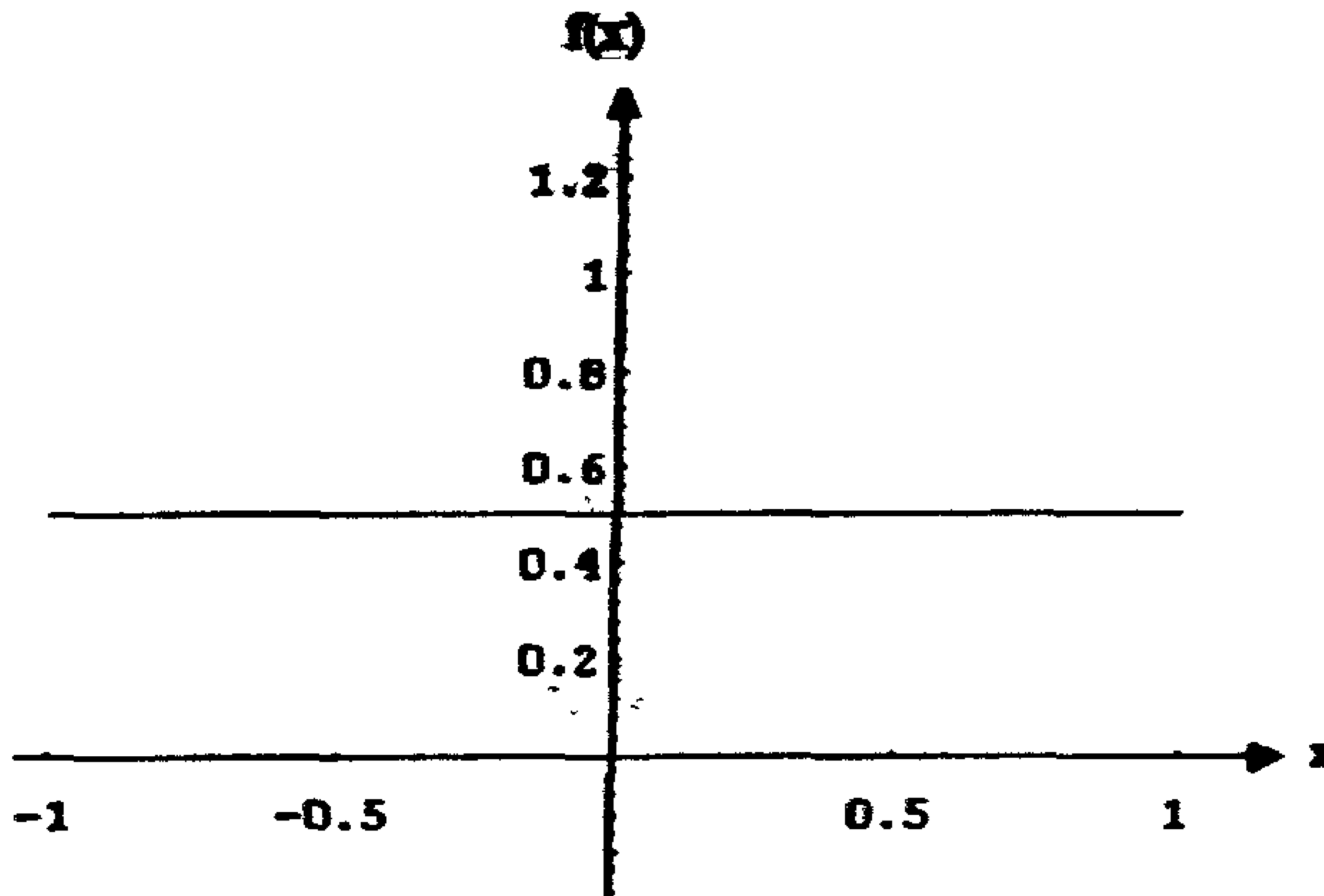
(ب)وضح f(x) بيانيا .

الحل : (أ)

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{-1} (x)(0)dx + \int_{-1}^{1} (x)(\frac{1}{2})\ dx + \int_{1}^{\infty} (x)(0)dx$$

$$=0+\frac{x^2}{4}\Big|_{-1}^{1}+0=0$$

(ب) بيان f(x) موضح في شكل (٣-١٨) .



(٣-١٨)

مثال (٣-٢٩) للمثال (٣-٨) أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X .

الحل : (أ)

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{0} (x)(0)dx + \int_{0}^{400} (x)(1.25)(10)^{-5}x\ dx$$

$$+ \int_{400}^{\infty} (x)(0)dx$$

$$= \frac{(1.25)10^{-5}}{3} x^3 \Big|_0^{400} = 266.67.$$

جميع التعاريف والنظريات التي تخص توقعات المتغير العشوائي المتقطع تتحقق المتغيرات العشوائية المتصلة مع استبدال المجموع بالتكامل .

مثال (٣-٢٠) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً له دالة كثافة احتمال على الشكل :

$$f(x) = 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

وإذا كان :

$$Y = u(X) = \max(X, 1-X) = \begin{cases} 1-X & 0 \le X \le \frac{1}{2} \\ X & \frac{1}{2} \le X \le 1 \end{cases}$$

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي Y .

$$E(Y) = E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \max(x, 1-x).f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{1} \max(x, 1-x).1\ dx$$

$$= \int_{0}^{1/2} (1-x).1\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x.1\ dx = \frac{3}{4}.$$

مثال (٣-٢١) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً له دالة كثافة الاحتمال على الشكل :

$$f(x) = \frac{1}{a} \qquad 0 \le x \le a$$

$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

حيث a مقدار ثابت . إذا كان $Y=\frac{1}{2}X^2$ أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي Y .

$$\mu_Y=E(Y)=E(\frac{1}{2}X^2)=\int_0^a(\frac{1}{2}x^2)\frac{1}{a}\ dx=\frac{a^2}{6}.$$

مثال (٣-٣٢) للمثال (٣-٢٥) أوجد التباين والانحراف المعياري للمتغير X .

الحل :

$\mu=E(X)=\frac{3}{8}$ (من مثال (٣-٢٥) .

$$E(X^2)\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2.\frac{3}{2}(1-x^2)dx$$

$$=\int_0^1\frac{3}{2}(x^2-x^4)dx=\frac{1}{5},$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{5}-(\frac{3}{8})^2=\frac{19}{320}=.059,$$

$$\sigma=.244.$$

مثال (٣-٣٣) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً بدالة كثافة احتمال على الشكل :

$$f(x)=\frac{1.4430}{x}\qquad 1\le x\le 2$$

$$=0\ \ \text{elsewhere.}$$

(أ) المطلوب تمثيل الدالة بيانيا .

(ب)أوجد القيمة المتوقعة للمتغير X.

(ج)أوجد التباين .

الحل : **(أ)** بيان f(x) موضح في شكل (٣-١٩) .

(ب)

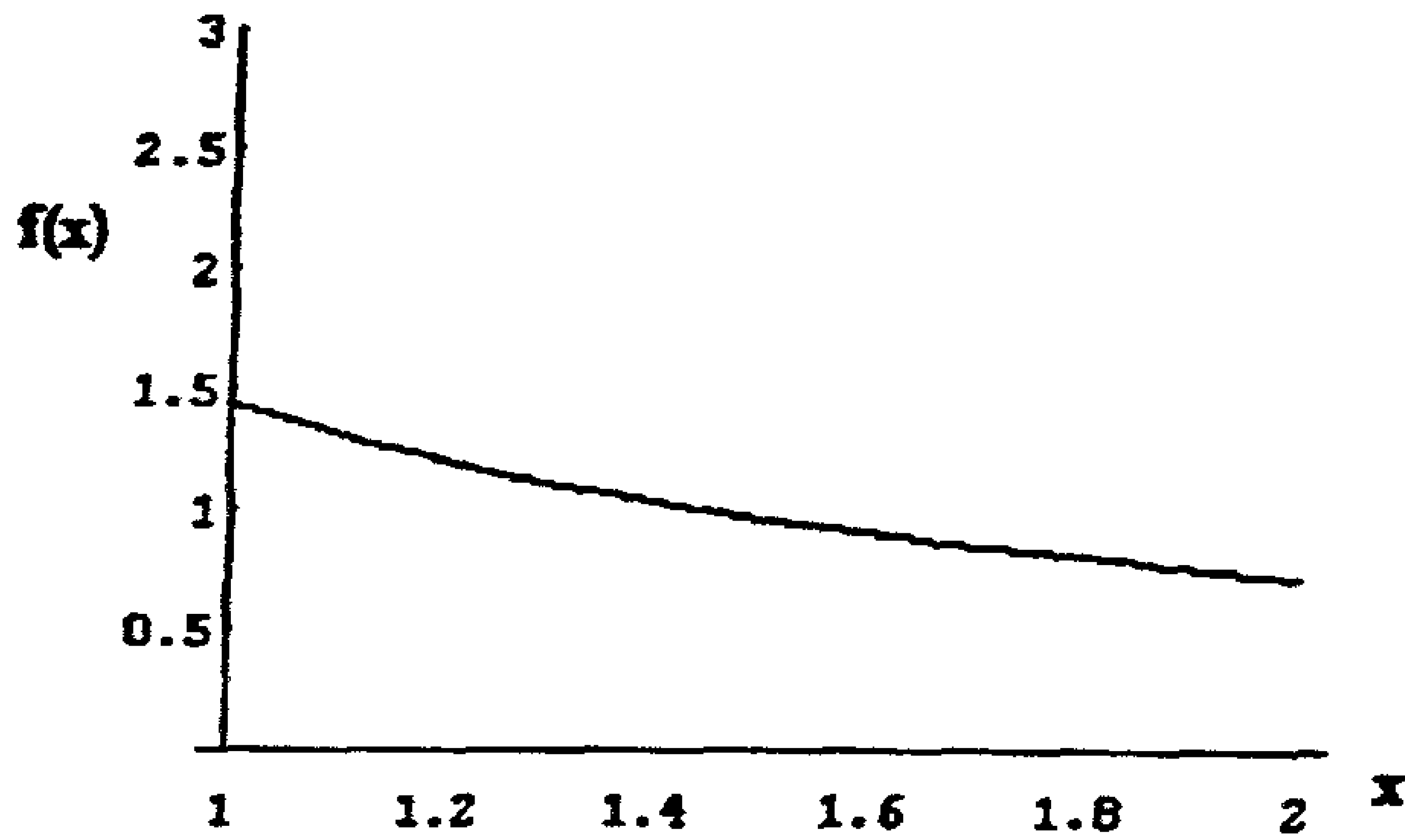
$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{1}xf(x)dx=0+\int_1^2 x\left(\frac{1.4430}{x}\right)dx+0=1.4430,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\ dx = 0 + \int_{1}^{2} x^2 \left(\frac{1.433}{x}\right) dx + 0$$

$$= \frac{1.443}{2}\ x^2 \ \Big|_1^2 = 2.1645,$$

(ج)

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2.1645 - (1.4430)^2 = .08225.$$



شكل (٣-١٩)

مثال (٣-٢٤) للمثال (٣-١٢) أوجد التباين للمتغير العشوائي X .

الحل :

$$E(X) = \frac{1}{6}\int_{0}^{6} x\ dx$$

$$= \frac{x^2}{12}\ \Big|_0^6 = \frac{36}{12} = 3,$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\int_0^6 x^2 dx = \frac{x^3}{18}\Big|_0^6$$
$$= \frac{216}{18} = 12,$$
$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= 12 - (3)^2 = 12 - 9 = 3.$$

بفرض أن X متغيرا عشوائيا له توزيع من النوع المختلط فإن المثال التالى يوضح طريقة إيجاد التوقع للمتغير X أي E (X) .

مثال (٣-٢٥) إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة التوزيع التجميعى المعطاة في المثال (٣-٢٢) . أوجد E(X) .

الحل :

بما أن $\frac{d F(x)}{d x} = x/2$ عندما $0 < x < 1$ و $\frac{d F(x)}{d x} = 1/3$ عندما $2 < x < 3$.

أيضا $P (X = 1) = ¼$ و $P (X = 2) = 1/6$ وتبعا ذلك ، فإن :

$$\mu = E(X) = \int_0^1 x\left(\frac{x}{2}\right)dx + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \int_2^3 x\left(\frac{1}{3}\right)dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \left[\frac{x^2}{6}\right]_2^3 = \frac{19}{12}.$$

حدود الاحتمال Bounds On Probability

من الممكن ، في بعض الحالات ، إيجاد حدود للاحتمالات تعتمد على العزوم .

نظرية (٣ -١) إذا كان X متغيرا عشوائيا وكانت u(x) قيمة حقيقية موجبة لدالة ، فإنه لأي عدد a ثابت وموجب ، $a > 0$ ، فإن :

$$P[u(X) \geq a] \leq \frac{E[u(X)]}{a}$$

البرهان :

إذا كان : $A=\{x \mid u(x)\geq a\}$

فإنه لمتغير عشوائي متصلاً يكون :

$$E[u(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)\,dx$$

$$=\int_{A} u(x)f(x)\,dx+\int_{A^c} u(x)f(x)\,dx$$

$$\geq \int_{A} u(x)\, f(x)\,dx$$

$$\geq \int_{A} af(x)\, dx$$

$$=a\ P[X\in A]$$

$$=aP[u(X)\geq a].$$

النظرية السابقة تتحقق لمتغير عشوائي متقطع وذلك باستبدال التكامل بالمجموع .

حالة خاصة من النظرية (٣-١) تسمي متباينة ماركوف Markov inequality ويمكن الحصول عليها بوضع $u(x)=|x|^r$ ، $a>0$ ، حيث أن :

$$P[|X|\geq a]\leq \frac{E(|X|^r)}{a^r}.$$

نظرية (٣ -٢) متباينة تشيبيشف Chebychev inequality . إذا كان X متغيراً عشوائياً بمتوسط μ وتباين σ^2 فإنه لأي $k>0$:

$$P[|X-\mu|\geq k\sigma]\leq \frac{1}{k^2}$$

البرهان :

إذا كان $u(X)=(X-\mu)^2, a=k^2\sigma^2$ في صيغة نظرية (٢-١) فإن :

$$P[(X-\mu)^2\geq k^2\sigma^2]\leq \frac{E(X-\mu)^2}{k^2\sigma^2}\leq \frac{1}{k^2}.$$

ومنه يمكن الوصول إلى إثبات النظرية . هناك صيغة بديلة للسابقة وهي :

$$P[|X-\mu|<k\sigma]\geq 1-\frac{1}{k^2}.$$

بوضع $\epsilon=k\sigma$ فإن :

$$P[|X-\mu|<\epsilon]\geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2},$$

$$P[|X-\mu|\geq\epsilon]\leq\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

بوضع $k = 2$ فإننا نجد أن المتغير العشوائي يقع ضمن انحرافيين من المتوسط باحتمال على الأقل يساوى 0.75 .

مثال (٣-٣٦) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$$

$$=0 \quad \text{elsewhere.}$$

أحسب (أ) $P[|x|\geq\frac{3}{2}]$ (ب) $P[|x|\geq 2]$

وقارنهم مع الحد الأعلى لمتباينة تشيبيشف .

الحل : (أ) تنص متباينة تشيبيشف على أنه إذا كان X متغيراً عشوائياً له تباين σ^2 محدود فإن :

$$P[|X-\mu|>k\sigma]\leq\frac{1}{k^2}.$$

ولكي تستخدم هذه المتباينة لا بد من حساب μ,σ^2 .

$$\mu=E(X)=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x.\frac{1}{2\sqrt{3}}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \frac{x^2}{2}\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right]=0=\mu,$$

$$\sigma^2=E(X^2)-0=E(X^2)=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x^2.\frac{1}{2\sqrt{3}}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{3\sqrt{3}}{3}-\frac{3}{3}(-\sqrt{3})\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}+\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1=\sigma^2.$$

ولان المساحة الكلية تحت المنحنى $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ من $\sqrt{3}-$ إلي $\sqrt{3}$ تساوي 1 فإن :

$$P(|x|\ge\frac{3}{2})=1-P(|x|\le\frac{3}{2})$$

$$=1-P(-\frac{3}{2}<X<\frac{3}{2})$$

$$=1-\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2\sqrt{3}}dx=1-\frac{1}{2\sqrt{3}}x\Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right]=1-\frac{2(\frac{3}{2})}{2\sqrt{3}}$$

$$=1-\frac{3}{2\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

باستخدام متباينة تشيبيشف بمتوسط $\mu = 0$ وتباين $\sigma^2=1$ فإن :

$$P|X-0|\ge\frac{3}{2}.1\le\frac{1}{(\frac{3}{2})^2}=\frac{1}{(\frac{9}{4})}=\frac{4}{9}$$

وعلى ذلك :

$$P(|X|\ge\frac{3}{2})\le\frac{4}{9}.$$

الاحتمال المضبوط $1-\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq .134$ أقل بكثير من الحد الأعلى المعطي من متباينة تشيبيشف.

(ب)
$$P|X|\ge 2=1-P(|X|\le 2)$$

$$=1-P(-2\le X\le 2)$$

سوف نكامل $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ من $x=-\sqrt{3}$ إلي $x=\sqrt{3}$ ولأن :

$-2<-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}<2$, $f(x)=0$ عند $x<-\sqrt{3}$ أو $x>\sqrt{3}$ وحيث أن مجال الدالة $f(x)$ هو $-\sqrt{3}<X<\sqrt{3}$ فإن $P(-2\le X\le 2)=1$ وعلى ذلك :

$$P(|X|\ge 2)=1-P(-2\le X\le 2)=1-1=0\ .$$

وباستخدام متباينة تشيبيشف لإيجاد الحد الأعلى للاحتمال $P(|X|\ge 2)$ حيث :

$$k=2 \quad , \quad \sigma^2=1 \quad , \quad \mu=0$$

فــإن :

$$P(|X-0|\geq 2.(1)=P(|X|\geq 2)\leq \frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}.$$

مرة أخرى الاحتمال المضبوط أقل بكثير من الحد الأعلى $\frac{1}{4}$. واضح أن هنـــاك فرقـــاً كبيراً بين القيمة التقريبية والقيمة المضبوطة. ولكن في كثير من الظروف المعملية عندمـــا يكون الاحتمال مجهولاً يكون الحد الأعلى المحسوب من متباينة تشيبيشـــف (وربمـــا لا يكون غير دقيق) مفيداً جداً .

مثال (٣-٣٧) استخدم متباينة تشيبيشف لإيجاد حد أدني للاحتمال $P(-4<X<20)$ حيث X متغير عشوائي له متوسط $\mu=8$ وتباين $\sigma^2=9$.

الحل : تعطي متباينـــة تشيبيشـــف الصيغـــة $P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$.

بفـــــــــــــــرض أن $\mu-k\sigma=-4$, $\mu+k\sigma=20$ و $\mu=8$, $\sigma^2=9$, $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{9}=3$. وعلى ذلك k لا بد أن تحقق الشرط أن $8-3k=-4$ أو $8+3k=20$ وعلى ذلك $k=4$ ومنها :

$$P(-4<X<20)\geq 1-\frac{1}{(4)^2}=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}.$$

وعلى ذلك فإن الحد الأدنى للاحتمال $P(-4<X<20)$ هو $\frac{15}{16}$.

مثـــال (٣-٣٨) أوجـــد الحـــد الأدنـــى للاحتمـــال $P(-3<X<3)$ إذا كـــان $\mu=0$, $\sigma^2=1$.

الحل : من متباينة تشيبيشـــف $P(\mu-\sigma k<X<\mu+k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$. بمـــا أن $\mu=0$, $\sigma=1$ فإن $\mu-k\sigma=-3$ ومنها $0-k(1)=-3$ أو $-k=-3$, $k=3$

وعلى ذلك :

$$P(0-3<X<0+3)\geq 1-\frac{1}{3^2}$$

$$=P(-3<X<3)\geq 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9},$$

وعلى ذلك الحد الأدنى هو $\frac{8}{9}$.

المتوسط والتباين التقريبي

Approximate Mean and Variance

بفرض أن دالة في متغير عشوائي X ، لتكن H(X) يمكن فكها باستخدام مسلسلة تيلور و الحصول على صيغة تقريبية لمتوسط وتباين الدالة H(X) وذلك بدلالة المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X .

على سبيل المثال، بفرض أن H(x) لها مشتقات ...,$H'(x), H''(x)$ في فترة مفتوحة تحتوى على $\mu=E(X)$ فإن الدالة H (x) لها تقريب تيلور حول μ كالتالي :

$$H(x)\doteq H(\mu)+H'(\mu)(x-\mu)+\frac{1}{2}H''(\mu)(x-\mu)^2.$$

وعلى ذلك يقترح التقريب التالى لمتوسط الدالة H (x) :

$$E[H(X)]\doteq H(\mu)+\frac{1}{2}H''(\mu)\sigma^2,$$

وباستخدام الحديين الأوليين فإن تباين الدالة H (x) يكون على الشكل :

$$Var[H(X)]\doteq [H'(\mu)]^2\sigma^2.$$

حيث $\sigma^2 = Var(X)$.

تعتمد دقة التقريبات السابقة مبدئياً على طبيعة الدالة H(x) وكمية التشتت في توزيع X .

مثال (٣-٣٩) إذا كان X متغيراً عشوائياً موجب القيمة وإذا كان $H(X)=\ln X$ ، وعلى ذلك $H'(x)=\frac{1}{x}$ و $H''(x)=\frac{-1}{x^2}$ وتبعاً لذلك فإن المتوسط التقريبى للدالة H (X) هو :

$$E[\ln X] \doteq \ln\mu + \frac{1}{2}(-\frac{1}{\mu^2})\sigma^2$$

$$= \ln\mu - \frac{\sigma^2}{2\mu^2},$$

والتباين التقريبي للدالة H (X) هو :

$$Var(\ln X) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}.$$

(٣-٦)المئينات Percentile

يمكن وصف خصائص أخرى للتوزيعات الاحتمالية من خلال كميات تسمى المئينات.

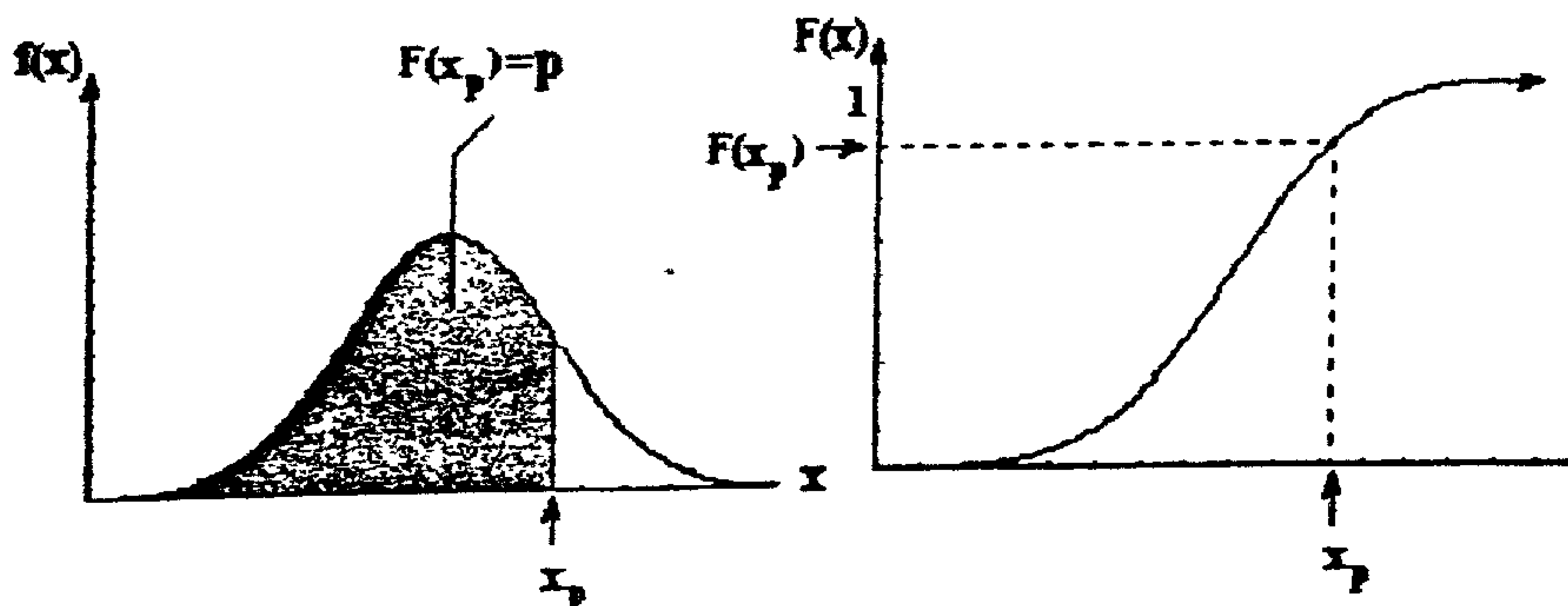
تعريف : إذا كان $0 < p < 1$ ، فإن المئين ذو الرتبة $(100p)$ لتوزيع من النوع المتصل (أو لمتغير عشوائي X) هو الحل x_p للمعادلة التالية :

$$p = F(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(y)\ dy\ .$$

تبعا للصيغة السابقة ، فإن x_p هو القيمة على المحور الأفقي للتوزيع الاحتمالي بحيث أن $100p\%$ من المساحة تحت منحنى f(x) يقع على يسار x_p و $100(1-p)\%$ تقع على يمينها. على سبيل المثال $x_{.75}$ هو المئين الخامس والسبعين والذي المساحة تحت منحني f(x) على يسار القيمة x_{75} هو $p=0.75$.شكل (٣-٢٠) يوضح التعريف :

عموما ، قد يكون التوزيع غير متصل وعلى ذلك سوف يوجد بعض القيم p والتي تكون المعادلة $p = F(x_p)$ لها أكثر من حل . وبالرغم من اهتمامنا في هذا الكتاب بالحالة المتصلة فإنه يمكن وضع تعريف عام للمئين حيث المئين ذو الرتبة $(100\ p)$ لتوزيع متغير عشوائي X هو القيمة x_p بحيث أن :

$$P[X \le x_p] \ge p \text{ and } P[X \ge x_p] \ge 1-p\ .$$



شكل (٣ – ٢٠)

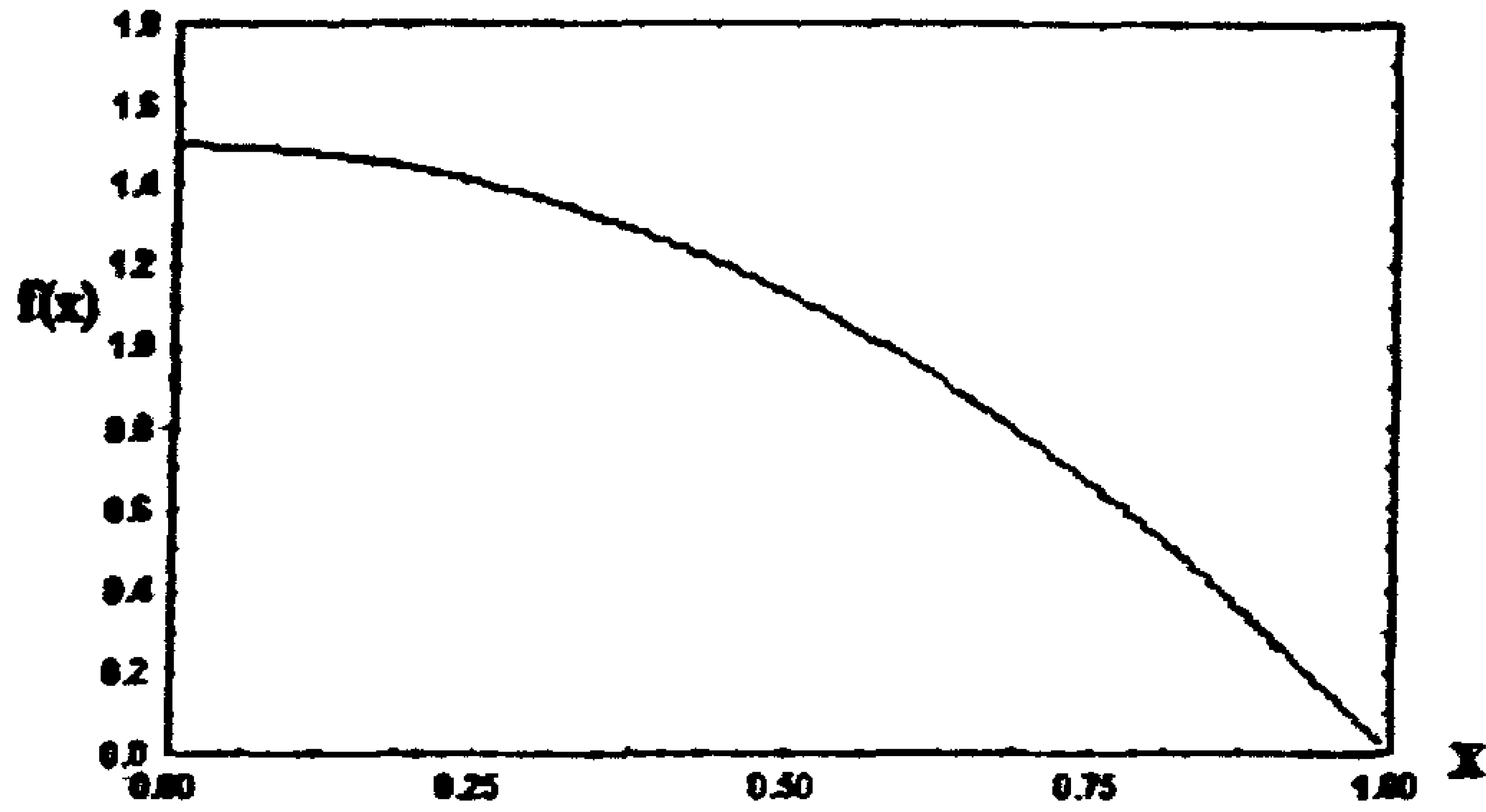
مثال (٣ – ٤٠) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x)=\frac{3}{2}(1-x^2) \qquad 0\le x\le 1$$
$$=0 \text{ elsewhere}.$$

دالة التوزيع للمتغير العشوائي X هي :

$$F(x)=\int_0^x \frac{3}{2}(1-y^2)dy=\frac{3}{2}(y-\frac{y^3}{3})\Big|_0^x$$
$$=\frac{3}{2}(x-\frac{x^3}{3}), 0\le x\le 1, F(x)=1,\ x>1, F(x)=0, x<0$$

بيان f(x) , F(x) موضحان في شكل (٣-٢١) وشكل (٣-٢٢) على التوالى .



شكل (٣-٢١)

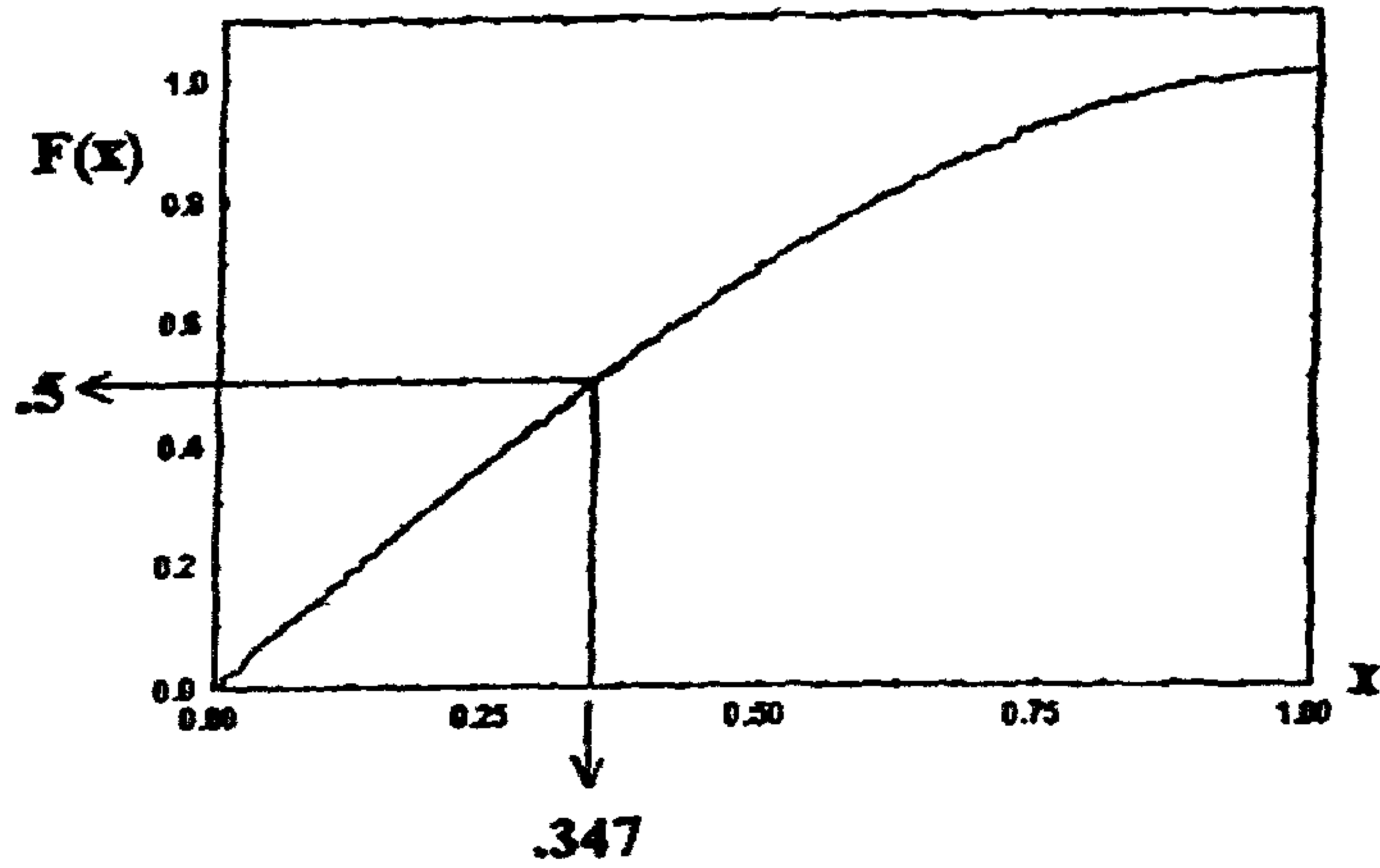
المئين ذو الرتبة (100p) لهذا التوزيع يحقق العلاقة :

$$p = F(x_p) = \frac{3}{2}\left[x_p - \frac{(x_p)^3}{3}\right]$$

أي أن :

$$(x_p)^3 - 3x_p + 2p = 0$$

للمئين الخمسين و $p = .5$ وبحل المعادلة فإن $x^3 - 3x + 1 = 0$
والحل هو $x = x_5 = .347$.



شكل (٣ – ٢٢)

تعريف : الوسيط لتوزيع متصل ما ، يرمز له بالرمز m_0 ، هو المئين الخمسين وعلى ذلك m_0 يحقق العلاقة $F(m_0) = .5$.أي أن نصف المساحة تحت دالة كثافة الاحتمال تقع على يسار m_0 و النصف الآخر يقع على يمين m_0 . في كثير من التطبيقات يستخدم الوسيط بدلا من المتوسط كمقياس للنزعة المركزية .

مثال (٣-٤١) بفرض أن دالة التوزيع لمتغير عشوائي X على الشكل :

$$F(x) = 1 - \bar{e}^{(x/3)^2} \qquad x > 0$$
$$= 0 \quad \text{elswhere} \; .$$

الوسيط هو :

$$m_0 = 3[-\ln(1-.5)]^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{\ln 2} = 2.498.$$

مثال (٣-٤٢) ليكن X متغيرا عشوائيا متصلا له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = 4x^3 \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد الوسيط :

الحل :

$$F(x) = 0 \qquad x < 0$$
$$= \int_0^x 4y^3 dy = \frac{4y^4}{4} \Big|_0^x = x^4$$

وعلى ذلك :

$$F(m_0) = .5$$
$$(m_0)^4 = .5$$

أي أن :

$$m_0 = (.5)^{1/4} .$$

تعريف : إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي X لها قيمة عظمى وحيدة عند $x = m$ أي أن القيمة العظمى للدالة $f(x)$ تساوى $f(m)$ وعلى ذلك فإن m يسمى منوال المتغير العشوائى X. للمثال (٣-٤١) إذا كان دالة كثافة الاحتمال للمتغير X هي:

$$f(x) = \frac{2}{9} x \, \bar{e}^{(x/3)^2} \qquad x > 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

فإن المنوال هو قيمة x التي نحصل عليها بحل المعادلة :

$$\frac{df(x)}{dx} = 0,$$
$$x = m = 3\sqrt{2}/2 = 2.121.$$

قد يكون للتوزيع منوالين وفي هذه الحالة يقال أن التوزيع ثنائي المنـوال وقـد يكـون للتوزيع أكثر من منوال . وأخيرا قد لا يكون للتوزيع أي منوال .

مثال (٣ – ٤٣) أوجد المنوال للدوال التالية :

(أ)
$$f(x) = 12x^2(1-x) \qquad 0 < x$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

(ب)
$$f(x) = \frac{1}{2}\ x^2\ \bar{e}^x$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

الحل : (أ)
$$\frac{df(x)}{dx} = 24x - 36x^2$$

المنوال هو الحل للمعادلة :
$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

وعلى ذلك $m = \frac{2}{3}$ هو المنوال

(ب) المنوال هو الحل للمعادلة $\frac{df(x)}{dx} = 0$

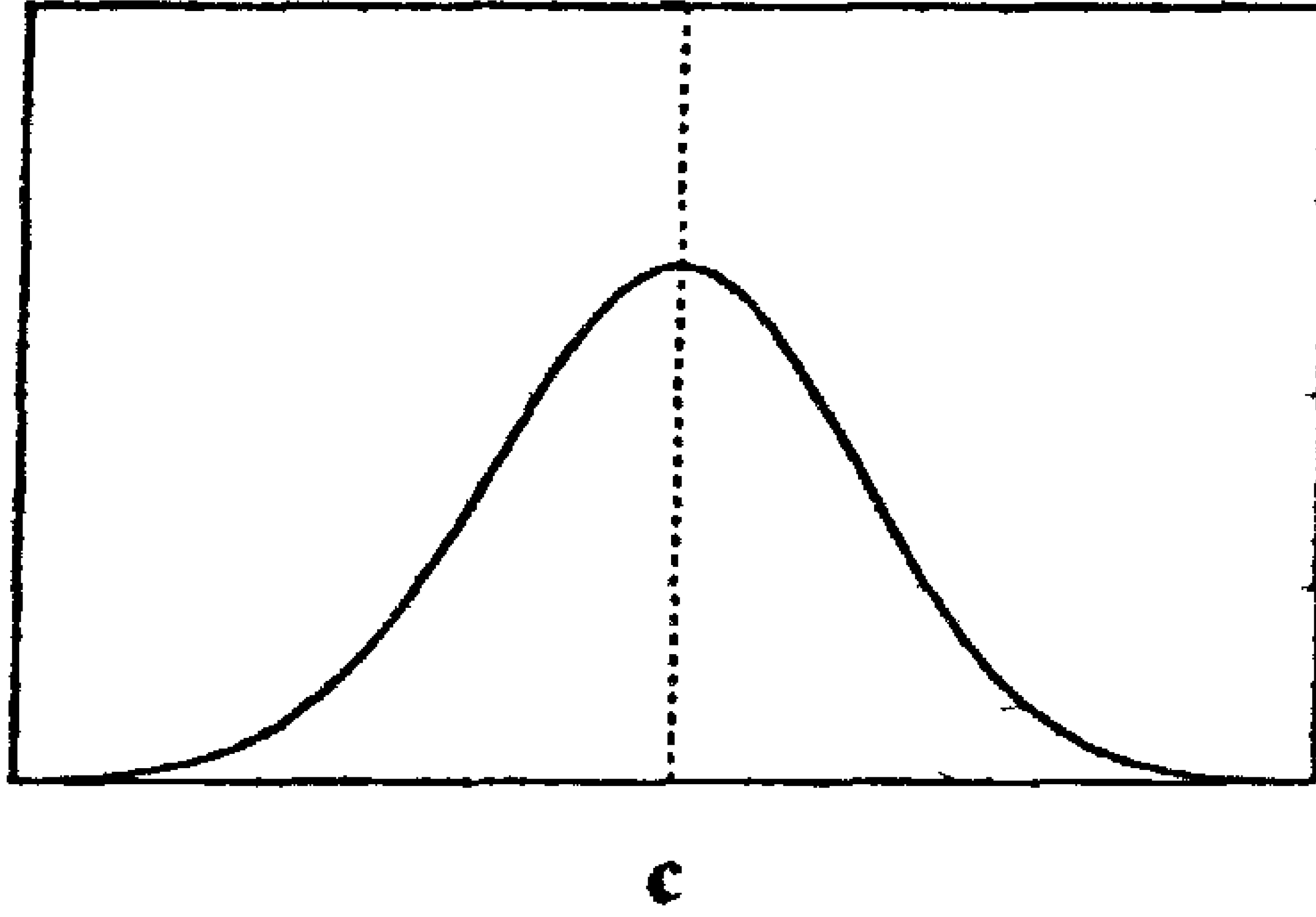
أي أن :
$$2x\bar{e}^x - x^2\bar{e}^x = 0$$

وعلى ذلك $m = 2$ هو المنوال .

عموما ، يختلف المتوسط عن الوسيط عن المنوال ولكن هناك حالات يكون فيها الثلاثـة متساويين . يقال للتوزيع أنه متماثل symmetric إذا كان بيان $f(x)$ على يسار نقطـة ما ، لتكن c ، هو الصورة في المرآة على يمين هذه النقطة . تسمى النقطـة c نقطـة التماثل . وبمعنى آخر إذا أمكننا أقامة عمود على المحور الأفقي بحيث يقسـم العمـود التوزيع إلى قسمين ينطبقان على بعضهما تمام الانطباق . النقطة c التي تمكننـا مـن إقامة العمود تسمى نقطة التماثل . إذا كانت $f(x)$ متماثلة حول النقطة c وكان المتوسط موجود فإن $\mu = c$. وبالإضافة على ذلك إذا كانت للدالة $f(x)$ نقطة عظمي وحيدة عند m (المنوال) ووسيط وحيد m_0 فإن $\mu = m = m_0$ كما هو موضح في شكل (٣-٢٣).

إذا كان التوزيع غير متماثل فإنه يكون ملتوياً وقد يكون ملتوياً ناحية اليمين كمـا هـو موضح في شكل (٣-٢٤) أو ملتوياً ناحية اليسار كما هو موضح فـي شـكل (

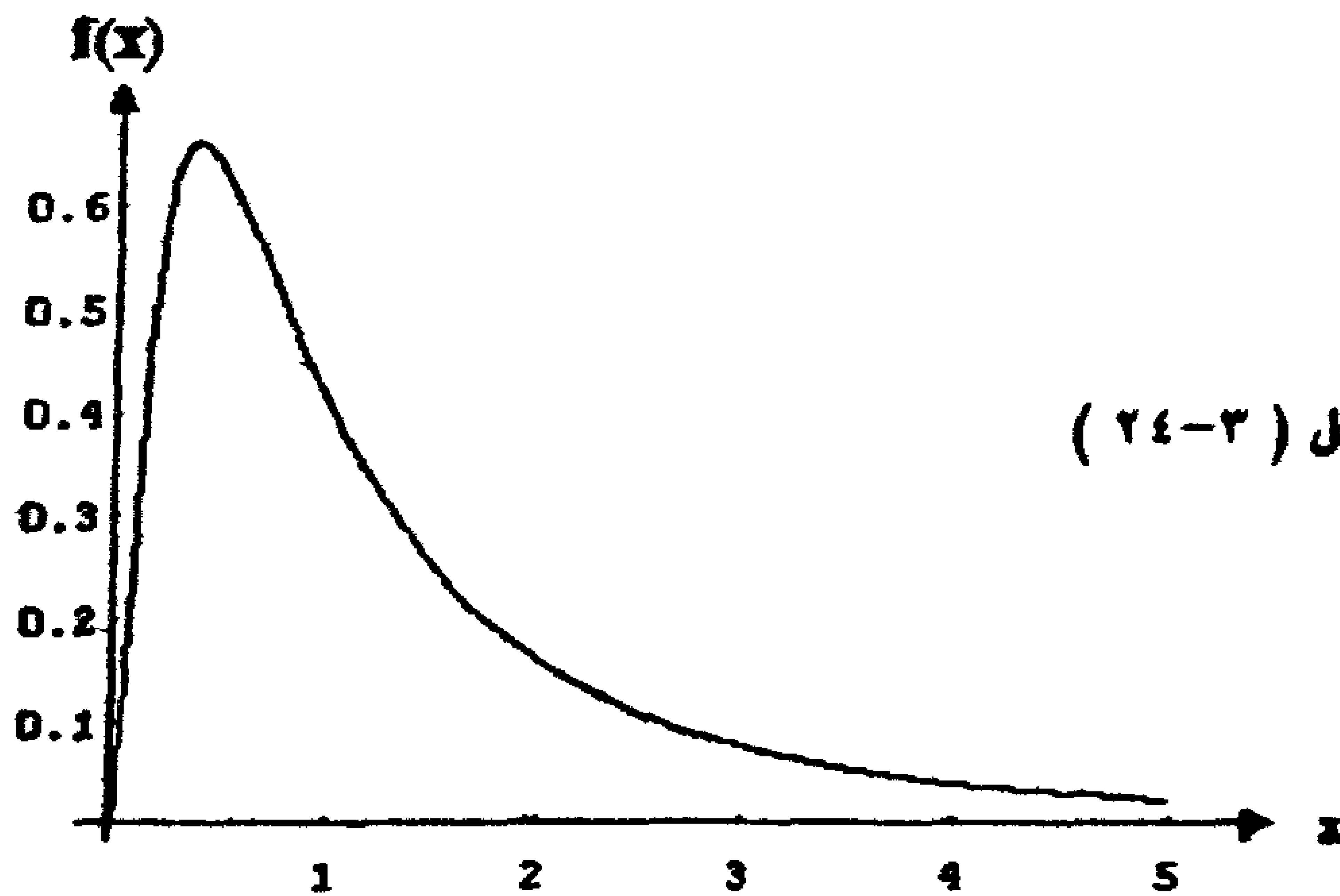
٣-٢٥). يكون التوزيع ملتويا ناحية اليمين أو موجب الالتواء positive skewed إذا كان معدل التناقص في المنحنى أسرع جهة اليمين منه جهة اليسار بحيث يكون الجانب الأيمن من المنحنى أطول من الجانب الأيسر بينما يكون التوزيع ملتوياً إلى اليسار وسالب الالتواء negative skewed إذا كان معدل التناقص في المنحنى أسرع جهة اليسار منه جهة اليمين بحيث يكون الجانب الأيسر من المنحنى أطول من الجانب الأيمن .



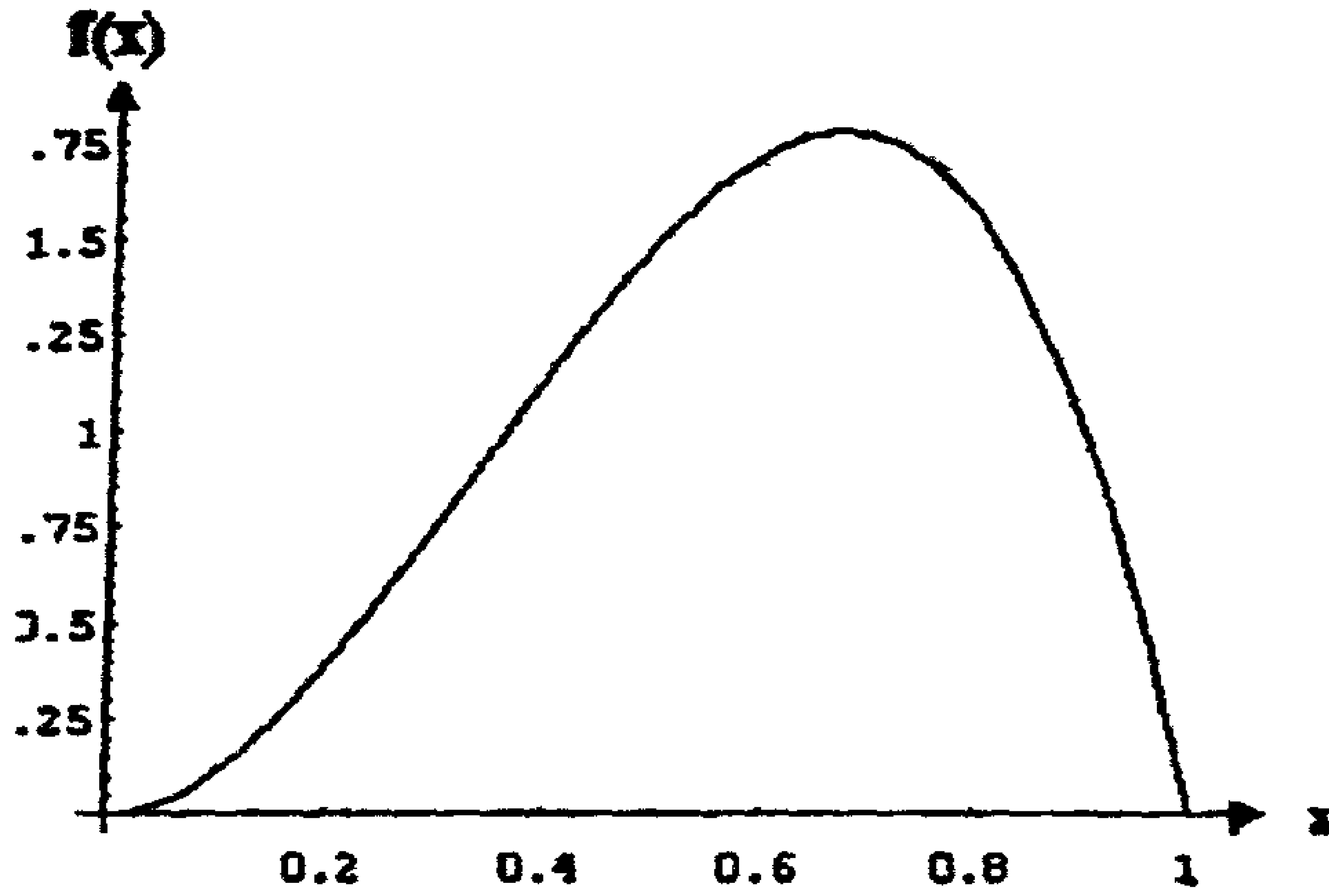
شكل (٣-٢٣)

يستخدم معامل الالتواء ،الذي تناولناه في الفصل الثاني في قياس الالتواء ويعتبر مقياس نسبي لا يعتمد على وحدات القياس للمتغير العشوائي حيث :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 .$$



شكل (٣-٢٤)



شكل (٣-٤٥)

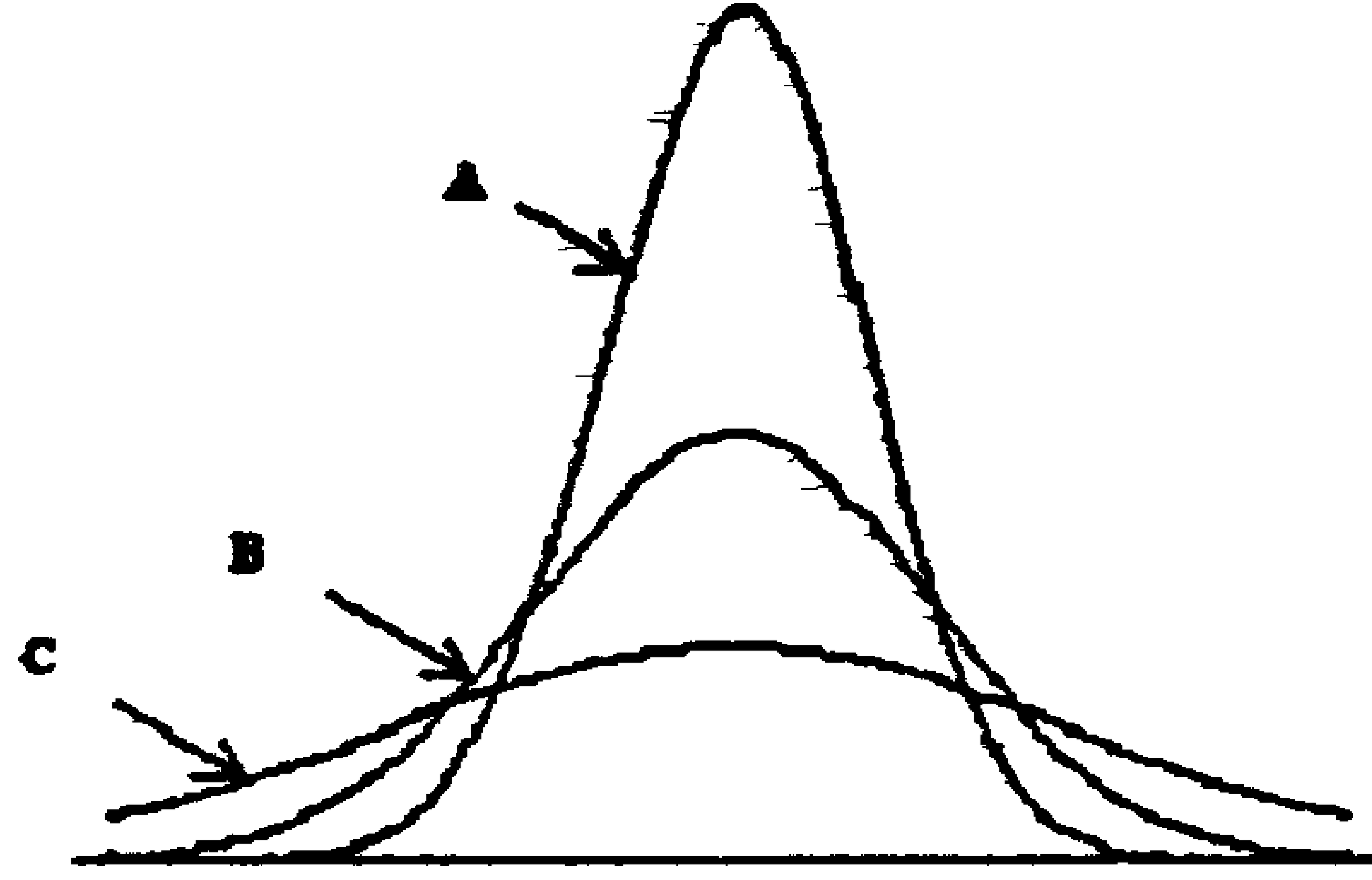
يأخذ كل من μ_3,α_3 القيمة الموجبة أو السالبة أو الصفر ودائماً يكونان متفقان في الإشارة . القيمة السالبة من α_3 دائما توجد عندما يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليسار بينما القيمة الموجبة من α_3 توجد دائماً عندما يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليمين.

يستخدم العزم الرابع حول المتوسط كدليل للتفلطح أو التدبب لتوزيع احتمالي ، وعلى ذلك فإن معامل التفلطح α_4 هو :

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 .$$

والذي لا يعتمد على وحدات القياس للمتغير العشوائي X . لتقدير تدبب القمة لتوزيع احتمالي يستخدم توزيع مشهور وهو التوزيع الطبيعي الذي سوف نتناوله في الفصل السادس كمقياس لأن α_4 لهذا التوزيع تساوي 3 . لأي توزيع آخر نقول أن التوزيع أكثر تدببا من التوزيع الطبيعي إذا كان $\alpha_4 > 3$. أيضا نقول أن التوزيع أكثر

تفلطحاً من التوزيع الطبيعي إذا كان $\alpha_4 < 3$. الأنــواع الثلاثــة مــن التوزيعــات موضحة في شكل (٣-٢٦).



شكل (٣-٢٦)

ففي شكل (٣-٢٦) ثلاث منحنيات مختلفة في كميــة التفلطــح. المنحنــى ، A ، ذو القمــة المدببة. المنحنى الثاني ، B ، وهو المعتدل يكون متوسط التفلطح. وأخيراً المنحنــى C ، المفلطح والذى يكون منبسطاً وتنخفض قمته عن قمة المنحنى المعتدل . وأخيراً المعلومــات عن التشتت والموقع والالتواء والتفلطح لتوزيع عادة ما تكون مفيدة في إعطاء صــورة عــن التوزيع .

نظرية (٣-٣) إذا كان توزيــع المتغــير العشــوائي X متمــاثل حــول المتوســط $\mu = E(X)$ فإن العزم الثالث حول المتوسط μ يساوي صفر أي أن $\mu_3 = 0$.

تعني النظرية السابقة أنه إذا كان $\mu_3 \neq 0$ فإن التوزيع لا يكون متماثل والعكس غـير صحيح بمعني أنه إذا كان التوزيع غير متماثل فمن الممكن أن يكون $\mu_3 = 0$ (انظــو تمرين (٢-٢٩) في الفصل الثاني) حيث $\mu_3 = 0$ والتوزيع غير متماثل .

تمـــاريـــــن :

-١- إذا كان فضاء المتغير العشوائي X هو :

$$R = \{x|\ 0 < x < 1\}$$

وإذا كان $B_1\left\{x|\ 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$, $B_2 = \left\{x|\ \frac{1}{2} < x < 1\right\}$ أوجد $P(B_2)$ إذا كان

$$P(B_1) = \frac{1}{4}$$

-٢- إذا كان فضاء المتغير العشوائي X هو :

$$R = \{x|\ 0 < x < 10\}$$

وإذا كان $P(B_2) = \frac{3}{8}$ حيث $B_1 = \{x|\ 1 < x < 5\}$ أثبت أن $P(B_2) \le \frac{5}{8}$ حيث :

$$B_2 = \{x|\ 5 \le x < 10\}$$

-٣- إذا كانت $B_2 = \left\{x|\ \frac{1}{2} \le x < 1\right\}$, $B_1 = \left\{x|\ \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right\}$ فئتين على الفضاء $R = \{x|\ 0 < x < 1\}$ الخاص بالمتغير العشوائي X بحيث أن :

$P(B_1) = \frac{1}{8}$, $P(B_2) = \frac{1}{2}$. أوجد , $P(B_1^c)$, $P(B_1^c \cap B_2^c)$, $P(B_1^c \cup B_2^c)$

-٤- بفرض أن نقطة إختيرت مـــن فضـــاء العينـــة $S = \{a|\ 0 < a < 10\}$. أعتـبر $A \subset S$ وإذا كانت دالة الفئة الاحتمالية هي $P(A) = \int_A \frac{1}{10} dz$. بفـرض أن المتغير العشوائي X هو $X = X(a) = 2a - 10$. أوجد دالـــة الفئـــة الاحتماليـــة للمتغير X .

-٥- بفـرض أن دالـــة الفئـــة الاحتماليـــة $P(B)$ للمتغـير العشـوائي X هـــــي : $P(B) = \int_B f(x)$ بحيث

$$f(x) = 2x/9\ ,\ \ x \in R = \{x|\ 0 < x < 3\},$$

ليكن :

$$B_1 = \{x|\ 0 < x < 1\}\ ,\ \ B_2 = \{x|\ 2 < x < 3\}$$

أحسب :

$$P(B_2) = P[X \in B_2], P(B_1) = P[X \in B_1],$$
$$P(B_1 \cup B_1) = P(X \in B_1 \cup B_2).$$

-٦- إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = ak^a / x^{a+1} \qquad x \geq k$$
$$= 0 \qquad x < k$$

إذا كان $k = 2$, $a = 3$ أوجد :

(أ) بيان $f(x)$ (ب) أوجد المتوسط والوسيط والمنوال للمتغير X .

(ج) أوجد التباين للمتغير X .

-٧- إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة احتمال على الشكل :

$$f(x) = \frac{3}{8}(2 - x)^2 \qquad 0 \leq x \leq 2$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

(أ) أوجد المتوسط μ للمتغير X .

(ب) أوجد التباين للمتغير X.

(ب) أوجد $F(x)$ للمتغير X وأوجد الوسيط .

-٨- لكل من الدوال التالية أوجد العزوم الأربعة الأولي حول المتوسط وأوجد α_4, α_3

(أ)
$$f(x) = 2x \qquad 0 \leq x \leq 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

(ب)
$$f(x) = 2(1 - x) \qquad 0 \leq x \leq 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

-٩- إذا كانت دالة التوزيع لمتغير عشوائي X على الشكل

$$F(x) = 0 \qquad x < 0$$
$$= x^2 \qquad 0 \leq x < 1$$
$$= 1 \qquad x \geq 1.$$

(أ) ما هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير X .

(ب) استخدم قيم $F(x)$ في إيجاد $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$.

-١٠-إذا كانت دالة التوزيع لمتغير عشوائي X على الشكل

$$F(x) = 0 \qquad x < 0$$
$$= x \qquad 0 \leq x < \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \leq x < 1$$
$$= 1 \qquad x \geq 1.$$

(أ) أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

(ب) استخدم قيم $F(x)$ في إيجاد $P(X = \frac{1}{2})$, $P(X > \frac{1}{2})$, $P(\frac{1}{3} \leq X < \frac{2}{3})$

-١١- أي من الدوال التالية تمثل دالة توزيع :

(أ)
$$F(t) = 0 \qquad t \leq 1$$
$$= 1 \qquad t > 1$$

(ب)
$$F(t) = 0 \qquad t < 1$$
$$= 1 \qquad t \geq 1$$

(ج)
$$F(t) = 0 \qquad t < 0$$
$$= \log_{10}(1+t) \qquad t \geq 0$$

(د)
$$F(t) = 0 \qquad t < 0$$
$$= \frac{t}{1+t} \qquad t \geq 0$$

(هـ)
$$F(t) = 0 \qquad t < 0$$
$$= \sin t \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$
$$= 1 \qquad t > \frac{\pi}{2}.$$

-١٢- إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = c(1-x)x^2 \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

(أ) أوجد الثابت c .

(ب) أوجد $E(X)$.

-١٣- إذا كانت الدالة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = k\ x^{-(k+1)} \qquad 1 < x < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

(أ) أوجد k التي تجعل $f(x)$ دالة كثافة احتمال .

(ب) أوجد $F(x)$ بالاعتماد على قيمة k في (أ).

(ج) لأي قيمة من k $E(X)$ موجودة .

-١٤- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل على الشكل :

$$f(x) = 0 \qquad x < 1$$
$$= x - 1 \qquad 1 \le x < 2$$
$$= 3 - x \qquad 2 \le x \le 3$$
$$= 0 \qquad x > 3$$

(أ) أوجد $P\left(\frac{3}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right), P\left(X \le \frac{3}{2}\right)$

(ب) أوجد $F(x)$ للمتغير العشوائي X .

-١٥- إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا بدالة كثافة احتمال :

$$f(x) = c\bar{e}^{2x} \qquad x \ge 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

(أ) ما هي c (ب) أوجد $F(x)$ للمتغير العشوائي X .

(ج)أوجد $P(2 \le X < 5)$, $P(X \ge 1)$.

(د) أوجد القيمة d بحيث أن $P(X \le d) = .5$.

-١٦- أي من الدوال التالية تمثل دالة كثافة احتمال :

(أ) $$f(x) = 3x^2 \qquad 0 \le x \le 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

(ب) $f(x)=2x \quad -1 \le x \le 2$

$= 0$ elsewhere .

(ج) $f(x)=1 \quad 0 \le x \le 1$

$= 0$ elsewhere .

(د) $f(x)=4x \quad -0 \le x \le \frac{1}{2}$

$=4(1-x) \quad \frac{1}{2} < x \le 1$

$= 0$ elsewhere .

(هـ) $f(x)=\frac{1}{2} \quad -1 \le x \le 1$

$= 0$ elsewhere .

(و) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{1}{4} \le x \le 1$

$= 0$ elsewhere .

(ز) $f(x)=\frac{1}{2}\bar{e}^{|x|} \quad -\infty \le x \le \infty$

-١٧- لكل دالة من الدوال التالية أوجد دالة كثافة الاحتمال :

(أ)
$$F(x)=0 \qquad x<0$$
$$=1-\bar{e}^{10x} \qquad x \ge 0$$

(ب)
$$F(x)=\frac{1}{2}e^{x} \qquad x<0$$
$$=1-\frac{1}{2}\bar{e}^{x} \qquad x \ge 0$$

(ج) $F(x)=\frac{1}{280}\int_{-\infty}^{x} u^4(1-u)^3 du \qquad 0 \le x \le 1$

-١٨- إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة التوزيع

$$F(x)=x/2 \qquad 0<x \le 1$$
$$=x-\frac{1}{2} \qquad 1<x \le \frac{3}{2}$$

(أ) أوجد بيان $F(x)$ و $f(x)$.

(ب) أوجد $P(X \ge \frac{1}{2}), P(X \le \frac{1}{2})$

(ج) أوجد القيمة m بحيث أن $P(X \le m)=P(X \ge m)$

(د) أوجد $E(X)$.

-١٩- إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = x^2 \qquad 0 < x \le 1$$
$$= 2/3 \qquad 1 < x \le 2$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

(أ) أوجد الوسيط .   (ب) وضح F(x) بيانيا وحدد مكان الوسيط .

-٢٠- إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا له دالة التوزيع

$$F(x) = 0 \qquad x < 1$$
$$= 2(x - 2 + \frac{1}{x}) \qquad 1 \le x \le 2$$
$$= 1 \qquad x > 2$$

(أ) أوجد المين ذو الرتبة (100p) عندما $p = \frac{1}{3}$.

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير X .

-٢١- أوجد دوال كثافة الاحتمال المقابلة للدوال F(x) التالية :

(أ)
$$F(x) = \bar{e}^{x} \qquad 0 < x < \infty$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}$$

(ب) $F(x) = (x^2 + 2x + 1)/16 \qquad -1 \le x < 3$

(ج) $F(x) = 1 - \bar{e}^{\lambda x} - \lambda \bar{e}^{\lambda x} \qquad 0 \le x < \infty, \lambda > 0$

-٢٢- إذا كان X متغيرا عشوائيا له F(x) على الشكل :

$$F(x) = x/2 \qquad 0 < x \le 2$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}$$

(أ) أوجد بيان F(x)   (ب) أوجد بيان f(x)

(ج) أوجد $P(X \le \frac{1}{2})$, $P(X \le 1.2)$, $P(X \le 1.25)$, $P(X = 1.25)$

-٢٣- إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا بدالة كثافة احتمال :

$$f(x)=\frac{2x}{9} \qquad 0<x<3$$
$$=0 \ \text{elsewhere.}$$

(أ) أوجد $F(x)$ (ب) أوجد $P(X\le 2)$

٢٤- (أ) اكتب مفكوك تيلور للدالة e^{λ} حول $\lambda=0$.

(ب) استخدم النتائج في (أ) لإثبات أن الدالة التالية دالة كثافة احتمال :

$$f(x)=\frac{\lambda^t}{t!}\bar{e}^{\lambda} \qquad t=1,2,3,....$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

حيث λ ثابت موجب (أي إثبات أن $\sum_{x=0}^{\infty} f(x)=1$).

٢٥- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي X هي :

$$\begin{aligned} f(x) &= .4 \qquad 0\le x<1 \\ &= .2 \qquad 1\le x<2 \\ &= .3 \qquad 2\le x<3 \\ &= .1 \qquad 3\le x<4 \\ &= 0 \qquad x<0 \ \text{or} \ x>4 \end{aligned}$$

(أ) أوجد $F(x)$ للمتغير العشوائي X .

(ت) أوجد $P(2\le X\le 3), P(0\le X\le 2), P(0<X\le 2),$
$P(2<X\le 3), P(X\ge 1), P(\frac{1}{2}\le X<\frac{3}{2}).$

٢٦- إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x)=3x^2 \qquad 0<x<1$$
$$=0 \ \text{elsewhere}$$

(أ) أوجد $E(X)$ (ب) $Var(X)$ (ج) $E(3x-sx^2+1)$

٢٧- إذا كان $E(X)=50$ ، $Var(X)=4$ أحسب :

$Var(-X)$, $Var(2X+3)$, $E(X^2)$

-٢٨- إذا كان X متغير متقطع بدالة كثافة الاحتمال :

x	$\mu - k\sigma$	μ	$\mu + k\sigma$
f(x)	$\frac{1}{2k^2}$	$1-\frac{1}{k^2}$	$\frac{1}{2k^2}$

حيث μ أي رقم و σ رقم موجب و $k \geq 1$ أثبت أن :

(أ) متوسط X هو μ.

(ب) تباين المتغير X هو (σ^2).

(ج) أثبت أن $P(X \geq \mu + k\sigma \text{ or } X \leq \mu + k\sigma) = \frac{1}{k^2}$

-٢٩- بفرض أن X متغيرا عشوائيا متوسطه 100 وانحرافه المعياري 8 . مـــا هــو الاحتمال إن X يقع بين 90 , 100 .

الفصل الرابع

الدوال المولدة للعزوم

Moments Generating Functions

تعتبر الدوال المولدة للعزوم أداة قوية فى نظرية الاحتمالات ، فباستخدام الدوال المولدة يمكن الحصول على توزيعات أو عزوم لتوزيعات بطريقة مباشرة و أقل تعقيدا من طرق الحساب الأخرى . يوجد العديد من الدوال المولدة ، وكل واحدة مفيدة لأنواع مختلفة من المشاكل وأيضا لأنواع مختلفة من المتغيرات العشوائية .

(٤ - ١) الدالة المولدة للعزوم

Moments Generating Function

بفرض وجود رقم موجب h بحيث للفترة $-h < t < h$ يكون التوقع $E(e^{tX})$ موجود لمتغير عشوائي X . تبعا لذلك فإن :

$$E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\ f(x)\ dx,$$

عندما X متغيرا عشوائيا من النوع المتصل أو :

$$E(e^{tX}) = \sum_{x} e^{tx}\ f(x),$$

عندما X متغيرا عشوائيا من النوع المتقطع . هذا التوقع يسمي الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X (أو للتوزيع) ويرمز لها بالرمز $M_X(t)$ حيث :

$$M_X(t) = E(e^{tX})\ .$$

عندما $t = 0$ فإن $M_X(0) = 1$. إن وجود الدالة المولدة للعزوم مرتبط بكون المجموع أو التكامل متقارب على نحو مطلق وإذا لم يكن كذلك فعندئذ يقال أن الدالة المولدة غير موجودة .

مثال (٤-١) إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا بدالة كثافة احتمال :

$$f(x) = \frac{1}{n} \qquad ,x = 1,2,\ldots,n$$
$$= 0 \text{ elsewhere}\ .$$

أوجد الدالة للعزوم للمتغير العشوائي X .

الحل :

$$M_X(t) = \sum_{x=1}^{n} e^{tx}\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{x=1}^{n} e^{tx}$$

بوضع :

$$\ell_n = 1 + e^t + e^{2t} + \ldots + e^{(n-1)t}$$

فإن :

$$e^t \ell_n = e^t + e^{2t} + e^{3t} + \ldots + e^{nt}$$

وعلى ذلك فإن :

$$\ell_n - e^t \ell_n = 1 - e^{nt}$$

أي أن :

$$\ell_n = \frac{1 - e^{nt}}{1 - e^t}$$

ومنها :

$$e^t \ell_n = \frac{e^t.(1 - e^{nt})}{1 - e^t} \; .$$

تبعا لذلك فإن :

$$M_X(t) = \frac{1}{n} e^t \ell_n = \frac{e^t.(1 - e^{nt})}{n(1 - e^t)} \; .$$

هي الدالة المولدة للعزوم للمتغير X .

مثال (٤-٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2} \qquad , x = 1,2,3,\ldots$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

الدالة المولدة للعزوم للدالة $f(x)$ هي :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} \; f(x) \; = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{6e^{tx}}{\pi^2 x^2}$$

يمكن إثبات أن هذه المسلسلة تبا عدية عندما $t > 0$ وذلك باستخدام اختبار النسبة وعلى ذلك لا يوجد عدد موجب h حيث $M_X(t)$ تكون موجودة و $-h < t < h$. وتبعا لذلك $f(x)$ لهذا المثال ليس لها دالة مولدة للعزوم .

مثال (٤-٣) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = e^{-x} \qquad 0 < x < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

الدالة المولدة للعزوم هي :

$$M_X(t)=\int_0^{\infty} e^{tx}\ e^{-x}\ dx=\int_0^{\infty} \bar{e}^{(1-t)x}dx$$

$$=\frac{-1}{1-t}\bar{e}^{(1-t)x}\ \Big|_0^{\infty}=\frac{1}{1-t}\qquad t<1.$$

إذا وجدت الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لمتغير عشوائي X فإنها تكون وحيدة . وعلى ذلك إذا كان لدينا متغيرين لهما نفس الدالة المولدة للعزوم فلا بد أن يكون لهما نفس التوزيع وهذا يتضح من النظرية التالية :

نظرية (٤-١) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين وإذا كان X_1 له دالة التوزيع $F_1(x)$ والدالة المولدة للعزوم $M_1(t)$. أيضا إذا كان X_2 له دالة التوزيع $F_2(x)$ والدالة المولدة للعزوم $M_2(t)$ فإن $F_1(x)=F_2(x)$ لجميع قيم x الحقيقية إذا و فقط إذا كانت $M_1(t)=M_2(t)$ وذلك لجميع قيم t فى الفترة $-h<t<h$.

مثال (٤-٤) بفرض أن X , Y متغيرين عشوائيين يأخذان نفس القيم 0, 1, 2 ، وإذا كان X , Y لهما نفس الدالة المولدة للعزوم حيث :

$$M_X(t)=M_Y(t)=\sum_{x=0}^{2} e^{tx}f_X(x)=\sum_{y=0}^{2} e^{ty}\ f_Y(y).$$

بوضع $s=e^t$ و $c_i=f_X(i)-f_Y(i)$ حيث $i=0,\ 1,\ 2$. وعلى ذلك $c_0+c_1s+c_2s^2=0$ لجميع $s>0$. المعاملات الممكنة سوف تكون $c_0=c_1=c_2=0$ والتي تعني أن $f_X(i)=f_Y(i)$ حيث $i=0,1,2$.

وبما أن الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي X تكون وحيده (إذا وجدت) فإنها تستخدم فى التعرف على شكل التوزيع للمتغير العشوائي X ، أي أنها تمتلك خاصية الوحدانية (الانفرادية).

المثال التالي يوضح كيفية التعرف على التوزيع الاحتمالي من الدالة المولدة للعزوم .

مثال (٤-٥) إذا كانت f(x) هي دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي X من النوع المتقطع وإذا كانت قيم x هي a, b, c, d وكانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير X على الشكل :

$$M_X(t)=\sum_x e^{tx}f(x)=\frac{1}{10}e^t+\frac{2}{10}e^{2t}+\frac{3}{10}e^{3t}+\frac{4}{10}e^{4t}$$

وهذا يعني أن :

$$d=4,f(d)=\frac{4}{10},\ \ c=3,f(c)=\frac{3}{10},\ \ b=2,f(b)=\frac{2}{10},\ \ a=1,f(a)=\frac{1}{10}$$

أو ببساطة :

$$f(x)=\frac{x}{10}\qquad x=1,2,3,4$$
$$=0\ \ \text{elsewhere}.$$

إن عملية التعرف على التوزيع الاحتمالي من خلال الدالة المولدة للعزوم ليست سهلة في كل الحالات . فعلى سبيل المثال إذا كان X متغيراً عشوائياً من النوع المتصل بدالة مولدة للعزوم على الشكل :

$$M_X(t)=\frac{1}{(1-t)^2}\qquad t<1.$$

وعلى ذلك :

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)\ dx,\qquad t<1.$$

من الواضح أنه من الصعب التعرف على f(x) من الصيغة السابقة وذلك بالرغم من أنه يمكن إثبات أن دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x)=x\,e^{-x}\qquad 0<x<\infty$$
$$=0\ \ \text{elsewhere}.$$

لها دالة مولدة للعزوم على الشكل :

$$M_X(t)=(1-t)^{-2}\qquad t<1.$$

بعض الخصائص المميزة لتوزيع له دالة مولدة للعزوم $M_X(t)$ يمكن الحصول عليها مباشرة من $M_X(t)$. على سبيل المثال ، وجود $M_X(t)$ في الفترة : $-h<t<h$ تعني أن المشتقات من كل الرتب موجودة عند $t=0$ حيث :

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=M'_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx}f(x)\ dx\ ,$$

عندما X متغيرا عشوائيا من النوع المتصل ، أو :

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=M'_X(t)=\sum_x\ xe^{tx}f(x)\ ,$$

عندما X متغيرا عشوائيا من النوع المتقطع . بوضع $t = 0$ فإننـــا نحصـــل فـــي كـــلا الحالتين على :

$$M'_X(0)=E(X)=\mu\ .$$

المشتقة الثانية للدالة $M_X(t)$ هي :

$$M''_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{tx}f(x)\ dx,$$

أو :

$$M''_X(t)=\sum_x\ x^2e^{tx}f(x)$$

وعلى ذلك :

$$M''_X(0)=E(X^2)$$

وتبعا لذلك فإن :

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=M''_X(0)-[M'_X(0)]^2.$$

وبصورة عامـــة إذا أمكـــن تفـــاضل الدالـــة المولـــدة للعـــزوم r مـــن المـــرات فـــإن $E(X^r)=M^r_X(0)$. على سبيل المثـــال إذا كـــان $M_X(t)=(1-t)^{-1}, t<1$ فـــإن المشتقة من الدرجة r للدالة $M_X(t)$ هي :

$$M^{(r)}_X(t)=r!(1-t)^{-r-1}.$$

العزوم حول الصفر $E(X^r)$ ، من الدرجة r ، يمكن الحصول عليه كالتالي :

$$E(X^r)=M^{(r)}_X(0)=r!\ .$$

المتوسط μ هو :

$$\mu=E(X)=1!=1,$$

التباين :

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=2-(1)^2=1.$$

بالطبع يمكننا حساب μ, σ^2 من دالة كثافة الاحتمال حيث :

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x) \ dx,$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ f(x) \ dx - \mu^2$$

في بعض الأحيان يكون هناك طريقة أسهل من الأخرى :

أيضا باستخدام مسلسلة مكلورين يمكن وضع $M_X(t)$ على الصورة التالية :

$$M_X(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots \quad \text{حيث} \quad c_r = \frac{E(X)^r}{r!}$$

نظرية (٤-٢) إذا كانت الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي X موجودة ، فإن :

$$E(X^r) = M_X^{(r)}(0) \qquad r = 1,2,\ldots$$

وأيضا :

$$M_X(t) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{E(X^r)\, t^r}{r!}$$

البرهان : سوف نهتم بحالة متغير عشوائي متصل X . الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي متصل X هي :

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) \ dx,$$

وعلى ذلك عندما تكون $M_X(t)$ موجودة فإن :

$$M_X^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x) \ dx .$$

لقيم r حيث $r = 1, 2, \ldots$ ومنها فإن :

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) \ dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^0 f(x) \ dx = M_X^{(r)}(0).$$

نعلم من مبادئ الرياضة البحتة أن e^{tx} يمكن كتابتها كالتالي :

$$e^{tx} = 1 + \frac{tx}{1!} + \frac{t^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{(tx)^r}{r!} + \ldots$$

أي أن :

$$e^{tx} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tx)^r}{r!}$$

وعلى ذلك فإن الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي متصل يمكن كتابتها على الشكل :

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tx)^r}{r!} f(x)\ dx$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\ dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \mu'_r$$

$$= \mu'_0 + \frac{t}{1!}\mu'_1 + \frac{t^2 \mu'_2}{2!} + \ldots + \frac{t^r \mu'_r}{r!} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{t\mu'_1}{1!} + \frac{t^2 \mu'_2}{2!} + \ldots + \frac{t^r \mu'_r}{r!} + \ldots$$

وعلى ذلك :

$$M_X(t) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{E(X^r) t^r}{r!}.$$

أي أن العزم الأول حول الصفر هو معامل $\frac{t}{1!}$ في الدالة المولدة للعزوم بعد وضعها في صيغة مسلسلة مكلورين والعزم الثاني حول الصفر هو معامل $\frac{t^2}{2!}$ في الدالة . والعزم الثالث حول الصفر هو معامل $\frac{t^3}{3!}$ في الدالة. وأخيراً العزم من الدرجة r حول الصفر هو معامل $\frac{t^r}{r!}$ في الدالة .

نفس البرهان السابق يتحقق لمتغير عشوائي متقطع مع استبدال التكامل بالمجموع .

مثال (٤-٦) إذا كان X متغيرا عشوائيا له الدالة المولدة للعزوم $M_X(t) = e^{t^2/2}$, $-\infty < t < \infty$. أوجد العزم من الدرجة r حول الصفر.

الحل :

$$M_X(t) = e^{t^2/2} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{r!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^r + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{(3)(1)}{4!}t^4 + \dots + \frac{(2r-1)\dots(3)(1)}{(2r)!}t^{2r} + \dots$$

وبما أن معامل $\frac{t^r}{r!}$ في مفكوك $M_X(t)$ هو $E(X^r)$ و لمثالنا فإن :

$$E(X^{2r}) = (2r-1)(2r-3)\dots(3)(1) = \frac{(2r)!}{2^r\ r!} \quad , r = 1,2,3,\dots$$

و

$$E(X^{2r-1}) = 0 \quad , \quad r = 1,2,3,\dots$$

مثال (٤-٧) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال كمتغير عشوائي X على الصورة :

$$f(x) = (1/2)^{x+1} \qquad x = 0,1,2,\dots$$
$$= 0 \ \text{ elsewhere.}$$

الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي :

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{\infty}(e^t/2)^x$$

باستخدام العلاقة التالية للمسلسلة الهندسية :

$$1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \frac{1}{1-s} \qquad -1 < s < 1$$

بوضع $s = e^t/2$ فإن :

$$M_X(t) = \frac{1}{2-e^t} \qquad t < \ln 2.$$

المشتقة الأولى هي $M'_X(t) = e^t(2-e^t)^{-2}$ وعلى ذلك $M'_X(0) = E(X) = e^0(2-e^0)^{-2} = 1$ ويمكن إيجاد العزوم من الدرجة العليا بنفس الطريقة .

مثال (٤-٨) إذا كان X متغيراً بدالة كثافة احتمال :

$$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1-p & x = 0 \\ 0 & \text{elsewhere}. \end{cases}$$

فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي :

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = e^t.p + e^0.(1-p)$$

$$= p\ e^t + (1-p)$$

$$= p\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots\right) + (1-p)$$

$$= 1 + p\left(\frac{t}{1!}\right) + p\frac{t^2}{2!} + \ldots$$

المعامل لـــ $\frac{t^r}{r!}$ يساوي p لجميع $r = 1,2,\ldots$ وعلى ذلك $E(X^r) = p$ ما عدا عندما $r = 0$

مثال (٤-٩) إذا كانت دالة التوزيع لمتغير عشوائي X على الشكل :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - pe^{-x} & x \geq 0\ ,\ 0 < p < 1 \end{cases}$$

أوجد الدالة المولدة للعزوم واستخدمها فى إيجاد μ, σ^2 .

الحل : دالة كثافة الاحتمال للمتغير X هي :

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = p\ \bar{e}^x \qquad x > 0$$

وعلى ذلك الدالة المولدة للعزوم هي :

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$= e^{t.0}P(X=0) + \int_0^{\infty} e^{tx} p \bar{e}^{x} \quad dx$$

$$= (1-p) + \int_0^{\infty} p \ \bar{e}^{x(1-t)} \quad dx$$

ولكن :

$$\int_0^{\infty} p\bar{e}^{x(1-t)} \quad dx = \frac{-p}{1-t} \bar{e}^{x(1-t)} \Big|_0^{\infty} , \qquad |t| < 0$$

$$= \frac{-p}{1-t}[0-1] = \frac{p}{1-t}.$$

وعلى ذلك :

$$M_X(t) = 1 - p + p(1 + t + t^2 + \ldots)$$

$$= 1 + pt + pt^2 + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} pt^m.$$

$$E(X) = M'_X(0) = 0 + p + p \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)t^m \Big|_{t=0}$$

$$= p + p \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)(0)^m = p.$$

وعلى ذلك متوسط المتغير العشوائي X هو $\mu = E(X) = p$ والتباين للمتغير X هي :

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2) = M''(0) = \frac{d^2}{dt^2}(1 + p \sum_{m=1}^{\infty} t^m)\Big|_{t=0}$$

$$= p\frac{d}{dt}(1 + 2t + 3t^2 + \ldots) \Big|_{t=0}$$

$$= p(0 + 2 + 6t + \ldots) \Big|_{t=0}$$

$$= 2p.$$

وعلى ذلك :

$$\sigma^2 = 2p - p^2 = p(2-p).$$

نظرية (٤-٣) إذا كان $Y = aX + b$ فإن :

$$M_Y(t) = e^{bt}\, M_X(at)$$

البرهان :

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\; e^{t(aX+b)}$$

$$E\left(e^{atX}\, e^{bt}\right) = e^{bt}\; E(e^{taX})$$

$$= e^{bt}\; M_X(at).$$

واحد من التطبيقات الممكنة لهذه النظرية هو حساب العزم من الدرجة r حول المتوسط $E(X-\mu)^r$ ، وذلك لأن $M_{X-\mu}(t) = \bar{e}^{\mu t}\; M_X(t)$ (الدالة المولدة للعزوم المركزية أو حول الوسط) وعلى ذلك :

$$E(X-\mu)^r = \frac{d^r}{dt^r}[\bar{e}^{\mu t} M_X(t)]_{t=0}.$$

(٤-٢) الدالة المولدة لعزم المضروب (العزم العاملى)
The Factorial Moment Generating Function

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا يأخذ قيما غير سالبة وكانت دالته الاحتمالية هي $f(x)$ فإنه يكون من السهل اشتقاق العزوم باستخدام عزوم المضروب والتي تقوم بتوليدها دالة تسمي الدالة المولدة لعزم المضروب والتي تأخذ الشكل التالي :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_x t^x f(x)$$

وذلك إذا كان التوقع $E(t^X)$ موجود لجميع قيم t فى الفترة $1-h < t < 1+h$.

يوجد علاقة بين الدالة $M_X(t)$ و الدالة $G_X(t)$ حيث :

$$G_X(t) = E(t^X) = E[e^{X\ln t}]$$

$$= M_X(\ln t)\ .$$

نظرية (٤-٤) إذا كان X متغيرا عشوائيا له الدالة $G_X(t)$ فإن :

$$G'_X(1) = E(X)$$
$$G''_X(1) = E[X(X-1)]$$
$$G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)...(X-r+1)].$$

ومن الممكن حساب العزوم من الدرجة r حول الصفر ، $E(X^r)$ ، من عزوم المضروب . فعلى سبيل المثال :

$$E[X(X-1)] = E[X^2 - X]$$
$$= E(X^2) - E(X) .$$

وعلى ذلك :

$$E(X^2) = E(X) + E[X(X-1)].$$

مثال (٤-١٠) للمثال (٤-٧) فإن الدالة $G_X(t)$ يمكن الحصول عليها كالتالي :

$$G_X(t) = M_X(\ln t)$$
$$= \frac{1}{2-t} \qquad t < 2.$$

يلاحظ أن المشتقات من الدرجات العليا يمكن إيجادها بسهولة من الدالة $G_X(t)$ بعكس الحال بالنسبة للدالة $M_X(t)$ وعلى ذلك المشتقة من الدرجة r للدالة $G_X(t)$ في هذا المثال هي :

$$G_X^{(r)}(t) = r!(2-t)^{-r-1}.$$

وعلى ذلك :

$$E(X) = G'_X(1) = 1!(2-1)^{-2} = 1,$$
$$E[(X(X-1)] = G''_X(1) = 2!(2-1)^{-3} = 2.$$

تبعا لذلك فإن :

$$E(X^2) = E(X) + 2 = 3,$$
$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1^2 = 2.$$

مثال (٤-١١) بفرض أن X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \frac{\bar{e}^{\lambda}\ \lambda^{x}}{x!} \quad x = 0,1,2,...$$

$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x \frac{\lambda^x}{x!}\ \bar{e}^{\lambda}$$

$$= \bar{e}^{\lambda}\left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^x}{x!}\right] = \bar{e}^{\lambda+\lambda t}.$$

وعلى ذلك :

$$G_X^{(r)}(t) = \frac{d^r(\bar{e}^{\lambda+\lambda t})}{dt^r}$$

$$= \lambda^r\ \bar{e}^{\lambda+\lambda t}.$$

وبالتالي فإن :

$$E[X(X-1)...(X-r+1)] = G_X^{(r)}(1) = \lambda^r$$

و

$$\sigma_X^2 = E[(X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

مثال (٤-١٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x\ 1-p^{n-x} \qquad ,x = 0,1,2,...,n$$

$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{n} t^x \binom{n}{x} p^x\ (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (tp)^x\ (1-p)^{n-x} = [tp + (1-p)]^n.$$

وعلى ذلك :

$$G'_X(t) = np[tp + (1-p)]^{n-1}$$

$$E(X) = G'_X(1) = np,$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X),$$

$$G''_X(t) = n(n-1)p^2[tp + (1-p)]^{n-2},$$

$$E[X(X-1)] = G''(1) = n(n-1)p^2,$$

$$\sigma^2 = E[X(X-1)] + E(X) - (E(X))^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n\,p[\,(n-1)\,p + 1 - np\,]$$

$$= np[np - p + 1 - np] = np(1-p).$$

تسمي الدالة $G_X(t)$ فى بعض الأحيان بالدالة المولدة للاحتمال probability generating function . أي أنه بوضع الدالة $G_X(t)$ على الصورة التالية :

$$G_X(t) = f(0) + t\,f(1) + \ldots + t^r f(r) + ..$$

يكون معامل t^r فى مفكوك الدالة $G_X(t)$ هو $f(r) = P(X = r)$ أي أن :

$$G_X(t) = f(0) + \sum_{x=1}^{\infty} t^x f(x)$$

والذي يعنى أن :

$$\frac{1}{r!} G_X^{(r)}(0) = f(x) \qquad x = 1,2,\ldots$$

أي أن الدالة المولدة للاحتمال تحدد دالة كثافة الاحتمال لأي متغير عشـوائي X معـرف على قيم صحيحة وغير سالبة .

مثال (٤-١٣) للمثال (٤-١١) فإن :

$$G_X(t) = \bar{e}^{\lambda + \lambda t}$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل :

$$G_X(t) = \bar{e}^{\lambda} + t\frac{\bar{e}^{\lambda}\lambda}{1} + t^2\frac{\bar{e}^{\lambda}\lambda^2}{2!} + \ldots$$

وبالتالي فإن :

$$P(X=0)=G_X(0)=\bar{e}^{\lambda},$$

$$P(X=1)=\frac{G'_X(0)}{1!}=\frac{\bar{e}^{\lambda}\lambda}{1!},$$

$$P(X=2)=\frac{G''_X(0)}{2!}=\frac{\bar{e}^{\lambda}\lambda^2}{2!}.$$

مثال (٤-١٤) إذا كانت الدالة $G_X(t)$ لمتغير عشوائي على الصورة :

$$G_X(t)=\frac{pt}{1-(1-p)t},$$

حيث أن $0<p<1$ ، $0\le t\le 1,$ فإن :

$$f(0)=G_X(0)=0,$$

$$f(1)=G'_X(0)=\frac{p}{[1-(1-p)0]^2}=p,$$

$$f(2)=\frac{1}{2}G''_X(0)=\frac{1}{2}\frac{2p(1-p)}{[1-(1-p)0]^3}=p(1-p).$$

عموما يمكن إثبات أن :

$$f(x)=p(1-p)^{x-1} \qquad x=1,2,\dots$$

نظرية (٤-٤) إذا كان a , b مقدارين موجبين صحيحين فإن :

$$G_{aX+b}(t)=E[t^{aX+b}]=t^bE[(t^a)^X]=t^bG_X(t^a)$$

مثال (٤-١٥) إذا كانت الدالة $G_X(t)$ لمتغير عشوائي X هي :

$$G_X(t)=\frac{pt}{[1-(1-p)t]}$$

وبفرض أن $Y = X-1$ فإن :

$$G_X(t)=G_{Y+1}(t)=t\,G_Y(t).$$

وعلى ذلك الدالة $G_Y(t)$ للمتغير Y هي :

$$G_Y(t)=\frac{1}{t}G_X(t)=\frac{1}{t}\frac{pt}{[1-(1-p)t]}=\frac{p}{1-(1-p)t}.$$

The Characteristic Function الدالة المميزة (٤-٣)

كما لاحظنا سابقا ، فإن العيب الرئيسي لكل من الدالة $M_X(t)$ و الدالة $G_X(t)$ أنهما غير موجودين لبعض التوزيعات الاحتمالية . على خلاف ذلك فإن الدالـــة الممـــيزة (أو تحويلة فورير Fourier transform) معرفة لجميع التوزيعـــات الاحتماليـــة . الدالـــة المميزة لمتغير عشوائي X تعرف كالآتي :

$$\phi_X(t) = \sum_x e^{itx} f(x),$$

عندما يكون المتغير العشوائى من النوع المتقطع بينما :

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x), \qquad -\infty < t < \infty$$

عندما يكون X متغير عشوائي متصل . هنا $i = \sqrt{-1}$ أي العدد التخيلي . قيـــم الدالـــة المميزة قد تكون مركبة وعلى ذلك فإن فهم واستخدام هذا النوع من الدوال المولدة يحتـاج إلي معلومات في نظرية المتغيرات المركبة . وتبعا لذلك فإن دراســـة الدالـــة الممـــيزة يقتصر على الكتب المتقدمة في نظرية الاحتمال . كثير من العلاقـــات بيـــن التوزيعـــات الاحتمالية يمكن اشتقاقها بسهولة باستخدام الدالة المميزة أكثر من استخدام دالة التوزيع .

خصائص الدالة المميزة :

(أ)

$$\phi_X(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\ dx \right] \Big|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1.$$

(ب) المرافق المركب لهذه الدالة يساوي $\phi_X(-t)$ أي أن :

$$\bar{\phi}_X(t) = \phi_X(-t)$$

والتي يمكن إثباتها كالآتي :

$$\bar{\phi}_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{e}^{itx} f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t)x} f(x)\ dx = \phi(-t).$$

(ج) الدالة $\phi(t)$ محدودة لجميع القيم الحقيقية من t أي أن $|\phi_X(t)| \le 1$.

البرهان :

بما أن :

$$e^{itx} = \text{Cos}(tx) + i\ \text{Sin}(tx),$$

فإن :

$$\left|e^{itx}\right| = \text{Cos}^2(tx) + \sin^2(tx) = 1$$

لجميع القيم الحقيقة من t فإن :

$$|\phi_X(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} \right| f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$$

أي أن :

$$|\phi\ _X(t)| \leq 1$$

العزوم بدلالة الدالة المميزة :

بتفاضل الدالة المميزة بالنسبة إلى t فإن :

$$\phi'_X(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} (ix) e^{itx} f(x)\ dx.$$

وبوضع 0 = t فإن :

$$\phi'_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} ix\ f(x)\ dx$$

$$= i\ \mu,$$

$$\phi''_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^2\ f(x)\ dx$$

$$= i^2\ \mu'_2.$$

عموما المشتقات من الدرجة r بالنسبة لـ t هي :

$$\phi_X^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^r\ e^{itx}\ f(x)\ dx\ .$$

وبوضع 0 = t فإن :

$$\phi_X^{(r)}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^r\ f(x)\ dx=i^r\ \mu'_r.$$

وعلى ذلك العزم من الدرجة r حول الصفر هو :

$$\mu'_r=\frac{1}{i^r}\ \phi^{(r)}(0).$$

علاقات مهمـــة :

إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة مميزة $\phi_X(t)$ وإذا كان $Y = aX+b$ فإن :

$$\phi_Y(t)=e^{itb}\ \phi(at)$$

البرهان :

$$\phi_Y(t)=E(e^{itY})$$

وبالتعويض عن Y بقيمتها فإن :

$$\phi_Y(t)=E[e^{it(aX+b)}]$$

$$=e^{itb}\ \phi_X(at).$$

(أ) بوضع $b = 0$ فإن $Y = aX$ و $\phi_Y(t)=\phi_X(at)$.

(ب) بوضع $a = 1$ فإن $Y = X+b$ و على ذلك $\phi_Y(t)=e^{itb}\phi_X(t)$.

مثال (٤-١٦) إذا كان Y متغيراً عشوائياً له الدالة $\phi_Y(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$ المطلوب ايجاد الدالـة المميزة للمتغير X حيث $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

الحل :

$X=Y\sigma+\mu$.

بوضع $a=\sigma$ و $\mu=b$ فإن :

$$\phi_X(t)=\phi_{Y\sigma+\mu}=e^{it\mu}\phi_Y(\sigma t)$$

$$=e^{it\mu}\ \bar{e}^{1/2(\sigma t)^2}$$

$$=e^{it\mu-(1/2)t^2\sigma^2}.$$

العلاقة بين الدالة المميزة والدوال الأخرى

(أ) بوضع it بدلاً من t في الدالة المولدة للعزوم نحصل على الدالة المميزة أي أن :

$$M_X(it) = E(e^{itX}) = \phi_X(t)$$

(ب) بوضع e^{it} بدلاً من t في الدالة المولدة للاحتمالات نحصل على الدالة المميزة أي أن :

$$G_X(e^{it}) = E(e^{itX}) = \phi_X(t)$$

(ج) بوضع $\frac{\ln t}{i}$ بدلاً من t في الدالة المميزة نحصل على الدالة المولدة للاحتمالات أي أن :

$$\phi_X\left(\frac{\ln t}{i}\right) = E(e^{\frac{i\ln t}{i}X}) = E(t^X).$$

(د) بوضع $\frac{t}{i}$ بدلاً من t في الدالة المميزة نحصل على الدالة المولدة للعزوم . أي أن :

$$\phi_X\left(\frac{t}{i}\right) = E(e^{tX}) = M_X(t).$$

مثال (٤-١٧) للدالة المولدة للعزوم في مثال (٤-٣) أوجد الدالة المميزة .

الحل :

بوضع it بدلاً من t في الدالة المولدة للعزوم $t < 1$ $\quad M_X(t) = \frac{1}{1-t}$

نحصل على الدالة المميزة أي أن $\phi_X(t) = M(it) = \frac{1}{1-it}$.

مثال (٤-١٨) للدالة المولدة للعزوم في مثال (٤-٧) أوجد الدالة المميزة .

الحل :

بوضع it بدلاً من t في الدالة المولدة للعزوم $M_X(t) = \frac{1}{2-e^t}$ نحصل على الدالة المميزة . أي أن $\phi_X(t) = M(it) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

(٤-٤) الدالة المولدة التراكمية Cumulant Generating Function

الدالة التراكمية هي لوغاريتم الدالة المميزة (واللوغاريتم للأســاس الطبيعــي) ، فــإذا رمزنا للدالة التراكمية بالرمز $\psi_X(t)$ فإن :

$$\psi_X(t) = \ln[\phi_X(t)].$$

العزوم التراكمية من الدرجة r للمتغير العشوائي X ، يرمز لها بــالرمز k_p ، هــي معــامل $\frac{t^r}{r!}$ في مفكوك تيلور للدالة التراكمية . أي أن :

$$\psi_X(t) = \ln\phi_x(t) = \ln[1 + \frac{it}{1!}\mu'_1 + \frac{(it)^2}{2!}\mu'_2 + ... + \frac{(it)^r}{r!}\mu'_r + ...] = \ln[1 + y]$$

حيث :

$$y = \frac{it}{1!}\mu'_1 + \frac{(it)^2}{2!}\mu'_2 + ... + \frac{(it)^r}{r!}\mu'_r + ...$$

بما أن مفكوك الدالة اللوغاريتمية يأخذ الشكل :

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + ...$$

فإن :

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= \left(\frac{it}{1!}\mu'_1 + \frac{(it)^2}{2!}\mu'_2 + ... + \frac{(it)^r}{r!}\mu'_r + ...\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{it}{1!}\mu'_1 + \frac{(it)^2}{2!}\mu'_2 + ... + \frac{(it)^r}{r!}\mu'_r + ...\right)^2 \\ &+ \frac{1}{3}[...]^3 - \frac{1}{4}[...]^4 + ... \\ &= \frac{it}{1!}\mu'_1 + \frac{(it)^2}{2!}\mu_2 + \frac{(it)^3}{3!}\mu_3 + \frac{(it)^4}{4!}(\mu_4 - 3\mu_2^2) + ...\end{aligned}$$

(٤-١)

وبإعادة كتابة $\psi_X(t)$ على الصورة :

$$\psi_X(t) = \frac{it}{1!}k_1 + \frac{(it)^2}{2!}k_2 + \frac{(it)^3}{3!}k_3 + \frac{(it)^4}{4!}k_4 + ... \qquad (٤-٢)$$

وبمساواة معاملات $\frac{(it)^r}{r!}$ في المعادلتين (٤-١) و(٤-٢) فإن :

$$k_1 = \mu_1' \quad , \quad k_2 = \mu_2 \quad , \quad k_3 = \mu_3 \quad , \quad k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 .$$

مثال (٤-١٩) إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا له دالة كثافة الاحتمال :

$$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,...$$

الدالة المميزة سوف تكون :

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^{it}\lambda} = e^{-\lambda(1-e^{it})} .$$

وعلى ذلك الدالة التراكمية هي :

$$\psi_X(t) = \ln \phi_X(t) = -\lambda(1 - \exp(it))$$

$$= \lambda \left[\frac{it}{1!} + \frac{(it)^2}{2!} + ... \right]$$

وعلى ذلك $k_p = \lambda$.

تمـــارين :

-١- إذا كان X متغيرا عشوائيا له الدالة المولدة للعزوم على الشكل :

$$M_X(t) = \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{5t}$$

(أ) ما هو توزيع X .

(ب) أوجد $P(X = 2)$.

-٢- إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \exp[-(x+2)] \qquad -2 < x < \infty$$
$$= 0 \ \text{elsewhere} .$$

(أ) أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X .

(ب) استخدم الدالة $M_X(t)$، في إيجاد $E(X^2)$, $E(X)$.

-٣- أثبت أن $\sigma^2 = E[X[X-1]] - \mu(\mu-1)$ ؟

٤- أحسب الدالة المولدة للعزوم ، المتوسط ، التباين للدوال الاحتمالية التالية :

(أ)

$$f(x) = \bar{e}^{(x-5)} \qquad x \geq 5$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

(ب)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{x^2/2} \qquad x > 0$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

(ج)

$$f(x) = \frac{1}{4} x \ \bar{e}^{x/2} \qquad x > 0$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

(د)

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \qquad x = 1,2,...$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

(ذ)

$$f(x) = \bar{e}^2 \frac{2^x}{x!} \qquad x = 0,1,...$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

٥- أوجد الدالة المميزة للدوال في تمرين (٤) ؟

٦- أوجد الدالة المولدة للعزوم والعزوم الخمسة الأولي حول المتوسط لمتغير عشوائي X يمثل عدد الصور التي تظهر عند إلقاء عمليتين متزنتين ؟

٧- أوجد الدالة المولدة للعزوم والعزوم الخمسة حول الصفر لمتغير عشوائي X يمثل عدد مرات ظهور رقم 6 عند إلقاء زهرتين مرة واحدة ؟

٨- أوجد الدالة المميزة للمتغير العشوائي في تمرين (٧) .

٩- أوجد الدالة المميزة المركزية للدالة الاحتمالية

$$f(x)=\frac{1}{A-B} \qquad A<x<B$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

وأوجد التباين ؟

-١٠- أوجد الدالة المولدة للاحتمالات لدالة الاحتمالات التالية :

$$f(x)=\frac{1}{6} \quad , \quad x=1,2,3,4,5,6$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

-١١- هل يمكن أن تكون الدالة $M_X(t)$ على الشكل :

$$M_X(t)=\frac{t}{1-t}$$

وذلك لمتغير عشوائي X ولماذا ؟

-١٢- إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x)=\frac{1}{n} \quad , \quad x=1,2,\dots,n$$

أوجد الدالة المميزة وأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X .

-١٣- إذا كان X متغيراً عشوائياً لداله كثافة الاحتمال :

$$f(x)=2^{-x} \quad , \quad x=1,2,\dots$$

أوجد الدالة المولدة للاحتمال للمتغير العشوائي X وأوجد عزوم المضروب الخمسة الأولي .

-١٤- إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً له دالة كثافة الاحتمال

$$f(x)=\frac{1}{2a} \quad , \quad -a\le x\le a$$

أوجد : (أ) الدالة المولدة للعزوم للمتغير X .

(ب) الدالة المميزة .

(ج) الدالة التراكمية

(د) العزوم الأربعة حول الصفر .

(هـ) العزوم الأربعة حول المتوسط .

الفصل الخامس

توزيعات متقطعة خاصة

Special Discrete Distributions

في تحليل البيانات يكون من الضروري تحديد شكل التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية تحت الدراسة . لحسن الحظ أن هناك بعض التوزيعات الاحتمالية الأساسية القابلة للتطبيق في كثير من الحالات. في هذا الفصل سوف نتناول بعض هذه التوزيعات المتقطعة وفي الفصل التالي سوف نهتم ببعض هذه التوزيعات المتصلة .

(٥-١) التوزيع المنتظم Uniform Distribution

يعتبر التوزيع المنتظم من أبسط التوزيعات الاحتمالية المنفصلة ، حيث أن جميع قيم المتغير العشوائي X لها الاحتمال نفسه . لهذا التوزيع بعض التطبيقات المحدودة خاصة في المعاينة الإحصائية .

تعريف : إذا كان فراغ المتغير العشوائي X هو $R=\{x_1,x_2,...,x_c\}$ فإن التوزيع المنتظم يأخذ الصيغة التالية :

$$f(x;c)=\frac{1}{c},x=x_1,x_2,...,x_c.$$

سوف نستخدم الصيغة $f(x;c)$ بدلا من $f(x)$ لتوضيح أن التوزيع المنتظم يعتمد علي المعلمة c . سوف نكتب $X\sim DU(c)$ للدلالة علي أن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع المنتظم المتقطع .

مثال (٥-١) يتكون الكتاب الخاص بدائرة المعلومات البريطانية لعام ما من 20 جزء ، فإذا كان المطلوب اختيار جزءا عشوائيا. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل رقم الجزء المختار .

الحل : عند اختيار جزءا عشوائيا من 20 جزء فإن كل عنصر في فراغ المتغير العشوائي $R=\{x_1,x_2,...,x_{20}\}$ يقع باحتمال $\frac{1}{20}$ وعلي ذلك يكون لدينا توزيع منتظم بدالة كثافة الاحتمال :

$$f(x;20)=\frac{1}{20},\ x=1,2,...,20$$

مثال (٥-٢) أوجد التوزيع الاحتمالي لكل العينات الممكن اختيارها من الحجم $n=2$ من القيم $\{1,2,3,4\}$.

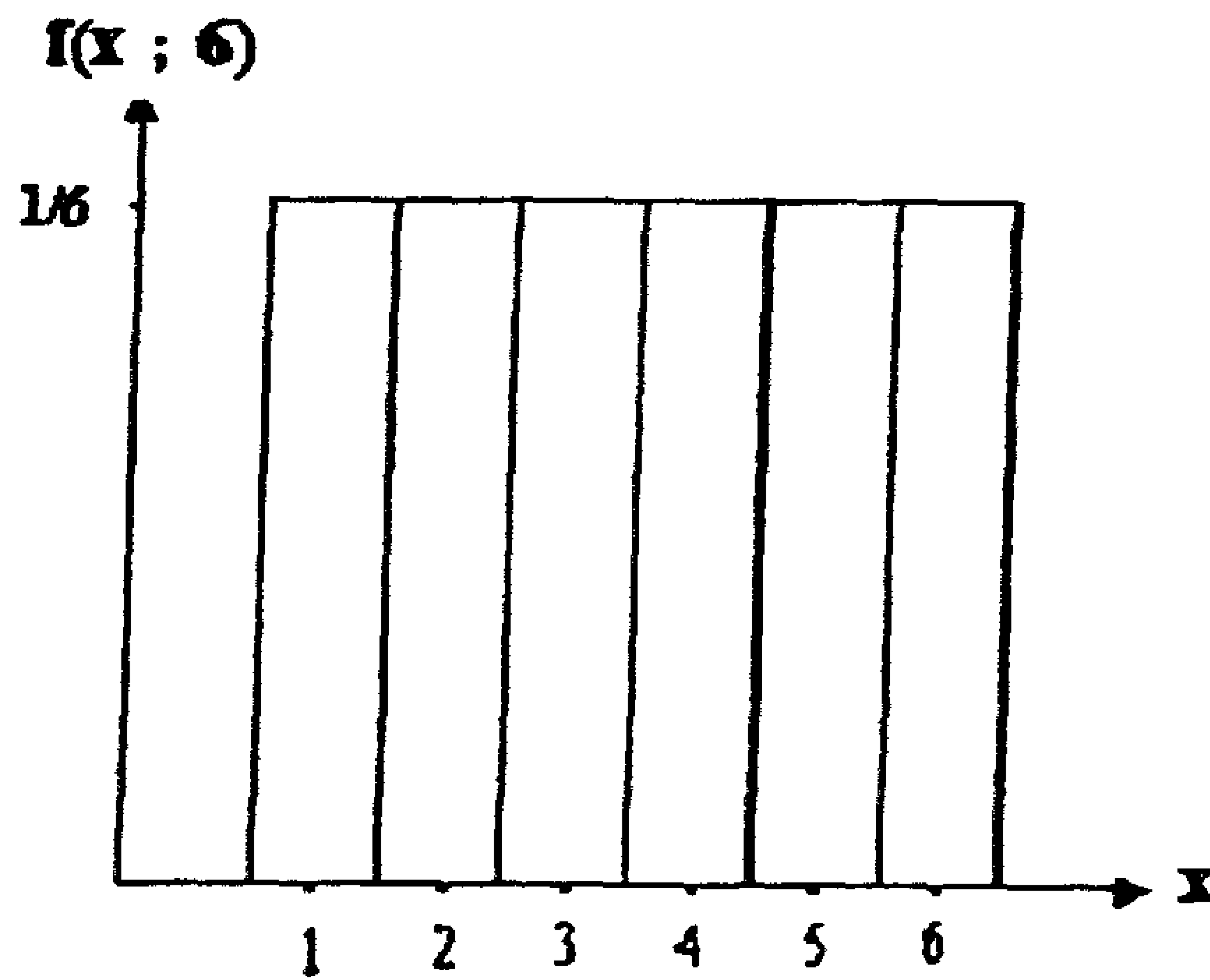
الحل :

عدد العينـــات الممكـــن اختيارهـــا هـــو $\binom{4}{2}=6$ وهـــي علـــي التوالـــي $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},[2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$. كل العينات السابقة لها نفس الفرصة في الظـهور عند اختيار عينة عشوائية من الحجم $n = 2$ من القيم $\{1,2,3,4\}$. توزيـــع العينـــات يتبـــع التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمال :

$$f(x;6)=\frac{1}{6},x=1,2,...,6$$

حيث 1 تعني العينة $\{1,2\}$,2 تعني العينة $\{1,3\}$ ... الخ . وعلي ذلك فإن احتمال اختيـــار العينة 1 هو $P(\{1,2\})=P(X=1)=\frac{1}{6}$. عموما عند اختيار عينة عشوائية من الحجم n من مجتمع محدود حجمه N فإن قيمة c في صيغة التوزيع المنتظم تعطي من $\binom{N}{n}$.

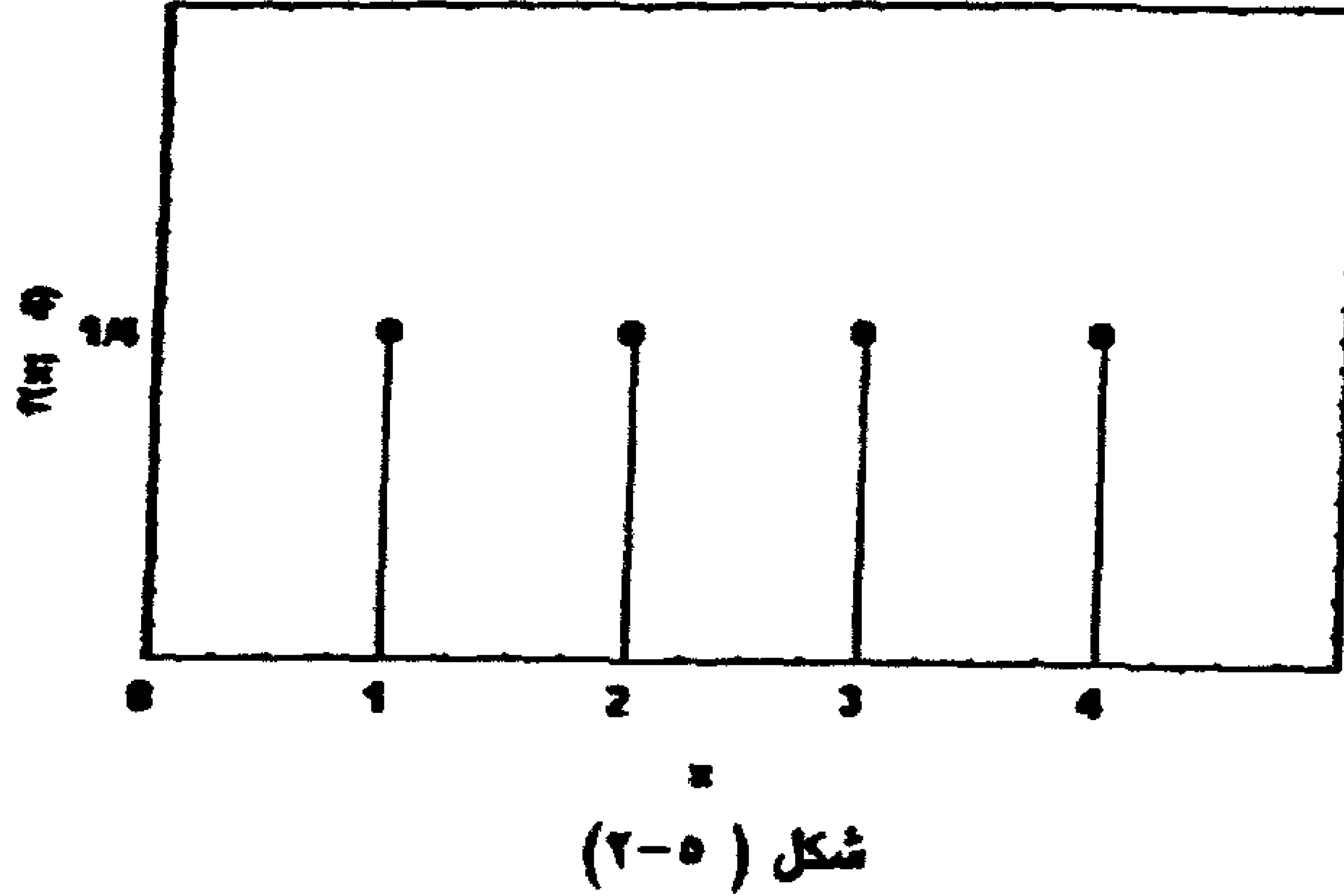
عند التمثيل البياني للتوزيع المنتظم بالمدرج histogram نحصـــل علـــي مســـتطيلات متساوية الارتفاع كما في شكل (٥-١) لمثال (٥-٢) .



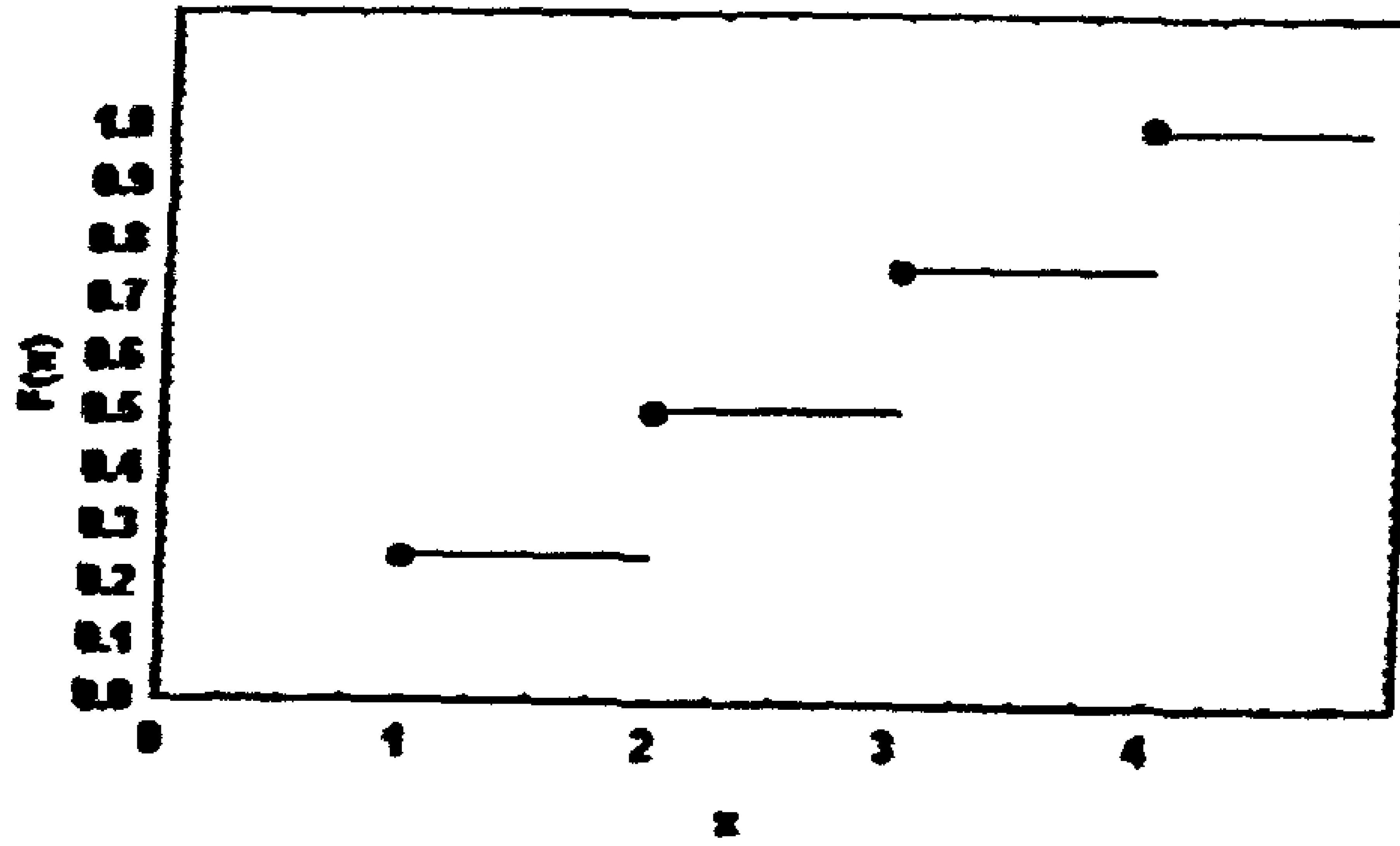
شكل (٥-١)

مثال (٥-٣) يحتوي امتحان علي 20 سؤال من نوع صح وخطأ وكـــل ســـؤال لـــه أربـــع أجوبة محتملة منهم واحد هو الإجابة الصحيحة. لأي سؤال معطي فإن الإجابة العشوائية تمثـــل متغير عشوائي X حيث $X \sim DU(4)$ وقيم المتغير العشوائي هي 1, 2, 3,4 والتـــي تمثـــل أرقام الإجابات المحتملة . أوجد $P(X=1)$ ومثل دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع بيانيا .

الحل : $P(X=1)=\frac{1}{4}$ لأن الإجابة عشوائية أي أن الشخص الذي يجيب يخمن دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع موضحة في شكل (٥-٢) وشكل (٥-٣) على التوالى .



شكل (٥-٢)



شكل (٥-٣)

مثال (٥-٤) إذا ألقيت زهرة نرد متزنة لها أربعة أوجه وإذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل الرقم الذي يظهر علي سطح النرد ، وعلي ذلك $X \sim DU(4)$ بدالة كثافة احتمال علي الشكل:

$$f(x;4)=\frac{1}{4} \qquad x=1,2,3,4$$

$$=0 \quad \text{elsewhere}.$$

أوجد $P(X \geq 2)$.

الحل :
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - P(X = 1)$$
$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

المتوسط والتباين :

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{c} \frac{x}{c} = \frac{1}{c}[1 + 2 + ... + c]$$
$$= \frac{(1/c)c(c+1)}{2} = \frac{c+1}{2}.$$

بنفس الشكل :

$$E(X^2) = (c+1)(2c+1)/6,$$

التباين هو :

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X)^2 - [E(X)]^2$$
$$= [(c+1)(2c+1)/6] - [\frac{c+1}{2}]^2$$
$$= (c^2 - 1)/12.$$

(٥-٢) توزيع ذي الحدين Binomial Distribution

في كثير من الأحيان قد تشتمل تجربة ما علي n من المحاولات المتكررة المستقلة بحيث يكون لكل محاولة نتيجتين اثنتين فقط ، تسمي الأولي نجاح وتسمي الأخرى فشل ، حيث احتمال النجاح p واحتمال الفشل q = 1-q . تسمي التجربة التي تحقق هذه الشروط بتجربة ثنائي الحدين binomial experiment. فعلي سبيل المثال عند إلقاء عملة متزنة 5 مرات حيث كل محاولة قد تكون صورة أو كتابة وذلك تحت فرض أن النجاح هو ظهور الصورة . هنا المحاولات المتكررة مستقلة كما أن احتمال النجاح ثابت من محاولة إلي أخرى ويساوي $p = \frac{1}{2}$. ويجب ملاحظة أنه يمكن تعريف النجاح والفشل عكس ذلك تماماً ، أي جعل ظهور الكتابة نجاح ، وفي هذه الحالة تتبدل قيمتي q , p .

وهناك أمثلة كثيرة علي تجارب ذي الحدين مثل اختيار عينة عشوائية من الحجم n (مع الإرجاع) من مجتمع تحت الدراسة . كل وحده في المجتمع تصنف إلى واحد من نوعين وذلك وفقاً لخاصية ما. علي سبيل المثال ، الوحدة قد تكون شخص والصفة قد تكون ما إذا كان الشخص قال نعم أولا في التصويت علي تأييد شخص ما . إذا كانت الوحدة جزء من آله، هذه الصفة قد تكون ما إذا كان الجزء سليم أو تالف . إذا كانت الوحدة ورقة شجرة فالصفة قد تكون الورقة تالفة من الإصابة بالحشرات أم لا . أيضا في علم الوراثة فإن الصفات الوارثية تحفظ علي الجينات (حاملة الصفات) هذه الجنيات تظهر في أزواج علي الشكل AA أو aa أو Aa (ويجب ملاحظة أن Aa و aA لا يختلفان). فعلي سبيل المثال A قد تكون صفة الشعر الناعم و a صفة الشعر المجعد . إذا كان الأباء الإناث من الفئران يحملون aa (صفة الشعر المجعد) والذكور الآباء يحملون aA (صفة الشعر الناعم) وعلي ذلك طبقاً لقانون مندل فإن كل فأر في الذرية سوف يحمل aA (الشعر الناعم) باحتمال .5 أو aa (الشعر المجعد) باحتمال .5 وعلي ذلك وتحت فرض أن صفة الشعر في أي فأر مستقلة عن صفة الشعر في فأر آخر في هذه الحالة فإن الوحدة في العينة سوف تكون الفأر والصفة تكون aA أو aa .

عموماً يمكن القول أن تجربة ذي الحدين هي التجربة التي تحقق الشروط الآتية :

أ- التجربة التي تتكون من n من المحاولات المتكررة .

ب- نتيجة كل محاولة يمكن تصنيفها إلي نجاح أو فشل .

ج- احتمال النجاح ، وهو p يبقي ثابت من محاولة إلي محاولة .

ح- المحاولات المتكررة مستقلة بعضها عن بعض .

قد تشتمل تجربة علي متتابعة (عددها n) من المحاولات المستقلة حيث يوجد أكثر من نتيجتين في أي محاولة . في هذه الحالة يمكن اعتبارها تجربة ذي الحدين بعد تقسيم النتائج الممكنة إلي مجموعتين . علي سبيل المثال إذا ألقينا زهرة نرد متزنة 10 مرات وإذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع ذي الحدين ويمثل ظهور الرقم واحد (نجاح) باحتمال $p=\frac{1}{6}$ فإن قيم المتغير العشوائي X سوف يكون $1, 2, \ldots, 10$. الفشل هنا هو عدم ظهور 1 أي ظهور $2, 3, \ldots, 6$ والفشل يحدث هنا باحتمال $q=\frac{5}{6}$.

تعريف : عدد حالات النجاح X في n من المحاولات لتجربة ذي الحدين يسمي متغير عشوائي يتبع ذي الحدين ***binomial random variable*** .

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X يتبع ذي الحدين يسمي توزيع ذي الحدين binomial distribution وسوف نرمز له بالرمز $b(x; n, p)$ وذلك لأن قيمة تعتمد علي عدد المحاولات واحتمال النجاح في محاولة معطاة . سنحاول الوصول إلي الصورة العامة لتوزيع ذي الحدين بالتدريج . بفرض أن $n = 3$ فسوف يكون لدينا 8 نتائج ممكنة لتجربة ذي الحدين :

D′D′D′, D′D′D, DD′D′, D′DD, D′DD′, DD′D, DDD′, DDD

حيث D ترمز للفشل و D′ ترمز للنجاح. من تعريف المتغير العشوائي X الذي يتبع ذي الحدين فإن $X(D`D`D) = 2$ و $X(D`DD) = 1$ وهكذا . القيم الممكنة للمتغير العشوائي X في n من المحاولات هي $x = 0, 1, 2, \dots, n$. بفرض أن $n = 4$ في تجربة ذي الحدين،النتائج الممكنة للتجربة معطاة في الجدول التالي مع قيم x والاحتمالات المختلفة لـ x.

النتيجة	x	الاحتمال	النتيجة	x	الاحتمال
D′D′D′D′	4	p^4	DD′D′D′	3	p^3q
D′D′D′D	3	p^3q	DD′D′D	2	p^2q^2
D′D′DD′	3	p^3q	DD′DD′	2	p^2q^2
D′D′DD	2	p^2q^2	DD′DD	1	pq^3
D′DD′D′	3	p^3q	DDD′D′	2	p^2q^2
D′DD′D	2	p^2q^2	DDD′D	1	pq^3
D′DDD′	2	p^2q^2	DDDD′	1	pq^3
D′DDD	1	pq^3	DDDD	0	q^4

في هذه الحالة الخاصة فإننا نرغب في حساب $b(x; 4,p)$ حيث $x = 0,1, 2, 3, 4$.

عندما $b(3; 4,p)$ فهذا يعني وجود أربع نتائج للتجربة تعطي $x = 3$ وعلي ذلك :

$$b(3; 4,p) = P(D\,D`D`D`) + P(D`D\,D`D`) + P(D`D`D\,D`) + P(D`D`D`D) = 4p^3q$$

لأن كل نتيجة تعطي $x = 3$ ولها الاحتمال p^3q وعلي ذلك فإن :

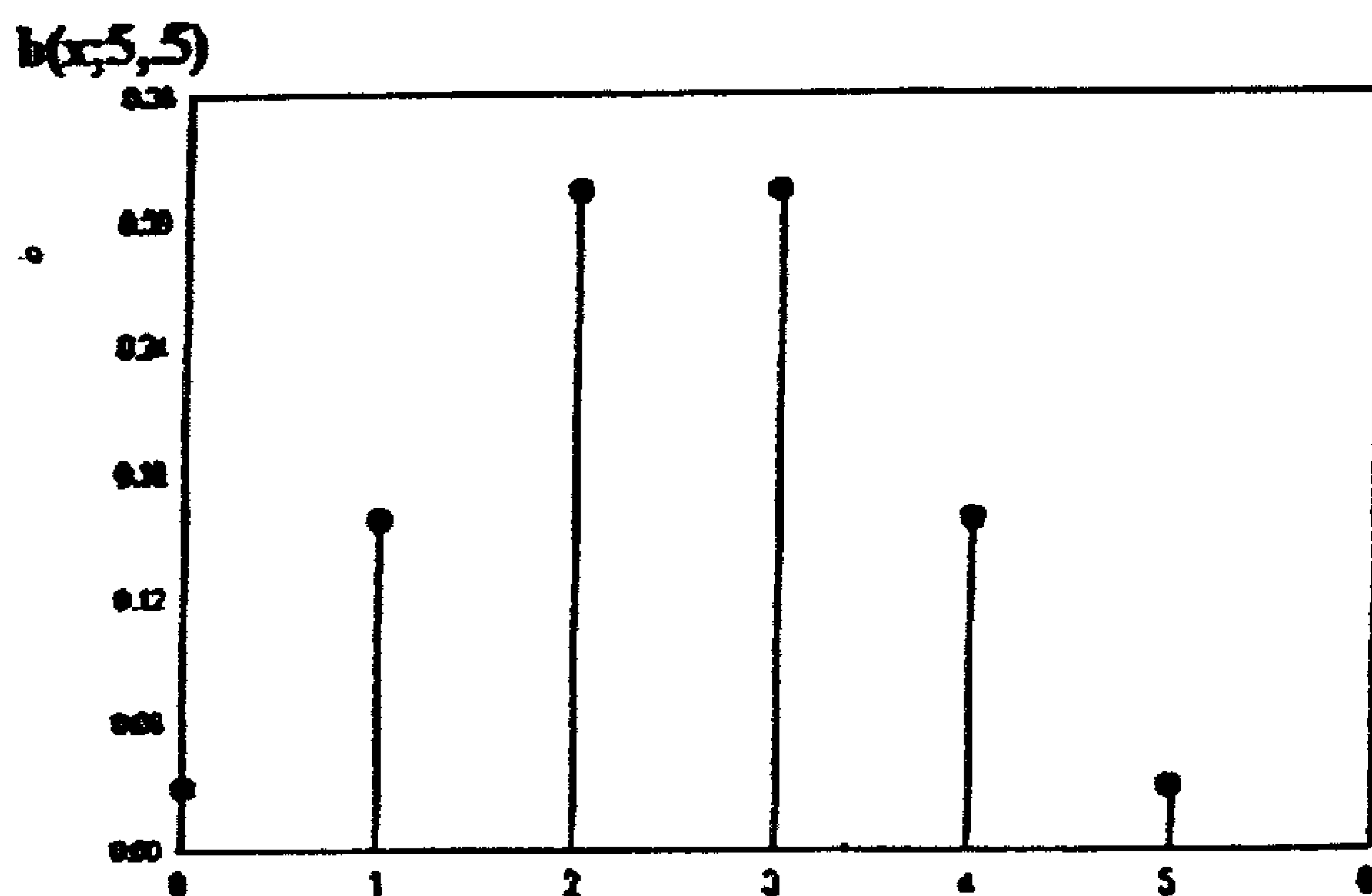
$b(3; 4, p) =$ (عدد النتائج التي تعطي $x = 3$). (احتمال كل نتيجة تعطي $x = 3$)

$= 4p^3q$.

وبنفس الشكل :
$$b(2; 4, p) = 6p^2 q^2$$
عموما :
$$b(x; n, p) = (a)\ (a`)$$
حيث a عدد الترتيبات التي طولها n وتحتوي علي رموز من نوع D' عددها x و a` تمثل احتمال أي ترتيبه طولها n وتحتوى على رموز من نوع $D'$ عددها x. وبما أن الترتيب للرمزين $D'$ و D في كل ترتيبة غير مهم فإن $a` = p^x q^{n-x}$. ولأن a هي عدد الطرق لترتيب n من الأشياء حيث x من نوع و (n-x) من نوع آخر والتي تحدث بطرق عددها $\binom{n}{x}$ فإن الصيغة العامة لتوزيع ذي الحدين سوف تكون علي الشكل :

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

بيان $b(x, n, p)$ موضح في شكل (٥-٤) عندما $n = 5$, $p = .5$.



شكل (٥-٤)

الحقيقة فإن التوزيع الاحتمالي لذي الحدين أشتق من أن (n + 1) من الحدود في مفكوك ذي الحدين $(p + q)^n$ تقابل قيم $b(x; n, p)$ حيث $x = 0,1,2,\ldots,n$ أي أن :
$$(p+q)^n = \binom{n}{0}q^n + \binom{n}{1}pq^{n-1} + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}p^n$$
$$= b(0, n, p) + b(1; n, p) + \ldots + b(n; n, p).$$

وحيث أن $p + q = 1$ فإننا نجد أن $\sum_{x=0}^{n} b(x;n,p) = 1$ وهو الشرط الذي لا بد من تحققه لأي توزيع احتمالي .

دالة التوزيع لمتغير عشوائي X يتبع ذي الحدين يمكن كتابتها على الشكل :

$$B(x;n,p) = \sum_{k=0}^{x} b(k,n,p) \qquad x = 0,1,\ldots,n \; .$$

بعض قيم $B(x;n,p)$ معطاة في الجدول في ملحق (١) لقيم مختلفة من $n,\ p$. المتطابقة التالية من السهل إثباتها :

$$B(x;n,p) = 1 - B(n - x - 1; n, 1 - p) \, .$$

قيم دالة كثافة الاحتمال يمكن الحصول عليها بسهولة من الجدول في ملحق (١) باستخدام الصيغة التالية :

$$b(x;n,p) = B(x;n,p) - B(x - 1; n, p) \, .$$

سوف نكتب $X \sim BIN(n,p)$ لتوضيح أن X متغيراً عشوائياً يتبع ذي الحدين ويعتمد على n من المحاولات باحتمال نجاح p .

مثال (٥-٥) إذا ألقيت زهرة نرد متزنة 6 مرات . أوجد احتمال ظهور الرقم 5 أربع مرات بالضبط .

الحل : هنا يعتبر ظهور الرقم 5 نجاح وعلى ذلك احتمال النجاح في كل محاولة من المحاولات الستة المستقلة هو $\frac{1}{6}$. وعلى ذلك احتمال (الفشل) عدم ظهور الرقم خمسة هو $\frac{5}{6}$.

بفرض أن X تمثل عدد مرات ظهور الرقم 5 ولها دالة كثافة احتمال :

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

وعلى ذلك الاحتمال المطلوب هو:

$$b(4;6,\frac{1}{6}) = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{2}$$

$$= \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{5^2}{6^6} = 0.00803755.$$

مثال (٥-٦) صندوق به 10 ثمرات منها 3 تالفة ، اختيرت منه ثمرتين . أحسب احتمال أن تكون واحدة تالفة (السحب بإرجاع).

الحل : بفرض أن X تمثل عدد الثمار التالفة ولها دالة كثافة احتمال :

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

وعلي ذلك الاحتمال المطلوب هو :

$$b(1;2,0.3) = \binom{2}{1}(0.3)^1(0.7)^1$$

$$= \frac{2!}{1!1!}(0.3)^1(0.7)^1 = 0.42.$$

مثال (٥-٧) لوحظ لفترة طويلة أن صياد يصيب الهدف باحتمال 0.9 ، فإذا أطلق الصياد 5 طلقات علي هدف ، أوجد باستخدام الجدول في ملحق (١) احتمال :

(ب) إصابة الهدف 3 مرات ؟

(ب)إصابة الهدف علي الأكثر ثلاث مرات ؟

(ج)إصابة الهدف علي الأكثر مرة واحدة ؟

الحل : (أ) $X \sim BIN(5, .9)$ وعلي ذلك :

$$P(X = 3) = b(3;5,.9) = \binom{5}{3}(.9)^3(0.1)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{3} b(k;5,.9) - \sum_{k=0}^{2} b(k;5,.9)$$

$$= .081 - .009 = .072.$$

(ب) $$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} b(k;5,.9) = 0.081.$$

(ج) $$P(X \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} b(k;5,.9) = 0.0$$

مثال (٥-٨) إذا ألقيت زهرة نرد متزنة سبع مرات والمطلوب حساب :

(أ) احتمال ظهور الرقم 5 أو 6 بالضبط ثلاثة مرات ؟

(ب) احتمال عدم ظهور الرقم 5 أو 6 ؟

(ج) علي الأقل ظهور 5 أو 6 مرة واحدة ؟

الحل : احتمال النجاح لهذه التجربة في كل محاولة هو $p=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$ واحتمال الفشل هـو $q=1-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}$ وعلي ذلـك X متغـيراً عشـوائياً يتبـع توزيـع ذي الحديـن بمعلمتيـن $p=\frac{1}{3},n=7$ أي أن $X\sim BIN(7,\frac{1}{3})$ وعلي ذلك :

(أ) $$P(X=3)=b(3;7,\frac{1}{3})=\binom{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{560}{2187}$$

(ب) $$P(X=0)=b(0;7,\frac{1}{3})=\binom{7}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^7=\left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{128}{2187}$$

(ج) $$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{128}{2187}=\frac{2059}{2187}$$

مثال (٥-٩) أسرة لها 6 أطفال والمطلوب حساب احتمال أن 3 ذكور و 3 إنـــاث . كـل طفل يعتبر محاولة ، وبفرض أن الحادثة " أنثي " هي النجـــاح فـإن $p=\frac{1}{2}$. وبفـرض أن المحاولات الستة مستقلة . التجربة هنا تمثل تجربة ذي الحدين حيـث $n=6$, $p=q=\frac{1}{2}$

وعلي ذلك احتمال أن الأسرة بها 3 ذكور و 3 إناث هو :

$$P(X=3)=b(3;6,\frac{1}{2})=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}.$$

أيضا احتمال أن عدد الإناث أقل من عدد الذكور هو:

$$b(0;6,\frac{1}{2})+b(1;6,\frac{1}{2})+b(2,6,\frac{1}{2})$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{22}{64}.$$

مثال (٥-١٠) كم عدد مرات إلقاء زهرة نرد بحيث أن $P(B)>\frac{1}{2}$ حيـــث B الحادثــة " ظهور الرقم 6 علي الأقل مرة " .

الحل : X متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات ظهور الرقم 6 عند إلقاء زهرة الـنرد حيـث $X \sim BIN(n, \frac{1}{6})$ وعلى ذلك :

$$P(\dot{B}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{n-0}$$
$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

المطلوب :

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2}$$

وحيث أن $\frac{1}{2} > 125/216 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 , \frac{1}{2} > 625/1296 = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ وعلي ذلك n لابد أن تساوي 4 .

مثال (٥-١١) احتمال أن يشفي مريض من مرض نادر في الدم هـو 0.2 . فـإذا كـان معروف أن 15 شخص عندهم هذا المرضى ما هو احتمال أن :

(أ) يشفي 9 علي الأقل من المرضي .
(ب) يشفي من 4 إلي 8 من هذا المرضى .
(ج) يشفي علي الأكثر أثنين من هذا المرضي .

الحل : (أ) $X \sim BIN(15, .2)$ وعلي ذلك :

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X < 9)$$
$$= 1 - P(X \leq 8)$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{8} b(k; 15, .2).$$

ومن جداول ذي الحدين في ملحق (١) فإن :

$$P(X \geq 9) = 1 - .999 = .001.$$

(ب)

$$P(4 \le X \le 8) = \sum_{k=0}^{8} b(k;15,.2) - \sum_{k=0}^{3} b(k;15,.2)$$
$$= .999 - .648 = .351.$$

(ج)

$$P(X \le 2) = \sum_{k=0}^{2} b(k;15,.2) = .398.$$

مثال (٥-١٢) يعلم مسئول في مصنع أن 5% من الوحدات المنتجة في المصنع تالفة . يقوم بشحن إنتاجه ، في عبوات سعة العبوة 100 وحدة ، إلي المستورد وذلك بضمان أن يسترد العبوات التي يكون بها أكثر من m من الوحدات التالفة وبتكاليف المصاريف . يرغب المسئول في معرفة قيمة m بحيث أن $P(X > m) < .05$.

الحل : X هنا متغيراً عشوائياً يمثل عدد الوحدات التالفة في 100 وحدة أي أن $X \sim BIN(100,.05)$. وعلي ذلك نحسب :

B(0; 100, .05)	= .0059
B(1; 100, .05)	=.0312
B(2; 100, .05)	= .0812
B(3; 100, .05)	= .1396
B(4; 100, .05)	= .1781
B(5; 100, .05)	= .1800
B(6; 100, .05)	= .1500
B(7; 100, .05)	= .1060
B(8; 100, .05)	= .0649
B(9; 100, .05)	= .0349
$\sum_{k=0}^{9} b(k;100,.05)$	0.9718

بما أنه يرغب في حساب قيمة m بحيث أن $P(X > m) < .05$. وعلي ذلك $P(X \le 9) = .9718$ ومنها فإن $P(X > 9) = .0282$.أي أن m=10 وعلي ذلك فإن مسئول المصنع سوف يعطي تكاليف استرداد العبوات التي بها وحدات تالفة $m \ge 10$ لأي عينة من 100وحدة تحتوى على 10 وحدات تالفة أو اكثر .

مثال (٥-١٣) إذا كان 5% من إنتاج مصنع لقطع معدنية تالف . سحبت عينة من 20 وحدة فإن :

(أ) $P(X \le 3) = .984$.

(ب)

$$P(X = 3) = P(X \le 3) - P(X \le 2) = .984 - .925 = .059.$$

(ج) $P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - .925 = .075$

مثال (٥-١٤) إذا كان معروف أن 5% من الوحدات المنتجة تالفة . يقوم المسئول في الشركة باختيار عينة عشوائية من الحجم $n = 10$ دورياً ويختبر عدد الوحدات التالفة فيها ويرغب في إيجاد قيمة m بحيث أن $P(X > m) < 0.05$.

الحل :

$$b(0; 10, .05) = .5897$$
$$b(1; 10, .05) = .3151$$
$$b(2; 10, .05) = .0746$$

وعلي ذلك :

$$\sum_{k=0}^{2} b(k;10,.05) = 0.9794.$$

وبالتالي فإن $P(X \ge 3) = .0206$. أي أن m=3 . وعلى ذلك طالما أن المسئول اختار عينة عشوائية من الحجم $n = 10$ ووجد أن عدد الوحدات التالفة أقل من أو يساوي 2 فإن الآلة تكون سليمة أما إذا زادت عن ذلك فإن الآلة تكون بها خلل ويجب إصلاحه .

مثال (٥-١٥) يلعب الفريق A مع الفريق B في سلسلة من المباريات حيث احتمال أن يكسب A في أي مباراة يلعبها $p = .6$. بفرض أن الحادثة E هي " عدد المباريات التي يكسبها الفريق A أكثر من عدد المباريات التي يخسرها . المطلوب إيجاد عدد المحاولات n بحيث أن $P(E > 0.9)$.

الحل : المطلوب حساب الاحتمال :

$$P(E) \sum_{k=[n/2]+1}^{n} b(k; n, p) > .9$$

حيث [x] ترمز إلى أكبر رقم صحيح أقل من أو يساوى x. علي سبيل المثال إذا كانت n=7 فإن E={ 4, 5, 6, 7 } . في هذه الحالة $[n/2]=[\frac{7}{2}]=3$ وعلي ذلك المجموع في P(E) سوف يكون من 4 إلي 7 . عندما n = 16 فإن E = {9, 10, 11, ..., 16 } وعلـــى ذلــك المجموع سوف يكون من 9 إلي 16 . هذه الاحتمالات ، لقيم مختلفة مـــن n وعندما p = 6. معطاة في الجدول التالي :

n	الاحتمال	n	الاحتمال
3	.648	24	.787
4	.475	25	.846
5	.683	26	.801
6	.544	27	.855
7	.710	28	.813
8	.594	29	.864
9	.733	30	.825
10	.633	31	.872
11	.753	32	.835
12	.665	33	.879
13	.771	34	.845
14	.692	35	.886
15	.787	36	.854
16	.716	37	.892
17	.801	38	.862
18	.737	39	.898
19	.814	40	.870
20	.755	41	.903
21	.826		
22	.772		
23	.836		

يتضح من الجدول السابق أنه يحتاج إلي 41 مباراة حتى يحقق المطلوب .

في كل محاولة من تجربة ذي الحدين يمكن تعريف المتغير العشوائي Y حيث Y يـــأخذ القيمة 1 أو 0 بدالة كثافة احتمال :

$$f(y;p)=\binom{1}{y}p^{y}\quad q^{1-y}\qquad y=0,1$$

$$=0 \text{ elsewhere.}$$

يسمى المتغير العشوائي Y في هذه الحالة متغير عشوائي يتبع بيرنولي Bernoulli . يمكــن وضع قيم دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي Y يتبع برنولي في الجدول التالي :

y	0	1
f(y;p)	q	p

The Recurrence Relation العلاقة المتكــررة

الاحتمالات لتوزيع ذي الحدين يمكن حسابها بسهولة باستخدام العلاقة المتكررة الآتية :

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{\binom{n}{x+1}p^{x+1}\ q^{n-x-1}}{\binom{n}{x}p^{x}\ q^{n-x}}=\frac{n-x}{x+1}\ \frac{p}{q}\ .$$

أي أن :

$$f(x+1)=\frac{n-x}{x+1}\ \frac{p}{q}f(x).$$

وعلي ذلك نبدأ بالاحتمال $f(0)=q^{n}$ ثم نحسب f(1) من الصيغة السابقة بوضع x=0 حيث :

$$f(1)=n\cdot\frac{p}{q}\cdot\ f(0).$$

ثم نحسب f(2) كالتالي :

$$f(2)=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{p}{q}\cdot f(1).$$

وهكذا .

المتوسط والتباين :

المتوسط لتوزيع ذي الحدين هو:

$$\mu=\sum_{x=0}^{n}x\ f(x).$$

الحد الأول في المجموع السابق يساوي صفر وعلي ذلك فإن :

$$\mu = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x} .$$

بكتابة $n! = n(n-1)!$ فإن:

$$\mu = np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x} .$$

بوضع $x-1=j$ فـإن:

$$\mu = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j} .$$

وباستخدام نظرية ذي الحدين فإن:

$$\mu = np(p+q)^{n-1} = np.$$

لحساب التباين سوف نوجد العزم الثاني من الدرجة الثانية للمضروب حيث :

$$\mu_{[2]} = \sum_{x=0}^{n} x(x-1).f(x)$$

وبما أن الحدين الأوليين المقابلين إلى $x=0$ و $x=1$ يساويان صفر فإن :

$$\mu_{[2]} = \sum_{x=2}^{n} x(x-1). \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x q^{n-x} .$$

بوضع $n! = n(n-1)(n-2)!$ فـإن :

$$\mu_{[2]} = n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2} q^{n-x}.$$

بوضع $x-2=j$ ، فإن :

$$\mu_{[2]} = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j q^{n-2-j}$$
$$= n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2}$$
$$= n(n-1)p^2$$

التباين هو :

$$\sigma^2 = \mu_{[2]} + \mu - \mu^2$$
$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$
$$= -np^2 + np$$
$$= np(1-p)$$
$$= npq.$$

The Characteristic Function الدالة المميـزة

يمكن الحصول علي الدالة المميزة لمتغير عشوائي يتبع ذي الحدين كالآتي :

$$\phi_X(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx} \binom{n}{x} p^x \; q^{n-x}$$
$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^{it} p)^x \; q^{n-x} = [p \; e^{it} + q]^n.$$

The Mements Recurrence relation العلاقــة المتكــررة للعزوم

العزوم حول المتوسط ، من الدرجة r ، لتوزيع ذي الحدين تحقق العلاقـــة المتكــررة التالية :

$$\mu_{r+2} = p.q \left\{ \frac{d\mu_{r+1}}{dp} + n(r+1)\mu_r \right\} \qquad r = 0,1,2,\ldots \; .$$

البرهان :

$$\mu_{r+1} = E(X-\mu)^{r+1} = \sum_{x=0}^{n} (x-np)^{r+1} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

و بتفاضل العلاقة السابقة بالنسبة لــ p نحصل علي :

$$\frac{d\mu_{r+1}}{dp} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \Big\{ (r+1)(x-np)^r(-n)p^x(1-p)^{n-x}$$

$$+ (x-np)^{r+1} x \ p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

$$+ (x-np)^{r+1} p^x (n-x)(1-p)^{n-x-1}(-1) \Big\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{x} (x-np)^r p^{x-1}(1-p)^{n-x-1} \{ (r+1)(-n)(1-p)$$

$$+ (x-np)\, x(1-p) - (x-np)\, p(n-x) \}$$

وبالضرب في p q نحصل على :

$$p.q.\frac{d\mu_{r+1}}{dp} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \ (x-np)^r p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\{-n(r+1)pq + (x-np)^2$$

$$= -n(r+1)pq \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (x-np)^r p^x (1-p)^{n-x}$$

$$+ \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (x-np)^{r+2} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= -n(r+1)pq \ \mu_r + \mu_{r+2}$$

وعلى ذلك :

$$\mu_{r+2} = pq \left\{ \frac{d\mu_{r+1}}{dp} + n(r+1)\mu_r \right\}.$$

مثال (٥-١٦) بما أن $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$ وبالتعويض عن $r = 0$ في العلاقة السابقة فإن:

$$\sigma^2 = \mu_2 = pq \left\{ \frac{d\mu_1}{dp} + n\mu_0 \right\}$$

$$= pq\{0+n\}$$

$$= npq.$$

الالتواء والتفلطح Skewness and Kurtosis

معامل الالتواء لتوزيع ذي الحدين يحسب من العلاقة التالية :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}.$$

يمكن حساب μ_3 من العلاقة المتكررة للعزوم حيث :

$$\mu_3 = p.q\left\{\frac{d\mu_2}{dp} + n.2\mu_1\right\}$$
$$= np.q(1-2p),$$
$$\mu_2 = p.q\left\{\frac{d\mu_1}{dp} + 0\right\}$$
$$= n \cdot p \cdot q.$$

وعلي ذلك معامل الالتواء لتوزيع ذي الحدين هو :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{npq(1-2p)}{(npq)^{3/2}} = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}.$$

عندما $n \to \infty$ فإن α_3 يؤول إلي الصفر .

معامل التفلطح لتوزيع ذي الحدين يحسب من العلاقة التالية :

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

يتم حساب μ_4 من العلاقة المتكررة للعزوم حيث :

$$\mu_4 = p.q\left\{\frac{d\mu_3}{dp} + n.3\mu_2\right\}$$
$$= 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$$

وعلي ذلك فإن معامل التفلطح لتوزيع ذي الحدين هو :

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$$

عندما $n \to \infty$ فإن α_4 يؤول إلي 3.

الدالة المولدة التراكمية :

الدالة التراكمية لمتغير عشوائي X يتبع ذي الحدين هي :

$$\Psi'_X(t) = \ln \phi_X(t)$$
$$= \ln(p\ e^{it} + q)^n$$

$$= n \ \ln(p\ e^{it} + q) = n \ln\left[1 + p(e^{it} - 1)\right]$$

$$= n \ \ln\left[1 + p\left(\frac{it}{1!} + \frac{(it)^2}{2!} + \dots\right)\right]$$

$$= n\left[p\left(\frac{it}{1!} + \frac{(it)^2}{2!} + \dots\right) - \frac{p^2}{2}(\dots)^2\right.$$

$$\left. + \frac{p^3}{3}(\dots)^3 - \frac{p^4}{4}(\dots)^4 + \dots\right]$$

وبتجميع معاملات $\frac{(it)^r}{r!}$ فإن الدالة التراكمية تكون علي الصورة :

$$G_X(t) = np\frac{it}{1!} + npq\frac{(it)^2}{2!} + npq(1-2p)\frac{(it)^3}{3!}$$

$$+ npq(1-6pq)\frac{(it)^4}{4!} + \dots$$

ومنها نحصل إلي النتائج السابقة نفسها عن العزوم حيث :

$$k_1 = \mu_1' = np$$

$$k_2 = \mu_2 = npq$$

$$k_3 = \mu_3 = npq(1-2p)$$

$$k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 = npq(1-6pq).$$

أي أن :

$$\mu_4 = npq(1-6pq) + 3n^2p^2q^2,$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}},$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{1-6pq}{npq}.$$

مثال (٥-١٧) القيمة المتوقعة لعدد الصور التي تظهر عند إلقاء عمله متزنة 100000 مرة هو $np = 100000\frac{1}{2} = 50,000$. أيضاً القيمة المتوقعة لظهور الرقم 6 عند إلقاء الزهرة 10000 مرة هو $np = 10000.\frac{1}{6} \approx 1667$.

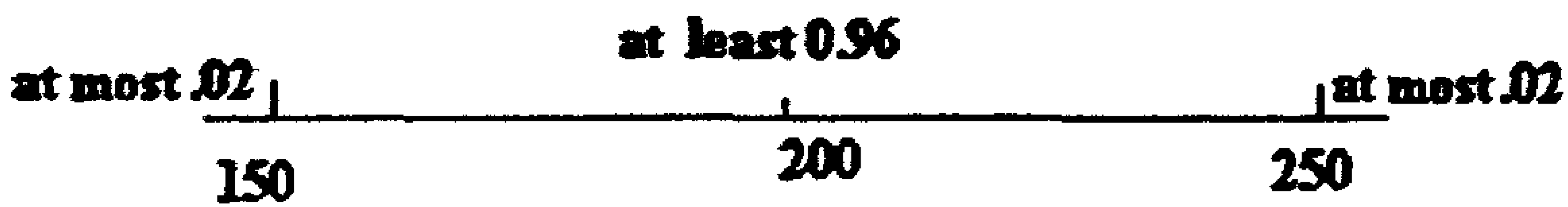
مثال (٥-١٨) بفرض أننا ألقينا عملة 400 مرة وتم تسجيل 148 صورة و 252 كتابه هل تعتقد أن العملة متزنة .

الحل : باستخدام توزيع ذي الحدين حيث X تمثل عدد الصور التي تظهر في n من المحاولات . أي أن $X \sim BIN(400,.5)$ وذلك تحت فرض أن العملة متزنة . وعلي ذلك $np = 400.\frac{1}{2} = 200$ والانحراف المعياري $\sqrt{npq} = \sqrt{400.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$

وباستخدام متباينة تشيبشيف فإن :

$$\begin{aligned} &P(150 \le X \le 250) \\ &= P|X - 200| \le 50 \\ &= P|X - 200| \le 5\sigma \\ &\ge 1 - \frac{1}{5^2} = .96. \end{aligned}$$

وعلي ذلك احتمال الحصول علي صور أقل من 150 في 400 محاولة هو 02. كما هو موضح في شكل (٥-٥) وهذا الاحتمال صغير وعلي ذلك فإننا نعتقد أن العملة غير متزنة .



شكل (٥-٥)

مثال (٥-١٩) قام إحصائي باختيار 1000 صوت مؤيد لمرشح ما (عشوائياً) ووجد أن 420 منهم يؤيدون هذا المرشح هل هناك أمل في أن ينجح في الانتخابات . السؤال الآن هل 50% من الأصوات تؤيد هذا المرشح .

الحل : بفرض أن X متغيراً عشوائياً يمثل عدد المؤيدين لهذا المرشح حيث :

$X \sim BIN(1000, .5)$,

وعلي ذلك متوسط X هو $np = (1000)(\frac{1}{2}) = 500$ والانحراف المعياري هو $\sqrt{npq} = \sqrt{(1000)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = \sqrt{250} = 15.81$ وباستخدام متباينة تشيبيشيف فإن :

$$P(421 \le X \le 579) = P(|X - 500| \le 50)$$

$$= P(|X - 500| \le 5\sigma)$$

$$\ge 1 - \frac{1}{5^2} = .96$$

حيث 420 شخص تؤيد المرشح يقع على بعد أكثر (بقليل) من خمسة انحرافات معياريه عن المتوسط أي أن احتمال X أقل من 420 اقل من 02. وعلى ذلك يعتقد (بناء على هذه القيمة) أن الاحتمال صغير في أن ينجح المرشح في الانتخابات .

مثال (٥-٢٠) إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ذي الحدين حيث $X \sim BIN(3, \frac{1}{6})$ وإذا كان $Y=u(X)$ حيث $u(X)$ يعطى كالتالي :

x	0	1	2	3
u(x)	-1	1	2	3

أوجد $E(Y)$

الحل :

$$E(Y) = E[u(X)]$$

$$= \sum_{x=0}^{3} u(x)\binom{3}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}$$

$$= (-1)\left(\frac{125}{216}\right) + 1\left(\frac{75}{216}\right) + 2\left(\frac{15}{216}\right) + 3\left(\frac{1}{216}\right)$$

$$= -\frac{17}{216} = -.08.$$

مثال (٥-٢١) إذا كان $X \sim Bin\ (n, p)$ أوجد التوقع والتباين للمتغير العشوائي $Y = \frac{X}{n}$ والذي يمثل نسبة صفة ما في مجتمع.

الحل :

$$E(Y) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X)$$

$$= \frac{np}{n} = p,$$

$$Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n}.$$

(٥-٣) التوزيع الهندسي الزائدي Hypergometric Distribution

بفرض أن مجتمع يتكون من عدد محدود من الوحدات ، وليكــن N ، وأن هنــاك k ، من الوحدات من النوع A (نجاح) والوحدات الباقية من نوع B (فشل) ، وبفرض أن عينــة عشوائية من الحجم n اختيرت من هذا المجتمع وبدون إرجاع. بفــرض أن X تمثـل عـدد الوحدات من نوع A التي تظهر في العينة . اهتمامنا سوف يكون في بإيجاد (P(X = x . التجربة السابقة تسمي تجربة الهندسي الزائدي hypergeometric experiment . تحقــق تجربة الهندسي الزائدي الشروط التالية :

أ- عينة عشوائية من الحجم n تختار من مجتمع يحتوي علي N من الوحدات .

ب- في المجتمع الذي حجمه N فإن k من الوحدات تصنف نجاح و N – k تصنف فشل.

تعريف : عدد حالات النجاح في تجربة الهندسي الزائدى يسمى متغير عشوائي يتبع الهندســي الزائدى .

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي الزائدى يسمى التوزيع الهندســي الزائدى ويمثل بالرمز h(x; N, n,k) وذلك لأن عدد حــالات النجــاح x تعتمــد علــي k الموجودة في الفئة N ، حيث يختار من N وحدات عددها n . في المثــال (٥-٦) اســتخدمنا توزيع ذي الحدين إذا كان السحب بإرجاع (المحاولات مســتقلة). الآن بفـرض أن الســحب بدون إرجاع (المحاولات غير مستقلة) . في هذه الحالة سوف يكــون هنــاك $\binom{3}{1}$ طريقــة لاختيار ثمرة تالفة ولكل واحدة من هذه الطرق يوجد $\binom{7}{1}$ طريقة لاختيــار ثــمرة ســليمة. وعلي ذلك عند اختيار ثمرتين من الصندوق بدون إرجاع فإن عدد الطرق الكليــة للحصــول علي ثمرة تالفة وثمرة سليمة هو $\binom{3}{1}\binom{7}{1}$. العدد الكلي من الطرق لاختيار ثمرتيــن مــن

الصندوق المحتوي على 10 ثمرات هو $\binom{10}{2}$. وعلى ذلك احتمال الحصول على ثمرة تالفة وثمرة سليمة عند اختيار عينة من الحجم n = 2 من الصندوق المحتوي على 10 ثمرات هو :

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}.$$

المثال السابق يوضح ما يسمي بتجربة الهندسي الزائدي .

مثال (٥-٢٢) يراد اختيار لجنة من ثلاثة أشخاص من بين 4 سيدات و 5 رجال والمطلوب إيجاد التوزيع الاحتمالي لعدد السيدات في اللجنة المختارة .

الحل : بفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد السيدات في اللجنة المختارة . الشروط لتجربة الهندسي الزائد متوفرة وعلى ذلك :

$$P(X=0) = h(0;9,3,4) = \frac{\binom{4}{0}\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84},$$

$$P(X=1) = h(1;9,3,4) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84},$$

$$P(X=2) = h(2;9,3,4) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{30}{84},$$

$$P(X=3) = h(3;9,3,4) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{84}.$$

ويمكن تمثيل التوزيع الهندسي الزائدى بالجدول التالي :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

هذا ويمكن وضع صيغة لإيجاد التوزيع الاحتمالي للمثال السابق علي الشكل :

$$P(X=x)=h(x;9,3,4)=\frac{\binom{4}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{9}{3}},x=0,1,2,3.$$

الأن يمكن تعميم صيغة التوزيع الاحتمالي في المثال السابق وذلك للحصول علي صيغة للدالة $h(x;N,n,k)$. العدد الكلي للعينات من الحجم n المختارة من N من الوحدات هو $\binom{N}{n}$. هذه العينات يفترض أنها متساوية في إمكانية الحدوث . يوجد $\binom{k}{x}$ طريقة لاختيار x من k حالات النجاح ، ولكل طريقة من هذه الطرق يمكن اختيار $(n-x)$ من حالات الفشل بطرق عددها $\binom{N-k}{n-x}$. وعلي ذلك العدد الكلي من العينات المرغوب فيها من $\binom{N}{n}$ عينة هو $\binom{N-k}{n-x}\binom{k}{x}$. وعلي ذلك فإن التوزيع الهندسي الزائدي يمكن الحصول عليه كالآتي :

$$h(x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},x=0,1,2,...,n \quad ,n\le k \quad , \quad n\le N-k$$

مثال (٥-٢٣) اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 6$ من صندوق يحتوي علي 5 كرات حمراء و 4 كرات سوداء . ما هو احتمال ظهور ثلاث كرات حمراء في العينة المختارة.

الحل :

باستخدام التوزيع الهندسي الزائدى حيث $N = 9, n = 6, k = 5, x = 3$ فإن :

$$h(3;9,6,5)=\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{3}}{\binom{9}{6}}=\frac{40}{84}.$$

إذا كانت p نسبة الوحدات التي تنتمي إلي النوع A وعلي ذلك $p=\frac{k}{N}$ ومنها:

$(N-K)/N=1-p=q$ وهي نسبة الوحدات التي تنتمي إلي النوع B وبوضع :

$k = Np$ و $N-k = Nq$ في الصيغة $h(x;N,n,k)$ فإننا نحصل علي الصيغة المكافئة التالية:

$$h(x;n,p,N)=\frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}\quad x=0,1,2,\ldots,n$$

$$n \le Np, n \le Nq$$

$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

سوف نكتب $X \sim HYP(n, p, N)$ للدلالة علي أن X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الهندسي الزائدى .

متطابقة رياضية A Mathematical Identity

بما أن :

$$(1+y)^a(1+y)^b=(1+y)^{a+b}$$

وبكتابة مفكوك ذى الحدين لكل حد من المتطابقة السابقة نحصل على :

$$\left[\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}y^i\right]\left[\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j}y^j\right]=\sum_{r=0}^{a+b}\binom{a+b}{r}y^r.$$

وبمساواة معاملات y^n في كل طرف من المعادلة السابقة نحصل على :

$$\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\ldots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{n}$$

وعلى ذلك :

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j}=\binom{a+b}{n}. \qquad (٥-١)$$

الآن سوف نثبت أن $h(x;n, p, N)$ دالة كثافة احتمال :

$$\sum_{x=0}^{n} h(x;n,p,N) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} \binom{Np}{x} \binom{Nq}{n-x}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \binom{Np+Nq}{n} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \binom{N}{n} = 1.$$

مثال (٥-٢٤) إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الهندسي الزائدى حيث $N = 100$, $n = 10$, $p = .05$ أوجد $P(X \leq 5)$.

الحل:

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= h(0) + h(1) + h(2) + h(3) + h(4) + h(5)$$

$$= .5838 + .3394 + .0702 + .0064 + .0002 + .0000 = 1.$$

مثال (٥-٢٥) تشحن موتورات كهربية صغيرة في مجموعات حجم كل منها 50 موتورا وقبل أن تقبل هذه الشحن فإن مفتشا يقوم باختبار أي خمسة من بين مجموعة واحدة (أي من 50 موتورا) ويختبرها . فإذا لم يجد أي من الموتورات الخمسة معيبة فإنه يقبل الشحنة كلها . وأما إذا وجد موتوراً واحداً أو أكثر معيباً فإنه يقوم باختبار الشحنه كلها. فإذا علمنا أن في كل مجموعة يوجد بالفعل ثلاثة موتورات معيبة . فما هو احتمال أن المفتش سيقوم باختبار الشحنه كلها ؟

الحل : إذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل عدد القطع المعيبة في المجموعة الواحدة ، فإن قيام المفتش باختبار الشحنة كلها يعني أن $X \geq 1$ واحتمال ذلك هو :

$$P(X \geq 1) = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = .72.$$

مثال (٥-٢٦) إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الهندسي الزائدى حيث , $k = 5$
$n = 10$, $N = 25$ أوجد الاحتمالات التالية :

(أ) $P(X=2)$

(ب) $P(X \le 2)$

الحل : (أ)

$$P(X=2) = h(2, 10, .2, 25)$$

$$= \frac{\binom{5}{2}\binom{20}{8}}{\binom{25}{10}} = .385$$

(ب)

$$P(X \le 2) = P(X = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2)$$

$$= \sum_{x=0}^{2} h(x;10,.2,25)$$

$$= .057 + .257 + .385 = .699$$

مثال (٥-٢٧) لدي مركز لبيع أجهزة الراديو $N = 200$ فإذا كان $Nq = 197$ $(q = .985)$ و $Np = 3$ $(p = .015)$, فإذا اختيرت عينة عشوائية حجمها $n = 4$ بـــدون إرجـــاع وتـــم إرسالها إلي عميل . أوجد احتمال أن عدد الأجهزة الغير صالحة في العينة تساوي 2 وأوجـــد $P(X = 4)$.

الحل :

$$h(2;4,.015,200) = P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{197}{2}}{\binom{200}{4}} = \frac{57918}{64684950} = .000895 .$$

ومن ناحية أخرى $P(X = 4) = 0$ وذلك لأن $Np = 3$.

مثال (٥-٢٨) وعاء يحتوي علي 100 وحدات منها 80 جيدة و 20 تالفـــة . اختـــيرت 10 وحدات عشوائياً من الوعاء بدون إرجاع أوجد $P(X \le 3)$ حيث X تمثل عدد الوحدات التالفة في العينة .

الحل : X يتبع التوزيع الهندسي الذى حيث $n = 10$, $N = 100$, $k = 20$ وعلي ذلك

$$P(X \le 3) = \sum_{x=0}^{3} \frac{\binom{20}{x}\binom{80}{10-x}}{\binom{100}{10}} = .890$$

من المثال السابق فإن الاحتمال الزائدى على الشكل $P(X \le x)$ مهم جدا فهو يمثل دالة التوزيع للمتغير X . وعلي ذلك يمكن تعريف دالة التوزيع لمتغير X يتبع التوزيع الهندسي الزائدى علي الشكل :

$$H(x;10,.2,100) = \sum_{i=0}^{x} h(i;10,.2,100).$$

ويمكن إيجاد الاحتمالات بدلالة التوزيع . فعلي سبيل المثال :

$$P(X \le 3) = H(3;10,.2,100)$$

$$P(X = 3) = P(X \le 3) - P(X \le 2)$$

$$= H(3;10,.2,100) - H(2,10,.2,100)$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - H(3;10,.2,100)$$

$$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - H(2,10,.2,100).$$

الجدول في ملحق (٢) يعطي الاحتمالات $h(x; n, p, N)$ لقيم مختارة من N=2(1)9 , p , n .

العلاقـة المتكـررة The Recurrence Relation

لحساب الاحتمالات عند كل نقطة $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ فإن العلاقة التالية سوف تفيد في عملية الحساب بعد وضع $h(x; n, p, N) = h(x)$ للاختصار .

$$\frac{h(x+1)}{h(x)} = \frac{\binom{Np}{x+1}\binom{Nq}{n-x-1}\Big/\binom{N}{n}}{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}\Big/\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{\dfrac{(Np)!}{(x+1)!(Np-x-1)!}}{\dfrac{(Np)!}{x!(Np-x)!}} \; \frac{\dfrac{(Nq)!}{(n-x-1)!(Nq-n+x+1)!}}{\dfrac{(Nq)!}{(n-x)!(Nq-n-x)!}}$$

$$= \frac{(Np - x)(n - x)}{(x + 1)(Nq - n + x + 1)}$$

وعلي ذلك فإن :

$$h(x+1) = \frac{(Np - x)\,(n - x)}{(x+1) \quad (Nq - n + x + 1)} h(x). \qquad (٥-٢)$$

العلاقة السابقة تسمي العلاقة المتكررة لحساب احتمالات التوزيع الهندسى الزائدى . تتم عملية الحساب كالتالي :

(أ) نحسب $h(0)$ كالتالى :

$$h(0) = \frac{\binom{Np}{0}\binom{Nq}{n-0}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{Nq}{n-0}}{\binom{N}{n}}$$

(ب) نوضع $x = 0$ في المعادلة (٥-٢) وذلك للحصول علي $h(1)$ بدلالة $h(0)$ كالتالي:

$$h(1) = \frac{(Np)(n)}{(1)(Nq - n + 1)} h(0)$$

(ج) نوضع $x = 1$ في المعادلة (٥-٢) وذلك للحصول علي $h(2)$ بدلالة $h(1)$ كالتالي :

$$h(2) = \frac{(np - 1)(n - 1)}{(2)(Nq - n + 2)} h(1)$$

وهكذا .

المتوسط والتبايــــن Mean and Variance

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \ h(x) = \sum_{x=1}^{n} x \ h(x)$$

وذلك لأنه عندما $x = 0$ فإن $x\,h(x) = 0$ وعلي ذلك فإن المجموع سوف يكون من $x = 1$ إلي $x = n$.

أي أن :

$$\mu=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n} x.\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}$$

$$=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n} x \;\; \frac{(Np)!}{x!(Np-x)!}\binom{Nq}{n-x}$$

$$=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n} \;\; \frac{(Np)!}{(x-1)!(Np-x)!}\binom{Nq}{n-x}$$

$$=\frac{Np}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n} \binom{Np-1}{x-1}\binom{Nq}{n-x}$$

بوضع $y = x-1$ فإن المتغير y يأخذ القيم $y = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ وعلي ذلك :

$$\mu=\frac{Np}{\binom{N}{n}}\sum_{y=0}^{n-1}\binom{Np-1}{y}\binom{Nq}{n-1-y}$$

وباستخدام المتطابقة رقم (٥-١) فإن :

$$\frac{Np}{\binom{N}{n}}\binom{Np+Nq-1}{n-1}=\frac{Np}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1}.$$

وعلى ذلك:

$$\mu=\frac{Np(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}\;\;\frac{n!(N-n)!}{N!}=np.$$

لحساب التباين σ سوف نحسب أولاً العزم الثاني من الدرجة r للمضروب:

$$\mu_{[2]}=\sum_{x=0}^{n} x(x-1).h(x).$$

الحد المقابل لـ $x = 0$, $x = 1$ يساوي صفر. وعلي ذلك المجموع سوف يكون من $x = 2$ إلي $x = n$. أي أن :

$$\mu_{[2]} = \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \frac{(Np)!}{x!(Np-x)!}\binom{Nq}{n-x}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} \frac{(Np)!}{(x-2)!(Np-x)!}\binom{Nq}{n-x}.$$

بوضع $N\,p! = (N\,p)(N\,p-1)(N\,p-2)!$ فإن :

$$\mu_{[2]} = \frac{(Np)(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} \frac{(Np-2)!}{(x-2)!(Np-x)!}\binom{Nq}{n-x}$$

$$= \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{Np-2}{x-2}\binom{Nq}{n-x}.$$

بوضع $x - 2 = y$ فإن :

$$\mu_{[2]} = \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{y=0}^{n-2} \binom{Np-2}{y}\binom{Nq}{n-2-y}$$

وعلي ذلك فإن :

$$\mu_{[2]} = \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \binom{Np+Nq-2}{n-2}$$

$$= \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2} = [\,p(N\,p-1)\,n\,(n-1)\,]\,/\,(N-1).$$

الآن:

$$\sigma^2 = \mu_{[2]} + \mu - \mu^2$$

$$= \frac{np(Np-1)(n-1)}{(N-1)} + np - (np)^2 .$$

والتي بعد تبسيطها تصبح :

$$\sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} npq.$$

للقيم الصغيرة من n والقيم الكبيرة من N فإن الحد (N-1) / (N-n) يقترب إلي 1 وعلي ذلك $\sigma^2 \approx npq$.

مثال (٥-٢٩) للمثال (٥-٢٦) عندما $n = 10$, $k = 5$, $N = 25$ وعلي ذلك $p = \frac{5}{25} = .2$ ومنها :

$$\mu = E(X) = 10(.2) = 2,$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{15}{24}(10)(2)(8) = (.625)(1.6) = 1.$$

نظرية (٥-١) إذا كان $X \sim HYP(n, p, N)$ وعلي ذلك لقيم $x = 0,1,\dots,n$ وعندما $N \to \infty$ و $k \to \infty$ حيث $k/N \to p$ حيث p ثابت موجب فإن :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

البرهان : بما أن التوزيع الهندسي الزائدى علي الشكل :

$$h(x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\dfrac{Np!}{x!(Np-x)!} \cdot \dfrac{Nq!}{(n-x)!(Nq-n+x)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \frac{\frac{(Np)!}{(Np-x)!} \; \frac{(Nq)!}{(Nq-n+x)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{\{(NP)(Np-1)...(Np-x+1)Nq\{(Nq-1)(Nq-n+x+1)\}}{(N)(N-1)...(N-n+1)}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{\left\{p(p-\frac{1}{N})...(p-\frac{x-1}{N}\right\}\left\{q(q-\frac{1}{N})...(q-\frac{n-x-1}{N}\right\}}{(1)\left(1-\frac{1}{N}\right)...\left((1-\frac{n-1}{N}\right)}$$

وبأخذ النهاية للطرفين فإن :

$$\lim_{N \to \infty} h(x) = \binom{n}{x} \; p^x \; q^{n-x}.$$

مثال (٥-٣٠) بفرض أن $N = 100$, $p = .1$, $n = 10$ وعلى ذلك $(N-n)/(N-1) = \frac{90}{99} = .909$. الجدول التالي يعطى المقارنة بين الاحتمالات بالضبط باستخدام التوزيع الهندسي الزائدى والاحتمالات التقريبية باستخدام توزيع ذي الحدين .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h(x)	.33	.408	.202	.052	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000
b(x,10, 1)	.349	.387	.194	.057	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000

يتضح من الجدول السابق أن أكبر فرق هو .021 وعلي ذلك يفضل استخدام تقريب ذي الحدين عندما N كبيرة .

مثال (٥-٣١) اختبرت عينة عشوائية من خمس طلبة (n = 5) بدون إرجاع من مجتمع الطلبة الذي حجمه N = 300 وقد تم سؤال كل شخص فيما إذا كان يستخدم دواء معين أم لا . أوجد P(X = 2) إذا علم أن 50% من مجتمع الطلبة يستخدمون هذا الدواء .

الحل :

$$P(X=2)=\frac{\binom{150}{2}\binom{150}{3}}{\binom{300}{5}}=.3146.$$

يمكن الحصول علي الاحتمال السابق باستخدام تقريب ذي الحدين حيث $n=5, p=.5$ وعلي ذلك فإن $h(2)=P(X=2)\simeq b(2,5,.5)=.3125$ المعامل $(N-n)/(N-1)$ (معامل المجتمع المحدود) في هذا المثال هو :

$$\frac{N-n}{N-1}=\frac{300-5}{300-1}=.98622.$$

مثال (٥-٣٢) الجدول التالي يوضح قيم $h(x)$, $b\ (x;\ n,\ p)$ عندما $n=4, p=\frac{1}{4}, N=100$.

x	b(x; n, p)	h(x)
0	.316	.310
1	.422	.431
2	.211	.212
3	.047	.044
4	.004	.003

يتضح من الجدول أن تقريب ذي الحدين جيد عندما N تكون كبيرة .

(٥-٤) توزيع بواسون Poisson Distribution

أن التجارب التي تعطينا عدد حالات النجاح والتي تحدث في فترة زمنية معينة أو في منطقة محددة تسمي تجارب بواسون Poisson experiment . الفترة الزمنية قد تكون دقيقة ، يوم ، أسبوع ، شهر أو حتى سنة . وعلي ذلك تجربة بواسون قد تنتج مشاهدات لمتغير عشوائي X يمثل عدد المكالمات التليفونية في الساعة والمستقبلة من مكتب ، أو عدد الأيام في السنة والتي تغلق فيها بعض المدارس بسبب الصقيع في بلد ما ،المنطقة المحددة يمكن أن تكون خط الأعداد الحقيقية ، مساحة ، حجم أو ربما قطعة من المعدن . في هذه الحالة X يمكن أن تمثل عدد الفئران في فدان من القمح ، عدد البكتريا في لتر من الماء النقي ، عدد الأخطاء في صفحة من قاموس . تجربه بواسون مشتقة من عملية بواسون Poisson process والتي سوف نتناولها لاحقا . والتي يجب أن تحقق الشروط التالية :

أ- متوسط عدد حالات النجاح ، μ ، والتي تحدث في الفترة الزمنية المعطاة أو في المنطقة المحددة معلوم .

ب- احتمال وقوع حالة نجاح واحدة في فترة قصيرة أو منطقة صغيرة يتناسب مع طول هذه الفترة أو حجم هذه المنطقة ولا يعتمد علي عدد حالات النجاح التي تحدث خارج هذه الفترة أو المنطقة .

ج- احتمال وقوع أكثر من حالة نجاح في الفترة القصيرة أو المنطقة الصغيرة مهمل .

تعريف : عدد حالات النجاح X في تجربة بواسون يسمي متغير عشوائي يتبع بواسون التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X يتبع توزيع بواسون يمثل بالصيغة $f(x;\mu)$ وذلك لأن قيمته تعتمد علي μ . متوسط عدد حالات النجاح التي تحدث في الفترة المعينة أو المنطقة المحددة ، μ ، تساوي التباين . التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يتبع بواسون هو :

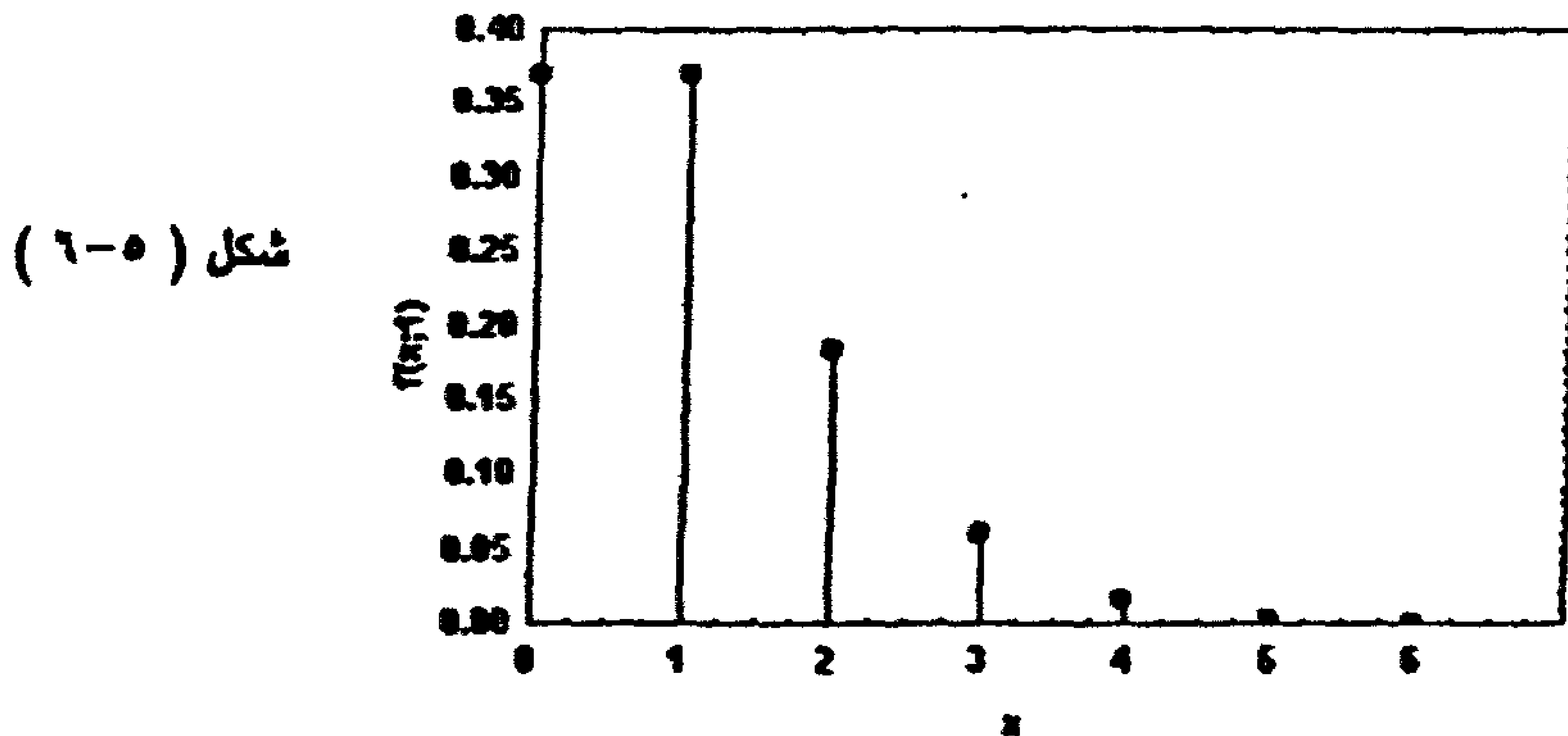
$$f(x;\mu)=\frac{e^{-\mu}\ \mu^{x}}{x!},x=0,1,2,..,$$

حيث μ متوسط عدد حالات النجاح التي تحدث في الفترة المعطاة أو المنطقة الخاصة ، $e=2.71828\ ...$.

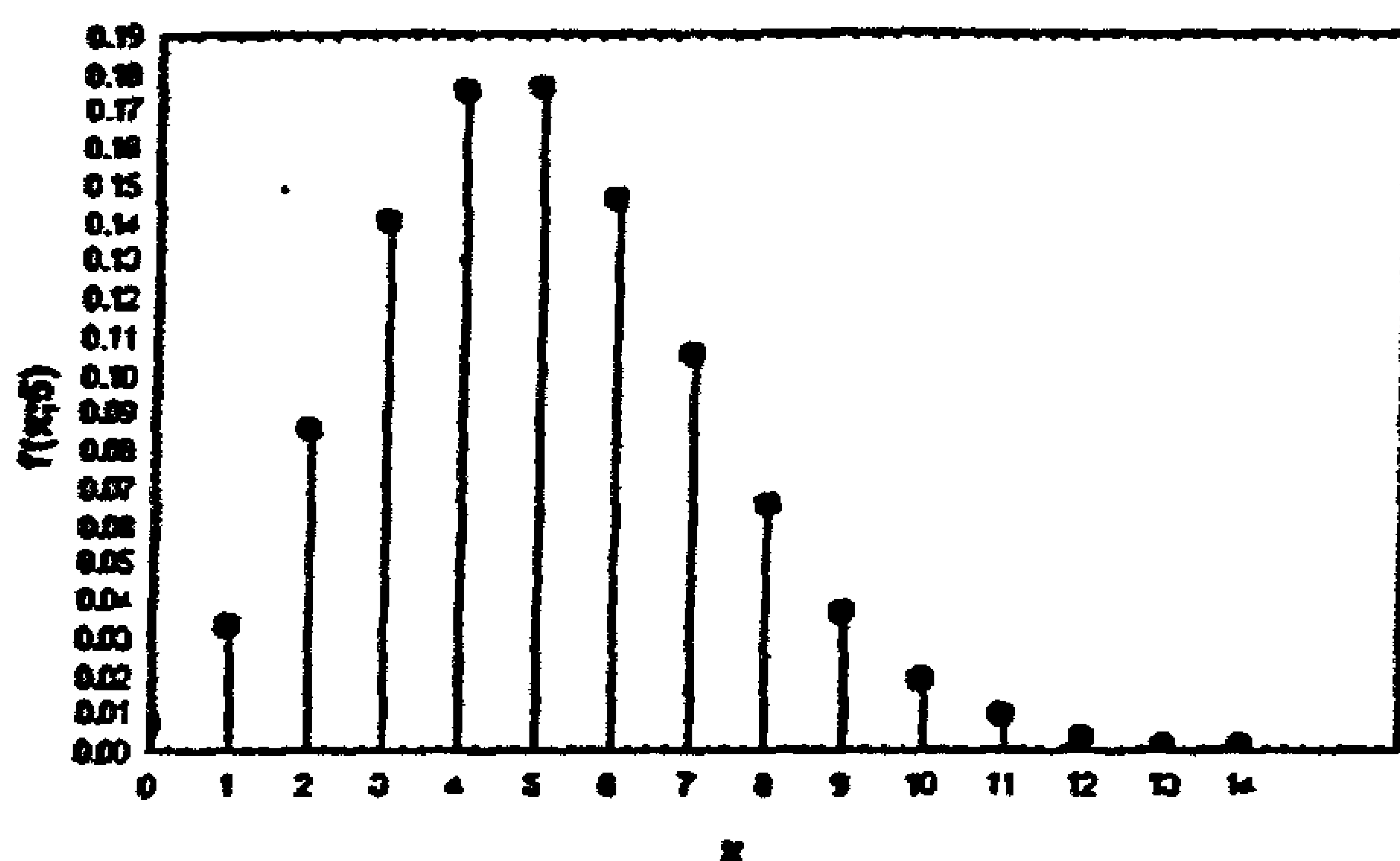
سوف نكتب $X\sim POI\ (\mu)$ للدلالة عن أن X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بواسون بمعلمة μ . تحقق الدالة $f\ (x;\ \mu)$ شرطي دالة كثافة الاحتمال وذلك لأن $\mu\ >\ 0$ تعني أن $f(x;\mu)>0$ وأيضا:

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x;\mu)=e^{-\mu}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\mu^{x}}{x!}=e^{-\mu}e^{\mu}=1.$$

بيان $f(x\ ;\mu)$ موضح في شكل (٥-٦) وشكل (٥-٧) بمعلمة $\mu=1\ ,\ \mu=5$ علي التوالي .



شكل (٥-٦)



شكل (٥-٧)

دالة التوزيع للمتغير X حيث $X \sim POI(\mu)$ تأخذ الشكل كالتالي :

$$F(x;\mu) = \sum_{k=0}^{x} f(k;\mu).$$

الدالة $F(x;\mu)$ لا يمكن وضعها في صيغة بسيطة وهناك جداول في ملحق (٣) لحساب $F(x;\mu)$ وذلك لقيم مختلفة من x , μ .

مثال (٥-٣٣) إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بواسون حيث $X \sim POI(5)$ أوجد قيمة m بحيث أن :

$$P(X > m) = .032.$$

الحل :

$$\sum_{x=0}^{8} f(x;5) = .932,$$

$$\sum_{x=0}^{9} f(x;5) = .968.$$

من جدول بواسون في ملحق (٣) أي أن $m = 9$.

مثال (٥-٣٤) إذا علمت أن متوسط عدد المكالمات التليفونية يستقبلها عــامل علــي لوحــة سويتش هي 5 مكالمات في الدقيقة ، وإذا كان أقصى ما يمكن للوحة السويتش التعامل معـــها هو 8 مكالمات في الدقيقة أوجد :

أ- احتمال عدم استطاعه لوحة السويتش من التعامل مع جميع المكالمات في خلال دقيقة ؟

ب-احتمال وصول ، مكالمتين علي الأكثر خلال دقيقة ؟

الحل : (أ) المتغير العشوائي X هنا هو عدد المكالمات التليفونية التــي تصــل إلــي لوحــة السويتش حيث $X \sim POI\ (5)$ والمطلوب حساب $P\ (X > 8)$ أي أن :

$$P(X > 8) = P(X \geq 9) = 1 - \sum_{k=0}^{8} \bar{e}^{5} \frac{5^k}{k!} = .068.$$

(ب) $$P\ (X \leq 2) = .125\ .$$

مثال (٥- ٣٥) تعطل ماكينة لتصنيع الحلوى في المتوسط خمس مرات في الأسبوع ما هــو الاحتمال أن تعطل الماكينة ثلاث مرات خلال أسبوع .

الحل : بإستخدام توزيع بواسون حيث $\mu = 5,\ x = 3$ ومن جدول بواسون فــي ملحــق (٣) فإن:

$$f(3;5) = \frac{e^{-5}\ 5^3}{3!} = \sum_{k=0}^{3} f(k;5) - \sum_{k=0}^{2} f(k;5)$$
$$= 0.2650 - 0.125 = 0.14.$$

مثال (٥-٣٦) إذا كان متوسط عدد الفئران في فدان من القمح هو $\mu = 3$. أوجد احتمــال وجود علي الأقل 12 فأراً في فدان معطي .

الحل : بفرض أن X تمثل عدد الفئران في فدان من القمح وباستخدام جــداول بواســون فــي ملحق (٣) فإن

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12)$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{11} f(k;3)$$
$$= 1 - P(X \leq 11) = 1 - 1.000 = 000.0.$$

<u>الدالـــة المولـــدة للعـــــزوم :</u>

إذا كان $X \sim POI(\mu)$ فـــإن :

$$M_X(t)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{tx}\mu^x}{x!}=e^{-\mu}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\mu e^t)^x}{x!}=e^{-\mu}\ e^{\mu e^t}$$

وعلي ذلك :

$$M_X(t)=e^{\mu(e^t-1)}$$

ومنها :

$$M'_X(t)=e^{\mu(e^t-1)}\ \mu\ e^t=M_X(t)\mu e^t$$

وعلي ذلك :

$$M'_X(0)=M_X(0)\mu e^0=\mu$$

وبنفس الشكل :

$$M''_X(t)=[M_X(t)+M'_X(t)]\mu e^t$$

وعلي ذلك :

$$M''(0)=(1+\mu)\mu .$$

وبالتالي فإن :

$$\sigma^2=Var(X)=E(X^2)-\mu^2=\mu(1+\mu)-\mu^2=\mu\ .$$

نظرية (٥-٢) إذا كان $X \sim BIN(n , p)$ وعلي ذلك لكل قيمـــة $x=0,1,\ldots,n$ وعندمـــا $p \to 0$ حيث $np=\mu$ ثابت فإن :

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{e^{-\mu}\ \mu^x}{x!}\ .$$

البرهان:

$$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^x\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{\mu^x}{x!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-x+1}{n}\right)\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}.$$

نحصل علي النتيجة بأخذ النهاية للطرفين وذلك باستخدام الصيغة التالية (المعروفة في مقـــرر التفاضل)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}=e^{-\mu}$$

عندما x ثابت فإن :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}=1$$

تفيد نظرية (٥-٢) في تقريب b (x; n, p) عندما n كبيرة و p صغيرة ، وذلـك بوضـع $np=\mu$. إذا اقتربت p من الواحد يمكن تغيير ما قمنا بتعريفه نجاح إلي فشـــل والعكـس الفشل إلي نجاح وعلي ذلك تتغير p إلي قيمة قريبة من الصفر .

بفرض أن n = 10 , p = .1 المقارنة بين الاحتمال المضبـــوط لتوزيـــع ذي الحديـن وتقريب بواسون حيث $\mu=np=1$ هو :

x	0	1	2	3	4	5	6	7 فأكثر
ذى الحدين	.349	.387	.194	.057	.011	.002	.000	.000
بواسون	.3679	.3679	.1839	.0613	.0153	.0031	.0005	.0001

عندما n = 20 , p = .05 فإن $\mu=np=1$ سوف نحصل علي المقارنة الآتية :

x	0	1	2	3	4	5	6	7 فأكثر
ذى الحدين	.3585	.3774	.1887	.0596	.0133	.0022	.0003	.000
بواسون	.3679	.3679	.1839	.0613	.0153	.0031	.0005	.0001

كما يتضح من المقارنة السابقة إنها جيدة حتى عندما n = 10 . غالباً تكـــون أفضــل عندما n = 20 . في النهاية عندما n = 100 و p = .01 فإن المقارنة تصبح :

x	0	1	2	3	4	5	6	7 فأكثر
ذي الحدين	.3660	.3697	.1849	.0610	.0149	.0029	.0005	.0001
بواسون	0.3679	.3679	.1839	.0613	.0153	.0031	.0005	.0001

وكقاعدة عامة يستخدم توزيع بواسون كتقريب جيد لتوزيع ذي الحدين عندما n كبيرة $(n \geq 100)$ و p صغيرة $(p \leq .01)$ و $\mu = np$ حيث $\mu \leq 20$.

مثال (٥-٣٧) يحتوي كتاب علي 1000 صفحة يوجد بها 400 خطا موزعه علي صفحات الكتاب ما هو الاحتمال الحصول علي ستة أخطاء في صفحة مختارة ؟

الحل : المتغير العشوائي X يمثل عدد الأخطاء في إحدى الصفحات وهو يتبع توزيع ذي الحدين بمعلمتين n , p حيث $p = \frac{1}{1000}$. وحيث أن n كبيرة و p صغيرة فإن توزيع X يؤول إلي توزيع بواسون بمعلمة $\mu = np = (400)(\frac{1}{1000}) = 0.4$ وباستخدام جداول بواسون في الملحق (٣) فإن :

$$f(6;0.4) = \frac{e^{-0.4}0.4^6}{6!} = \sum_{k=0}^{6} f(k;0.4) - \sum_{k=0}^{5} f(k;0.4)$$
$$= 1.000 - 1.000 = 000.0.$$

مثال (٥-٣٨) بفرض أنه في المتوسط يوجد شخص من بين 1000 شخص يدخن السجائر في مدينة ما . أوجد احتمال أنه في عينة عشوائية من 8000 شخص نحصل علي 6 أشخاص يدخنون .

الحل : في هذا المثال يكون لدينا تجربة ذي الحدين حيث $n = 8000$, $p = 0.001$ وحيث أن p تقترب كثيراً من الصفر وأن n كبيرة بدرجة كافية ، فإنه يمكن استخدام توزيع بواسون حيث $\mu = (8000)(0.001) = 8$. وعلي ذلك إذا كانت X تمثل عدد المدخنين فإن :

$$P(X = 6) = b(x;8000,0.001)$$
$$\approx f(6;8) = \sum_{k=0}^{6} f(k;8) - \sum_{k=0}^{5} f(k;8)$$
$$= 0.313 - 0.191 = 0.122.$$

مثال (٥-٣٩) إذا كان احتمال وجود خدش بالضبط فى قدم واحد من السلك هـو $\frac{1}{1000}$ وإذا كان احتمال وجود أثنين أو اكثر فى هذا الطول صفر. إذا كان X متغير عشوائي يمثل عـدد الخدوش فى 3000 قدم من السلك . تحت فرض أن عدد الخدوش مستقلة فى الفترات الغـير متقاطعة أوجد احتمال أن عدد الخدوش خمسة فى 3000 قدم من السلك .

الحل : المتغير X تقريباً يتبع بواسون بمتوسط $n\,p = (3000)\left(\frac{1}{1000}\right) = 3$ وعلـى ذلـك الاحتمال المطلوب هو :

$$P(X=5) = \frac{3^5\,\bar{e}^3}{5!}.$$

ومن الجدول فى ملحق (٣) فإن :

$$P(X=5) = P(X \le 5) - P(X \le 4)$$
$$= .916 - .815 = .101.$$

مثال (٥-٤٠) تؤمن شركة للتـأمين لعدد 10,000 سنوياً ضد الحوادث من نوع ما. فـإذا كان معروف أنه لكل 500 شخص يتوقع أن شخص واحد يأخذ التأمين . أوجد $P(X \ge 25)$

الحل : الاحتمال المطلوب هو :

$$P(X \ge 25) = 1 - P(X < 25)$$
$$= 1 - P(X \le 24)$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{24} b(k, 10000, .002).$$

عملية الحساب صعبة لذلك سوف نستخدم تقريب بواسون حيث : $\mu = 10000\ .002 = 20$

وعلى ذلك :

$$P(X \geq 25) \approx 1 - \sum_{k=0}^{24} f(k,20)$$
$$= 1 - .8430 = .157 \ .$$

مثال (٥-٤١) بفرض أن 1% من الترانزيستور transistor المنتجة فى مصنع ما تالفـة . يحتاج نوع جديد من الحاسبات الآلية إلى 100 وحدة فإذا تم اختبار 100 عشوائياً من المصنع من خط الإنتاج . أوجد (P (X = 3 باستخدام توزيع ذي الحدين ثم بتقريب بواسون .

الحل :

$$P(X = 3) = b(3; 100, .01) = .061 \ .$$

بينما باستخدام تقريب بواسون فإن :

$$\mu = np = (100)(.01) = 1$$
$$f(3;1) = \frac{\bar{e}^{1}(1)^3}{3!} = .061.$$

<u>The Recurrence Relation العلاقة المتكررة</u>

يمكن الحصول على العلاقة المتكررة بسهولة كالتالى :

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\bar{e}^{\mu}\mu^{x+1}/(x+1)!}{\bar{e}^{\mu}\mu^{x}/x!} = \frac{\mu}{x+1}$$

وعلى ذلك فإن :

$$f(x+1) = \frac{\mu}{x+1} f(x).$$

<u>المتوسط والتباين :</u>

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \ f(x).$$

ولأن الحد الأول فى المجموع يساوى صفر فإن :

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} x\ f(x)=\sum_{x=1}^{\infty} x.\bar{e}^{\mu}\frac{\mu^{x}}{x!}$$

$$=\bar{e}^{\mu}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\mu^{x}}{(x-1)!}.$$

بأخذ μ خارج المجموع وبوضع $y=x-1$ فإن :

$$E(X)=\mu\ \bar{e}^{\mu}\sum_{x=}^{\infty}\frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}=\mu\ \bar{e}^{\mu}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\mu^{y}}{y!}$$

$$=\mu\ \bar{e}^{\mu}.e^{\mu}=\mu.$$

التباين يمكن الحصول عليه بعد إيجاد المضروب من الدرجة الثانية $\mu_{[2]}$ حيث :

$$\mu_{[2]}=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)f(x)$$

ولأن الحد الأول والثانى فى المجموع المقابلان إلى $x=1$, $x=0$ يساويان صفر فإن :

$$\mu_{[2]}=\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)f(x)$$

$$=\bar{e}^{\mu}\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)\frac{\mu^{x}}{x!}$$

$$=\bar{e}^{\mu}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\mu^{x}}{(x-2)!}.$$

بأخذ μ^2 خارج المجموع وبوضع $y=x-2$ فإن :

$$\mu_{[2]}=\mu^{2}\ \bar{e}^{\mu}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$=\mu^{2}\ \bar{e}^{\mu}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\mu^{y}}{y!}$$

$$=\mu^{2}\,\bar{e}^{\mu}.e^{\mu}=\mu^{2}.$$

وعلى ذلك فإن :

$$\sigma^2 = \mu_{[2]} + \mu - \mu^2$$
$$= \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu .$$

واحد من خصائص توزيع بواسون إن متوسطة يساوى تباينه والذى يساوى معلمة التوزيع .

The Characteristic Function الدالة المميزة

الدالة المميزة لتوزيع بواسون يمكن الحصول عليها كالتالي :

$$\phi_X(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} f(x;\mu)$$
$$= \bar{e}^{\mu} \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \frac{\mu^x}{x!}$$
$$= \bar{e}^{\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\mu e^{it})^x}{x!}$$
$$= \bar{e}^{\mu} . e^{\mu e^{it}}$$
$$= \bar{e}^{\mu(1-e^{it})} .$$

The Moments Recurrence Relation العلاقة المتكررة للعزوم

العزوم حول المتوسط لتوزيع بواسون تحقق العلاقة المتكررة التالية :

$$\mu_{r+2} = \mu \left[\frac{d\,\mu_{r+1}}{d\mu} + (r+1)\,\mu_r . \right]$$

حيث :

$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

البرهان :

بما أن :

$$\mu_{r+1} = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\mu)^{r+1} \bar{e}^{\mu} \frac{\mu^x}{x!} .$$

بتفاضل العلاقة السابقة بالنسبة للمعلمة μ نحصل على :

$$\frac{d\mu_{r+1}}{d\mu} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} \{(r+1)(x-\mu)^r(-1)\bar{e}^{\mu}\ \mu^x$$

$$(x-\mu)^{r+1}\bar{e}^{\mu}(-1)\ \mu^x + (x-\mu)^{r+1}\bar{e}^{\mu}\ x\ \mu^{x-1}\}$$

$$= -(r+1)\sum_{x=0}^{\infty}(x-\mu)^r\ \bar{e}^{\mu}\ \frac{\mu^x}{x!}$$

$$+\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}(x-\mu)^{r+1}\bar{e}^{\mu}\ \mu^{x-1}$$
$$\{-\mu + x\}$$

ومنها :

$$\left[\frac{d\mu_{r+1}}{d\mu} + (r+1)\mu_r\right]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}(x-\mu)^{r+2}\ \bar{e}^{\mu}\ \frac{\mu^x}{x!} = \mu_{r+2}\ .$$

وبذلك يتم البرهان .

عملية بواسون Poisson Process

بفرض أنها عملية طبيعية يتكرر فيها وقوع حادثة من نوع ما مثل المكالمات التليفونية أو العيوب على طول قطعة من السلك الطويل . إذا كان $X(t)$ يمثل عدد مرات وقوع مثل هذه الحوادث فى فترة معطاة $[0, t]$ وبفرض تحقق الشروط التالية :

(أ) احتمال أن الحادثة المعطاة سوف تحدث بالضبط مرة واحدة خلال فترة قصيرة $[t, t+\Delta t]$ يتناسب مع طول هذه الفترة ، Δt ، وهذا الاحتمال يساوى $\lambda \cdot \Delta t$ حيث $\lambda > 0$.

(ب) وقوع الحادثة فى فترة زمنية طولها Δt مستقل عن وقوع الحادثة فى فترات زمنية أخرى (فترات متنافية) طولها Δt.

(ج)) احتمال أن الحادثة المعطاة سوف تحدث أكثر من مرة خلال فترة قصيرة $[t, t+\Delta t]$ مهمل .

إذا تحققت هذه الشروط وعندما $\Delta t \to 0$ فإن توزيع $X(t)$ سوف يتبع توزيع بواسون والذى سوف يتم إثباته فى النظرية التالية حيث : $o(\Delta t)$ يرمز لدالة فى Δt بحيث أن $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ وبمعنى آخر $o(\Delta t)$ مهمل بالنسبة إلى Δt .

نظرية (٥-٣) Homogeneous Poisson Process

إذا كان $X(t)$ يمثل عدد مرات وقوع حادثة ما فى الفترة $[0, t]$ وبفرض تحقق الشروط التالية :

(أ) $X(0)=0$

(ب) $P[X(t+h)-X(t)]=n \mid X(s)=m] = P[X(t+h)-X(t)=n]$

لجميع قيم : $0 \leq s \leq t,\ 0 < h$

(ج) $P[X(t+\Delta t)-X(t)=1]=\lambda \Delta t+o(\Delta t)$

حيث $\lambda > 0$ (ثابت)

(د) $P[X(t+\Delta t)-X(t) \geq 2]=o(\Delta t)$

إذا تحققت الشروط من (أ) إلى (د) فإنه لقيم $t \geq 0$ يكون :

$$P_n(t)=P[X(t)=n]=\bar{e}^{\lambda t}(\lambda t)^n / n!$$

البرهان :

وقوع n من الحوادث فى الفترة $[0, t+\Delta t]$ تعنى أن 0 من الحوادث تقع فى الفترة $[t, t+\Delta t]$ و n من الحوادث تقع فى الفترة $[0, t]$ أو وقوع حادثة واحدة فى الفترة $[t, t+\Delta t]$ و $n-1$ من الحوادث فى الفترة $[0, t]$ أو حادثتين أو اكثر فى الفترة $[t, t+\Delta t]$ وعلى ذلك لقيم $n > 0$ فإن :

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)P_1(\Delta t)+P_n(t)P_0(\Delta t)+o(\Delta t)$$
$$=P_{n-1}(t)[\lambda \Delta t+o(\Delta t)]+P_n(t)[1-\lambda \Delta t-o(\Delta t)]+o(\Delta t)$$

ولكن :

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{n-1}(t)\lambda \Delta t+P_n(t)-P_n(t)\lambda \Delta t-P_n(t)}{\Delta t}$$
$$=\lambda[P_{n-1}(t)-P_n(t)]$$

عندما : $n=0$

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_0(\Delta t)$$
$$=P_0(t)[1-\lambda \Delta t-o(\Delta t)].$$

$$\frac{d\,P_0(t)}{d\,t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\lambda\,\Delta t + P_0(t) - o(\Delta t)\,P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda\,P_0(t)\,.$$

وبفرض أن الشرط الابتدائى $P_0(0) = 1$ ، فإن الحل للمعادلة التفاضلية السابقة هو:

$$P_0(t) = \bar{e}^{\lambda t}.$$

بنفس الشكل عندما $n = 1$ فإن :

$$\frac{d\,P_1(t)}{d\,t} = \lambda\,[P_0(t) - P_1(t)]$$

$$= \lambda\,[\bar{e}^{\lambda t} - P_1(t)]$$

والتي تعطى :

$$P_1(t) = \lambda\,t\,\bar{e}^{\lambda t}$$

بالاستنتاج يمكن إثبات أن :

$$P_n(t) = \bar{e}^{\lambda t}(\lambda t)^n / n! \qquad n = 0,1,2,...$$

وعلى ذلك $X(t) \sim POI(\lambda\,t)$ ، حيث $\mu = E[X(t)] = \lambda\,t$. ولأن λ تعتبر ثـابت فـى الفترة t فإن العملية يشار إليها كعملية متجانسة (H P P) . وعلـى ذلـك $X \sim POI(\mu)$ يطبق لأي فترة طولها ، $[\,s\,,\,s+t\,]$ ، t حيث $\mu = \lambda\,t$ و λ يمثل معدل الوقـوع لكـل وحدة طول والفترة طولها t من الوحدات .

(٥-٥) توزيع ذى الحدين السالب Negative Binomial Distribution

بفرض أن تجربة ما لها نفس الخصائص التى سبق أن ذكرناها لتوزيـع ذى الحديـن ، ولكن مع تكرار المحاولات حتى يمكن الحصول على عدد ثابت من حالات النجـاح . وعلـى ذلك ، بدلا من إيجاد احتمال الحصول على x نجاح فى n من المحـاولات ، فـإن الاهتمـام سوف يكون فى إيجاد احتمال أن النجاح رقم k سوف يحدث فى المحاولة رقم x . التجـارب من هذا النوع تسمى تجارب ذي الحديـن السـالب negative binomial experiment . بفرض أن لاعب كرة السلة ينجح فى التصويب نحو الهدف فـى 80% مـن المحـاولات . المطلوب إيجاد احتمال أن ينجح فى تصويب الهدف الخامس فى المحاولة رقـم 8 . سـوف

نرمز للنجاح فى التصويب بالرمز D' ونرمز للفشل فى التصويب بالرمز D ، وعلى ذلك لترتيب مطلوب سوف نحصل على $D'D'DDDD'D'D'$ والذي يحدث باحتمال :
$(0.8) (.08) (0.2) (0.2) (0.2) (0.8) (0.8) (0.8) = (0.8)^5 (0.2)^3$. ويمكن حصر كل الترتيبات بإعادة ترتيب حالات النجاح والفشل ما عدا المحاولة الأخيرة والتى لابد أن تكون النجاح رقم خمسة . العدد الكلى من الترتيبات الممكنة يساوى عدد الطرق لتبديل 7 عناصر منها 4 من نوع نجاح و 3 من فوع فشل . هذا العدد الكلى من الترتيبات الممكنة يحدث بطرق متنافية عددها $\binom{7}{4}$. وحيث أن X تمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على 5 أهداف ، فإن :

$$P(X = 8) = \binom{7}{4}(0.8)^5(0.2)^3 = 0.0917504.$$

تعريف : العدد X من المحاولات والذى ينتج k حالات نجاح فى تجربة ذى الحدين السالب يسمى متغير عشوائى يتبع ذى الحدين السالب .

سوف نكتب $X \sim NB\ (k, p)$ للدلالة على أن X متغير عشوائى يتبع توزيع ذى الحدين السالب بمعلمتين k , p .

بعض المشاكل التي لها متغير عشوائي يتبع ذى الحدين السالب كثيرة منها :

١-عدد الوحدات التي تختبر للحصول على عدد محدود من الوحدات التالفة .

٢-عدد القذائف التى تطلق حتى الوصول إلى عدد ثابت من الأهداف .

التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى يتبع ذى الحدين السالب يسمى توزيع ذى الحدين السالب ، وسوف نمثله بالصيغة $b^*(x; k, p)$ حيث أن قيمة تعتمد على عدد حالات النجاح المطلوبة وعلى احتمال النجاح في المحاولة المعطاة . لإيجاد الصيغة العامة سوف نوجد أولا احتمال الحصول على حالة نجاح في المحاولة رقم x والتى تكون مسبوقة بعدد $(k-1)$ من حالات النجاح و $(x-k)$ من حالات الفشل وذلك فى ترتيب خاص . وحيث أن المحاولات مستقلة ، فإنه يمكن ضرب كل الاحتمالات المقابلة لكل نتيجة مطلوبة . كل حالة نجاح يحدث باحتمال p وكل حالة فشل تحدث باحتمال $q = 1-p$. وعلى ذلك ، الاحتمال أن الترتيب المطلوب ينتهى بحالة نجاح هو $p^{k-1}\, q^{x-k}\, p = p^k\, q^{x-k}$. العدد الكلى من نقاط العينة فى التجربة والذي ينتهى بحالة نجاح بعد $k-1$ من حالات النجاح و $k-1$ من حالات الفشل فى أي ترتيب يساوى عدد الطرق لتبديل $k-1$ من حالات النجاح ، $x-k$ من حالات الفشل والتي تساوى $\binom{x-1}{k-1}$. كل الترتيبات المطلوبة تكون متنافية فى إمكانية الحدوث وتحدث

باحتمال متساوي وهو $p^k q^{n-k}$ ، وعلى ذلك يمكن الحصول على الاحتمال المطلوب بضـــرب $p^k q^{n-k}$ فى $\binom{x-1}{k-1}$ ، وعلى ذلك توزيع ذى الحدين السالب يأخذ الصيغة التالية :

$$b^*(x;k,p)=\binom{x-1}{k-1}p^k \; q^{x-k} \;\; , \; x=k,k+1,k+2,...$$

في الحقيقة أشتق أسم توزيع ذى الحدين السالب من أن كل حد فى المفكوك:

$p^k(1-q)^{-k}$ يقابل قيمة من قيم $b^*(x;k,p)$ حيث $x=k,k+1,k+2,...$.

مثال (٥-٤٢) إذا كان احتمال ولادة ذكر فى أى ولادة تمر بها سيدة هو $\frac{1}{2}$ أوجد احتمـــال أن تضع ذكرين بعد أربع ولادات .

الحل : باستخدام توزيع ذى الحدين السالب حيث $p=\frac{1}{2},k=2,x=4$ فإن :

$$b^*(4;2,0.5)=\binom{3}{1}0.5^2\,0.5^2$$

$$=\frac{3!}{1!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{16}.$$

مثال (٥-٤٣) يلعب الفريق A مع الفريق B فى سلسلة من المباريات فإذا كان احتمـــال أن يكسب A فى أى مباراة يلعبها مع B هو 0.6 . سوف تنتهى السلسلة من المباريـــات عندمـــا يكسب إما A أو B . أوجد أن احتمال أن السلسلة سوف تنتهى عند المباراة السادسة بـــالضبط مع العلم أن الفريق الأول هو الذي سيفوز 4 مباريات .

الحل :

P(يفوز A للمرة الرابعة في المباراة السادسة) = $b^*(6;4,.6)$

$$=\binom{5}{3}(.6)^4(.4)^2$$

$$=.20736.$$

P(يفوز B للمرة الرابعة في المباراة السادسة) = $b^*(6;4,.4)$

$$=\binom{5}{3}(.4)^4(.6)^2$$

$$=.09216.$$

أي أن :

P (عدد المباريات تكون 6 عند الفوز للمرة الرابعة) = .20736 + 0.09216

= .29952 .

العلاقة بين ذي الحدين وذي الحدين السالب :

يشار أحياناً إلى مشكلة ذي الحدين بالمعاينة لمعكوس ذي الحدين . بفرض أن $X \sim NB(k,p)$, $W \sim BIN(n,p)$ فإن :

$$P[X \le n] = P[W \ge k].$$

وعلى ذلك فإن دالة توزيع ذي الحدين السالب يمكن التعبير عنها بدلالة بدالة توزيع ذي الحدين من العلاقة :

$$F(x;k,p) = P(X \le x) = 1 - P(k-1, x, p)$$
$$= B(x-k; x, q)$$

للمثال (٥-٤٣) $x = 6$, $k = 4$, $p = .6$ وعلى ذلك :

$P($ يفوز A في المباراة السادسة أو اقل للمرة الرابعة $) = P(X \le 6)$

$$= F(6;4,.6)$$
$$= \sum_{x=4}^{6} \binom{x-1}{3} (.6)^4 (.4)^{x-4}$$
$$= B(2;6,.4)$$
$$= \sum_{w=0}^{2} \binom{6}{w} (.4)^w (.6)^{6-w}$$
$$= .5443.$$

لاشتقاق دالة كثافة الاحتمال لعدد حالات الفشل y حتى الحصول على k من حالات النجاح فهذا يعني أن عدد المحاولات سوف تكون $y + k$ ، عندما يكون المطلوب k من حالات النجاح وسوف يكون الآتي :

(أ) آخر محاولة سوف تكون نجاح وتحدث باحتمال p .

(ب) المحاولات الأخرى والتى عددها $y + k - 1$ سوف يكون منـها (k-1) نجـاح و y حالات فشل وهذا يحدث باحتمال :

$$\binom{y+k-1}{k-1} p^{k-1} q^{y}.$$

وحيث أن المحاولات مســتقلة فــإن الاحتمــال المطلــوب هــو حــاصل ضــرب p فــى $\binom{y+k-1}{k-1} p^{k-1} q^{y}$ وعلى ذلك :

$$b^{**}(y;k,p)=\binom{y+k-1}{k-1} p^{k} q^{y} \quad y=0,1,2,\ldots$$
$$=0 \text{ elsewhere.}$$

بالتعويض عن $y = 0, 1, 2$ فى الصيغة السابقة فإن :

$$b^{**}(0;k,p)= p^{k},$$
$$b^{**}(1;k,p)=k\ p^{k}\ q,$$
$$b^{**}(2;k,p)=\frac{k(k+1)}{2!}= p^{k} q^{2}.$$

الجدول في ملحق (٤) يعطى الدالة $b^{**}(y;k,p)$ للقيم الصحيحة $y = 0, 1, 2, \ldots$ و $k=2,3,4,5$, $p=.2,.4,.5,.6,.8$.

متطابقـة رياضيـة **A Mathematical Identity**

$$(1-a)^{-k}=1+ka+\frac{k(k+1)}{2!}a^{2}+\ldots$$
$$+\frac{k(k+1)\ldots(k+x-1)}{x!}a^{x}+\ldots$$
$$=\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+k-1}{k-1}a^{x} \qquad (٥-٣)$$

سوف نستخدم هذه المتطابقة فى حساب المجموع والدالة المميزة لتوزيع ذى الحدين السالب .

الدالــة المميــزة **The Characteristic Function**.

الدالة المميزة لمتغير عشوائي Y يتبع ذي الحدين السالب هو :

$$\phi_Y(t) = E(e^{itY}) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{ity} \binom{y+k-1}{k-1} p^k q^y$$

$$= p^k \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+k-1}{k-1} (q\ e^{it})^y.$$

باستخدام المتطابقة (٥-٣) فإن :

$$\phi_Y(t) = p^k\ (1-q\ e^{it})^{-k}.$$

المتوســط والتبايــن **The Mean and Variance**

بتفاضل $\phi_Y(t)$ بالنسبة لـ t فإن :

$$\phi'_Y(t) = p^k\ (-k)(1-q\ e^{it})^{-k-1}\ (-iq\,e^{it})$$

$$= i\,k\,p^k\,q\,(1-q\,e^{it})^{-k-1}\ e^{it}$$

أي أن :

$$\phi'_Y(0) = i\,k\,q\,p^k\ (1-q)^{-k-1} = i\,k\,q\,(1-q)^{-1}$$

$$= \frac{1}{i}\phi'(0) = k\ q\,(1-q)^{-1}$$

$$= \frac{k\,q}{p} = \mu_Y.$$

لإيجاد التباين نحسب $E(Y^2)$أولا . أي أن :

$$\phi''_Y(t) = i\,k\,q\,p^k[(-k-1)\ (1-q\,e^{it})^{-k-2}$$

$$(-q\,i\,e^{it})\ e^{it} + (1-q\,e^{it})^{-k-1}\,i\ e^{it}]$$

$$\phi''_Y(0) = i\,k\,q\,p^k[i\,q\,(k+1)\,(1-q)^{-k-2}$$
$$+\,i\,(1-q)^{-k-1}]$$
$$= i^2\,k\,q\,p^k\,[(k+1)\,q\,p^{-k-2} + p^{-k-1}].$$
$$= i^2\,[k\,(k+1)q^2\,p^{-2} + k\,q\,p^{-1}].$$

أي أن :

$$E(Y^2) = \frac{1}{i^2}\,\phi''(0)$$
$$= k^2\,q^2\,p^{-2} + k\,q^2\,p^{-2} + k\,q\,p^{-1}.$$

وعلى ذلك :

$$\sigma_y^2 = E(Y^2) - [k\,q/p]^2$$
$$= k\,q^2\,p^{-2} + k\,q\,p^{-1}$$
$$= k\,q\,p^{-2}\,[q+p]$$
$$= k\,q/p^2\,.$$

الآن لدالة كثافة الاحتمال $b^*\ (x;\ k, p)$ فإن المتوسط لها هو :

$$\mu_X = E\,(X) = E\,(\,Y+k\,) = E\,(Y) + k$$
$$= \frac{k\,q}{p} + k$$

والتباين للدالة $b^*\,(\,x\,;k, p\,)$ هو :

$$\sigma_X^2 = E\,[\,Y+k - E\,(Y+k\,)\,]^2$$
$$= E[Y - \frac{k\,q}{p}]^2 = \frac{k\,q}{p^2}.$$

الدالة المميزة للمتغير العشوائي X الذي له الدالة $b^*\,(x;k,p)$ هي :

$$\phi_X(t) = E\,(\,e^{itX}) = E[\,e^{it(Y+k)}]$$
$$= e^{itk}\,E[\,e^{itY}] = e^{itk}\,\,\phi_Y\,(t).$$

وعلى ذلك :

$$\phi_X(t) = (p\,e^{it})^k\,\,(1-q\,e^{it})^{-k}.$$

الدالة المولدة للعزوم والدالة المولدة التراكمية :

$$M_Y(t) = \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+k-1}{k-1} p^k (q e^t)^y = p^k (1-qe^t)^{-k}$$

والدالة المولدة التراكمية سوف تكون :

$$\Psi_Y(t) = \ln \phi_Y(t) = -k \ \ln(1- \theta(e^{it} - 1))$$

حيث $\theta = \frac{q}{p}$ وعلى ذلك :

$$\Psi_Y(t) = -k\left[-\frac{\theta(e^{it}-1)}{1} - \frac{\theta^2(e^{it}-1)^2}{2} - \dots\right]$$

$$= k\left[\theta\left(t + \frac{t^2}{2} + \dots\right) + \frac{\theta^2}{2}\left(t + \frac{t^2}{2} + \dots\right)^2 + \dots\right]$$

وعلى ذلك :

$$k_1 = k\theta \ , \ k_2 = k(\theta + \theta^2),$$

$$k_3 = k(\theta + 3\theta^2 + 2\theta^3) \ , \ k_4 = k(\theta + 7\theta^2 + 12\theta^3 + 6\theta^4),$$

$$\alpha_3 = \frac{1+q}{\sqrt{kq}} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{1+4q+q^2}{kq}.$$

يلاحظ أن متوسط توزيع ذى الحدين أكبر من التباين ، ومتوسط بواسون يساوى التباين ، بينما متوسط ذى الحدين السالب أقل من التباين . وعلى ذلك التوزيع يعطى توفيق جيد عندما يكون المتوسط أقل من التباين .

التوزيع الهندسى Geometric Distribution

عندما $k = 1$ فإننا نحصل على الحالة الخاصة من توزيع الحدين السالب ، أي تحصل على التوزيع الاحتمالى لعدد المحاولات المطلوبة للحصول على حالة نجاح واحدة . توزيع ذى الحدين السالب سوف يختزل إلى الشكل :

$$b^*(x\,;p) = p\,q^{x-1} \ , x = 1, 2, 3, \dots$$

والذى يسمى التوزيع الهندسى وسوف نرمز له بالرمز $g\ (x\,;p)$.

سوف نكتب $X \sim GEO\ (p)$ للدلالة على أن X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الهندسى بمعلمة p. أيضا $E(X) = \frac{1}{p}$, $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$.

مثال (٥-٤٤) عند إلقاء عملة متزنة ، أوجد :

(أ) التوزيع الاحتمالى لعدد المحاولات اللازمة للحصول على صورة واحدة .

(ب)احتمال الحصول على صورة في المحاولة الرابعة :

الحـل : باستخدام التوزيع الهندسى حيث $x = 4\ ,\ p = \frac{1}{2}$ نحصل على :

(أ) $g\ (x; p\ ) = (0.5)\ (0.5)^{x-1}\quad , x = 1, 2, 3, \ldots$

(ب) $g(4,1,p\ ) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}\ .$

دالة التوزيع لمتغير عشوائى X حيث $X \sim GEO\ (p)$ هي :

$$G\ (x;p) = \sum_{i=1}^{x} p\,q^{i-1} = \sum_{i=1}^{x} q^{i-1} - (1-p)\sum_{i=1}^{x} q^{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{x} q^{i-1} - \sum_{i=2}^{x+1} q^{i-1} = 1 - q^x .$$

مثال (٥-٤٥) في إحدى المناطق ، إذا كان احتمال حدوث عاصفة برقية في أي يوم من أيام الصيف في شهري يوليه وأغسطس هو 0.1. وتحت فرض الاستقلال من يوم إلى آخر فما هو احتمال أن تحدث أول عاصفة برقية في فصل الصيف في يوم الثالث من أغسطس ؟

الحل : بفرض أن X متغيراً عشوائياً يمثل عدد الأيام (ابتداء من أول يوليه) حتى حدوث أول عاصفة برقية فإن المطلوب هو حساب $P\ [\ X = 34\ ]$. أي أن:

$$P\ [\ X = 34\ ] = (.9)^{33}\ (.1) = .003\ .$$

مثال (٥-٤٦) احتمال أن يؤدى اختبار معين إلى رد فعل موجب هو 0.4 فما هو احتمال الحصول على أقل من خمس ردود فعل سالبه قبل أن يتحقق أول رد موجب ؟

الحل : بفرض أن Y=X+1 متغيرا عشوائيا يمثل عدد ردود الفعل السالبة قبل وقوع رد الفعل الموجب . وعلى ذلك :

$$P[\ Y=y\ ]=\ q^{y}\ p \qquad y=0,1,2,\ldots$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

الاحتمال المطلوب هو :

$$P[Y<5]=\sum_{y=0}^{4}(.6)^{y}(.4)=.92.$$

نظرية (٥-٤) فقد الذاكرة No – Memory property . إذا كان X ~ GEO (p) فإن :

$$P[X>j+k\,|\,X>j)=\frac{P(X>j+k)}{P(X>j)}$$
$$=\frac{(1-p)^{j+k}}{(1-p)^{j}}=(1-p)^{k}\ \ =P(X>k).$$

(٥-٤)

يقال أن التوزيع الهندسي للاحتمالات ليس له ذاكرة بمعنى أنه إذا لم تكن الحادثة A قد وقعت خلال التكرارات التى عددها j الأولى للتجربة فإن احتمال عدم وقوعها خلال التكرارات التى عددها k التالية هو نفسه الاحتمال بأن الحادثة لن تقع خلال التكرارات التى عددها k الأولى . وهذه الخاصية صحيحة بمعنى أنه إذا كانت العلاقة في (٥-٤) صحيحة فإن المتغير العشوائي X لابد وأن يخضع للتوزيع الهندسي وذلك بفرض أن X يأخذ قيم صحيحة .

مثال (٥-٤٧) إذا كان احتمال أن لاعب كرة السلة يحصل على هدف في أي محاولة هو 3. وبفرض أن المحاولات مستقلة . فإن احتمال احتياجه إلى خمس محاولات للحصول على أول هدف هو $g(5;\ .3)=\ .7^{4}\ (.3)$. بفرض أنه قام بعشرة محاولات دون الحصول على أي هدف فإن احتمال احتياجه إلى خمس محاولات للحصول على أول هدف مازال $7^{4}\ (.3)$. أيضاً احتمال احتياجه على الأكثر خمس محاولات للحصول على أول هدف هو :

$$G(5;.3)=\sum_{i=1}^{5}p\,q^{i-1}\ \ =1-q^{5}$$
$$=1-(.7)^{5}$$
$$=.83193.$$

تمارين:

١- إذا ألقيت زهرة نرد متزنة مرة واحدة، وإذا كان X يمثل عدد النقط التي تظهر على الوجه العلوي للزهرة عند الرمي. المطلوب (أ) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

(ب) $P(X>4)$, $P(X-3<0)$ (جـ) التوقع والتباين للمتغير العشوائي X .

(د) التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

٢- فصل دراسي يتكون من 70 تلميذا بحيث يمثل كل تلميذ عددا من واحد إلى 70 . بفرض أنه تقرر اختيار تلميذ عشوائيا، وإذا كان X يمثل العدد الذي يتم إختياره. أوجد الاحتمالات الآتية (أ) $P(X \leq 8)$ (ب) $P(5 \leq X \leq 30)$.

٣- أوجد صيغة للتوزيع الاحتمالي الخاص بالمتغير العشوائي X الذي يمثل رقم الكرة المختارة عشوائيا من وعاء يحتوى على 10 كرات مرقمة من واحد إلى 10. ما هو الاحتمال أن يكون الرقم المختار أقل من 5 ؟

٤- أوجد التوزيع المنتظم للعينات من الحجم n=3 المراد اختيارها من مجتمع حجمه N = 6

٥- أوجد التوزيع الاحتمالي للفئات الجزئية من الأشهر من الحجم n=3 .

٦- إذا كان X متغير عشوائي منفصل يتبع التوزيع المنتظم، أي أن :

$$f(x;N)=\frac{1}{N}, x=1,2,\ldots,N$$

أوجد E(X) وتباين X .

٧- إذا اختير رقما عشوائيا من بين الأعداد 0,1,...,9 (أ) أوجد التوزيع الاحتمالي للعدد الذي يظهر (ب) التمثيل البياني لهذا التوزيع.

٨- لوحظ لفترة طويلة أن صياد يصيب الهدف باحتمال 0.9 ، فإذا أطلق الصياد 4 طلقات على هدف، أوجد احتمال (أ) إصابة الهدف 3 مرات؟ (ب) إصابة الهدف مرتين على الأكثر.

-٩- خلال فترة طويلة من الزمن وجد أن فاعلية دواء في شفاء الحالات التي يوصف لها هو 20% . إذا وصف هذا الدواء لأربعة مرضى . أوجد احتمال (أ) يكون له تأثير في الشفاء لثلاثة مرضى على الأقل.

-١٠- أثبتت إحصائيات إحدى شركات التأمين أن 0.002 من الحوادث المسجلة في الشركة خطيرة . احسب : (ا) احتمال عدم وجود حوادث خطيرة في 40 حادثة مسجلة تم اختيارها عشوائيا (ب) احتمال وقوع ثلاثة حوادث خطيرة في 20 حادثة مسجلة تم اختيارها عشوائيا.

-١١- احتمال أن تصيب أي طائرة أحد أهداف العدو هو 0.9، فإذا أغارت خمس طائرات على الهدف أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصيب الهدف (ب) متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري.

-١٢- إذا كان 90% من الطلاب في جامعة ما ينجحون في مادة الإحصاء، فما احتمال فشل أثنين في فصل يتضمن ثلاثين طالبا ؟

-١٣- إذا كانت المحركات الأربعة لطائرة تعمل مستقلة بعضها عن بعض. فإن احتمال تعطل أي منها والطائرة في الجو هو 0.5 . ما احتمال أن يكون الطيران ناجح إذا كانت عملية الطيران تحتاج لمحرك واحد على الأقل ؟

-١٤- إذا كان احتمال أن 4% من الوحدات في مصنع ما تالفة. ما هو احتمال إنه على الأكثر توجد وحدة تالفة في عينة عشوائية من الحجم $n=30$ ؟

-١٥- احتمال أن يكسب فريق ما في أي مباراة يلعبها 0.75 فإذا كان الفريق سوف يلعب 8 مباريات أوجد احتمال أن يكسب (ا) مباريتين بالضبط (ب) على الأقل مباراة واحدة (ج) أكثر من نصف المباريات.

-١٦- أسرة بها خمسة أطفال. أوجد احتمال أن يكون بينهم (ا) 3 أولاد (ب) عدد الأولاد أقل من عدد البنات وذلك تحت فرض أن احتمال أن يكون الطفل ولد هو 0.5 .

١٧- احتمال أن لاعب كرة القاعدة يحصل على ضربة في أي وقت يلعب فيه هو 0.3 .فإذاً كان سوف يلعب 100 مباراة في الشهر القادم أوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X .

١٨- إذا كانت فاعلية مبيد معلن عنه في قتل الحشرات في رشة واحدة هو 90% فإذا كان هناك 10,000 حشرة سوف تعامل برشة واحدة من هذا المبيد. أوجد التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لعدد الحشرات التي تقتل.

١٩- قدرت شركة للطيران احتمال وصول طائرتها في ميعادها والتي تقوم من البلد A إلى البلد B هو 0.96 . فإذا قامت خمس طائرات لهذه الشركة من مطار البلد A متجه إلى البلد B أوجد (أ) التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في ميعادها (ب) احتمال وصول طائرتين في ميعادهم (جـ) التمثيل البياني لهذا التوزيع.

٢٠- اشترى تاجر عشر ثلاجات. فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة هو 0.1 فما هو احتمال ان يكون من بينها (أ) ثلاجتين تالفتين (ب) ثلاجتين على الأقل تالفتين (جـ) أربعة على الأقل تالفة.

٢١- تعمل 10 ماكينات في مصنع، فإذا كان احتمال أنه في نهاية اليوم سوف تعطل الماكينة هو 0.2 . وإذا كانت الماكينات تعمل بصورة مستقلة عن بعضها أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الماكينات التي تعمل حتى نهاية اليوم مع تمثيل التوزيع الاحتمالي بالمدرج التكراري.

٢٢- بفرض أنه يوجد من بين كل 400 سيارة من إنتاج مصنع معين لإنتاج السيارات 20 سيارة غير سليمة، أي غير صالحة للاستعمال. سحبت عينة عشوائية مكونة من 3 سيارات من إنتاج ذلك المصنع، أوجد احتمال أن يكون من بينها سيارتين غير سليمة.

٢٣- إذا كان احتمال حصول أبوين على طفل أشقر الشعر هو 0.25، فإذا كان في الأسرة 8 أطفال. ما احتمال أن يكون نصفهم ذو شعر أشقر.

٢٤- يأخذ مراقب جودة إنتاج عينة عشوائية من 10 صمامات عشوائيا من شحنة كبيرة من الصمامات معروف عنها أنها تحتوى على 30% صماما معيبا. ما هو احتمال أن يكون عدد الصمامات المعيبة في العينة أكثر من أو يساوى 2 ؟

٢٥- إذا كان احتمال إصابة هدف بقذيفة واحدة هو 0.2، ما هو احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل خلال 3 قذائف ؟

٢٦- احتمال كشف جهاز رادار لطائرة معادية هو 0.99، فإذا كان لدينا 4 أجهزة تعمل مستقلة بعضها عن بعضها، المطلوب إيجاد (أ) ظهور طائرة معادية في سمائنا (ب) ظهور طائرة معادية على شاشات أربعة منها.

٢٧- إذا كان 5% من نوع معين من صمامات التلفزيون يحترق قبل انتهاء مدة الكفالة. فإذا بيع ألف صمام فما هو متوسط وتباين X ، حيث X تمثل عدد الصمامات المحترقة قبل مدة كفالتها ؟

٢٨- إذا كان احتمال تحمل نوع معين من المصابيح للضغط العالي هو 0.1 فإذا أخذنا عينة من 200 مصباح فما هو احتمال ألا يتحمل 20 منها للضغط العالي؟

٢٩- في مدينة كبيرة كان عدم الوفاق بين الزوجين سببا لـ 60% من حالات الطلاق. أوجد احتمال أن أربعة من حالات الطلاق الستة القادمة في المدينة سيعزى إلى هذا السبب.

٣٠- في بحث ميداني في بلد ما وجد أن 2% من الأشخاص يفضلون شراء تلفزيون بلون أبيض. ما هو احتمال أن أكثر من نصف التلفزيونات التي سوف تباع من بين 40 تلفزيون لونها أبيض ؟

٣١- يحتوى امتحان على 18 سؤال من نوع صح وخطأ، كل سؤال له أربع أجوبة محتملة منهم فقط واحد هو الإجابة الصحيح. ما هو احتمال أن شخص يمكنه الإجابة على 5 إجابات صحيحة وذلك بطريقة التخمين ؟

-٣٢- احتمال أن يشفي مريض من عملية في القلب هو 0.9 ، ما هو احتمال أن يشفي 5 مرضى من بين 10 مرضى سوف يجرى لهم العملية ؟

-٣٣- يحتوى امتحان على 20 سؤال من نوع صح وخطأ، كل سؤال له أربع أجوبة محتملة منهم فقط واحد هو الإجابة الصحيحة. فإذا كان احتمال أن يحصل طالب على 100% في الاختبار هو $P(100\%) = (\frac{1}{4})^{20}$. المطلوب إيجاد احتمال حصوله على 80% إجابة صحيحة.

-٣٤- إذا كان 0.77 من المستهلكين يستخدمون مسحوق ما. ما هو الاحتمال في عينة من10 مستهلكين (ا) بالضبط أربعة يستخدمون المسحوق (ب) على الأقل أربعة يستخدمون المسحوق (جـ) ليس أكثر من واحد يستخدم المسحوق (د) 8 أو أكثر يستخدمون المسحوق.

-٣٥- أثبتت الإحصائيات في إحدى المستشفيات أن 40% من المرضى الذين يتلقون العلاج بها يفشلون في دفع فاتورة الحساب. بفرض أن 4 مرضى دخلوا المستشفي لتلقى العلاج، أوجد الاحتمالات التالية (ا) كل المرضى لن يدفعون الفاتورة (ب) واحد على الأقل سوف يدفع الفاتورة.

-٣٦- إذا كان 90% من المتقدمين لوظيفة دبلوماسي يفشلون في المقابلة الأولى، فإذا اختير 12 شخصا عشوائيا من المتقدمين، أوجد احتمال انه (ا) على الأقل 5 يفشلون (ب) من10 إلى 12 يفشلون.

-٣٧- إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الطلبة الذين يحصلون على وظائف بعد سنة واحدة من التخرج يتبع توزيع ذي الحدين بمعلمتين $n=250$, $p=0.98$ (ا) أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X (ب) أوجد المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي للمتغير X .

-٣٨- أثبتت التجارب حدوث تلف في التمثيل الغذائي لطفل واحد من بين 100 يولدون. بفرض أنه تم ولادة أربعة أطفال في يوم معين، ما هو احتمال (ا) ليس اكثر من طفل واحد لديه تلف (ب) عدم حدوث تلف.

-٣٩- بفرض أن 20% من سائقي سيارات الأجرة الذين يصلون إلى موقف السيارات يعطون إشارات حمراء في كل الاتجاهات (يتبعون الأنظمة) فإذا اختير 20 سائقا عشوائيا من الذين تم وصولهم إلى موقف السيارات. أوجد احتمال (ا) على الأكثر 6 يتبعوا النظام (ب) بالضبط 10 يتبعون النظام (جـ) على الأقل 12 يتبعون النظام.

-٤٠- استخدم جدول ذي الحدين في جدول ذي الحدين في ملحق (١) في إيجاد الاحتمالات

$$P(x=4), n=15, p=0.4$$
$$P(x\le 4), n=20, p=0.1$$
$$P(5\le X\le 11), n=20, p=0.2$$
$$P(x=6), n=15, p=0.5$$
$$P(x\ge 8), n=15, p=0.5$$

-٤١- في إحدى الدراسات لنزلاء مؤسسات الأحداث وجد أن 90% من النزلاء قد يعودون مرة ثانية إلى المؤسسة بعد انتهاء مدتهم. فإذا أخذت عينة عشوائية مكونة 5 من نزلاء من إحدى المؤسسات ، أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد النزلاء الذين يعودون مرة أخرى إلى المؤسسة. (ب) عدد النزلاء المتوقع عودتهم (ب) الانحراف المعياري لعدد النزلاء المتوقع عودتهم مرة أخرى إلى المؤسسة.

-٤٢- إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد المرضى الذين يلغون حجزهم عند طبيب الأسنان، فإذا كان معالم توزيع ذي الحدين للمتغير X هو $n=15$, $p=0.05$ ، أوجد احتمال (ا) ثلاثة أشخاص سوف يلغون الحجز (ب) على الأكثر أربعة سوف يلغون الحجز.

-٤٣- في تجربة زراعية كانت نسبة الإصابة بفطر ما 0.2 في نهاية التجربة. فإذا كان Xمتغيرا عشوائيا يمثل عدد النباتات المصابة بالفطر في عينة من 10 نباتات، أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد النباتات المصابة (ب) أوجد $P(X=0)$.

٤٤- يولد 30% من مواليد سلالة معينة من الأرانب بشعر طويل أوجد (أ) التوزيع الاحتمالي لعدد الحيوانات التي تولد بشعر طويل في بطن من أربعة أرانب (ب) أوجد $P(X=1)$ (جـ) أوجد المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي للمتغير X .

٤٥- ينبت 75% من شاتلات الأشجار المزروعة بشركة معينة لتشجير الطرق أوجد المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي للمتغير X والذي يمثل عدد الأشجار التي تنبت من مجموعة مكونة من 10 أشجار مزروعة.

٤٦- أعطيت ستة فئران جرعة معينة من سم ولوحظ عدد الفئران التي تموت خلال 72 ساعة. فإذا كان احتمال موت كل فأر هو 0.2 .أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الفئران التي تموت خلال 72 ساعة وأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X .

٤٧- إذا كان نسبة الأميين في إحدى القرى هي 33%، فإذا أخذت عينة عشوائية مكونة من 5 أشخاص من أفراد هذه القرية. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأميين في العينة وأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X .

٤٨- درب حيوان على لمس واحدة من رافعتين إذا أمر بذلك. بفرض أن احتمال أن يلمس الرافعة الصحيحة إذا أمر بذلك هو 0.8 أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد مرات لمس الرافعة الصحيحة في محاولات عددها 10 وأوجد المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي الذي حصلت عليه.

٤٩- وجد أن فصيلة دم 40% من سكان مدينة ما تكون من نوع معين. ما احتمال أن يكون ثلاثة فقط من مجموعة مكونة من ثمانية أشخاص تم اختيارهم عشوائيا من سكان هذه المدينة لهم فصيلة الدم هذه؟

٥٠- بالرجوع إلى التاريخ العائلي لزوجين وجد أن احتمال أن يكون أيا من أطفالهم مصابا بعيب خلقي معين 0.05 فإذا كان للزوجين أربعة أطفال أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الأطفال المصابين بتخلف عقلي وأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X.

٥١- إذا كان احتمال ولادة طفل أعسر في بلد ما، هو 0.01 أوجد التوزيع الاحتمالي لعـدد الأطفال الذين لديهم هذه الصفة وأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X.

٥٢- إذا كان احتمال التحاق إحدى الخريجين بالعمل فور تخرجه هو0.75 . فإذا اختيرت عينة عشوائية من 30 فرد من حديثي التخرج. أوجد (ا) احتمال عـدم التحـاق أي شخص بالعمل فور تخرجه (ب) احتمال التحاق أثنين على الأقل بالعمل فور تخرجهم (جـ) العدد المتوقع للأشخاص الذين يلتحقون بالعمل فور تخرجهم.

٥٣- في عملية تصنيع كرات التحميل وجد أن احتمال وجود كرة تالفة 0.1 ما هو احتمال الحصول على 10 كرات تحميل تالفة من عينة عشوائية بها 1000 وحدة؟

٥٤- إذا كانت الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي X علـى الشـكل : $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{t}\right)^{5}$

أوجد $P(X=2 \text{ or } 3)$.

٥٥- إذا كانت الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشـوائي X علـى الشـكل : $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{t}\right)^{9}$

أوجد :

$$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)$$

٥٦- إذا كان $X \sim BIN(n,p)$ أثبت أن :

$$E\left(\frac{X}{n}\right)=p\ ,\ E\left[\left(\frac{X}{n}-p\right)^{2}\right]=\frac{pq}{n}.$$

٥٧- إذا كانت Y تمثل عدد حالات النجاح في n من المحاولات المستقلة باحتمـال نجـاح $p=\frac{2}{3}$. إذا كـانت $n = 3$ أحسـب $P(2 \le Y)$. إذا كـانت $n = 5$ أحسـب $P(3 \le Y)$.

٥٨- إذا كانت Y تمثل عدد حالات النجاح في n من المحاولات المستقلة باحتمال نجاح $p=\frac{1}{4}$. أحسب أصغر قيمة n بحيث أن $P(1 \le Y) \ge .7$.

٥٩- إذا كانت X_1 , X_2 متغيرات عشوائية مستقلة تتبع توزيع ذى الحدين حيث $n_1=3$, $p_1=\frac{2}{3}$ و $n_2=4$, $p_2=\frac{1}{2}$ على التوالى أحسب $P(X_1=X_2)$.

٦٠- إذا كان $X \sim BIN(2, p)$ وإذا كان $Y \sim BIN(a, p)$ وإذا كان $P(X \ge 1) = 5$ أوجد $P(Y \ge 1)$.

٦١- صندوق به 15 ثمرة فاكهة، منها 4 تالفة، أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الثمار التالفة ثم مثل بيانيا الدالة الإحتماليةو n=3

٦٢- يوجد في مكتبة 20 نسخة من كتاب في مقدمة الإحصاء، منهم 12 طبعة أولى و8 طبعة ثانية. فإذا اختيرت عينة عشوائية من الحجم n=5 ، وإذا كانت X تمثل عدد الكتب المختارة من الطبعة الثانية، أوجد $P(X=2)$.

٦٣- صندوق يحتوى على رقائق بالغة الصغر منها 10 جيدة و3 تالفة. فإذا تقرر اختيار عينة عشوائية من ثلاثة رقائق . وإذا كانت X تمثل عدد الوحدات التالفة في العينة المختارة، أوجد $P(X \le 3)$.

٦٤- قام باحث في علم الجيولوجيا بتجميع 10 وحدات من صخور البازلت و 10 وحدات من الجرانيت، فإذا كان للباحث معمل وطلب من مساعده أن يختار عينة عشوائية من15 وحدة للتحليل أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد وحدات البازلت في العينة المختارة (ب) احتمال أن الوحدات المختارة من نفس النوع.

٦٥- إذا كان عدد الجزيئات المشعة من مصدر إشعاعي يتبع توزيع بواسون وإذا كان $P(X=0)=0.3$ فما احتمال إشعاع جزيئين أو اكثر ؟

٦٦- تمر في المتوسط 20 سيارة في الدقيقة من أمام كشك رسوم المرور خلال ساعة الزروة. أوجد احتمال مرور 7 سيارات من أمام الكشك خلال دقيقة مختارة عشوائيا.

٦٧- إذا كانت نسبة المعيب في مصنع مصابيح كهربائية هو 0.1 ، فإذا اخترنا عينة عشوائية من 200 مصباح، أوجد احتمال أن يوجد في هذه العينة مصباحاً واحداً على الأكثر معيب وذلك باستخدام توزيع بواسون كتقريب لذي الحدين.

٦٨- إذا كان متوسط وقوع الزلازل في بلد ما هو 3 في السنة ، أوجد احتمال أن يقع زلزالاً واحداً على الأقل في هذه السنة.

٦٩- إذا كانت متوسط عدد الحوادث الشهرية في إحدى الطرق هو 0.2 . اختير شهرا عشوائيا، أوجد احتمال وقوع حادثتين على الأقل.

٧٠- تقوم إحدى المصانع بإنتاج منتج معين معبأ في أكياس عبوة الكيس الواحد كيلوجرام. فإذا كان احتمال وجود كيس واحد غير مطابق للموصفات هو 0.05 ، فإذا اختير عينة عشوائية من 20 كيس وبافتراض أن X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الأكياس الغير مطابقة في العينة. أوجد (ا) التوزيع الاحتمالي لعدد الأكياس الغير مطابقة للمواصفات في العينة (ب) احتمال وجود كيسين على الأقل غير مطابقين للمواصفات (جـ) احسب العدد المتوقع للأكياس الغير مطابقة للمواصفات.

٧١- في المتوسط يتوقف 7 عملاء للتزود بالوقود عند طلبة بنزين في الساعة. ما هو احتمال (ا) توقف 7 عملاء في الساعة (ب) أربعة عملاء أو أقل في ساعة ما.

٧٢- تشير الدراسات على أن 0.002 من القوى العاملة القومية في بلد ما يصابون بمرض خطير خلال عام. فإذا اختير شخص عشوائيا. أوجد (ا) القيمة المتوقعة لعدد الذين يمرضون في العام (ب) احتمال أن عاملين يمرضون خلال عام .استخدم توزيع بواسون كتقريب ذي الحدين.

٧٣- بفرض أن متغيرا عشوائيا يمثل عدد الجرائم التي تحدث في بلد ما في الفترة ما بين الساعة الواحدة صباحا حتى الساعة الثانية يتبع توزيع بواسون حيث $\mu = 0.2$ (ا) أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X (ب) أوجد $P(X = 0)$.

٧٤- إذا كان عدد التذاكر التي تصرف في موقف للسيارات في الساعة يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\mu = 4$ (ا) ما هو الاحتمال أنه بالضبط تصرف 3 تذاكر خلال ساعة معينة (ب) ما هو الاحتمال أنه على الأقل تصرف 4 خلال ساعة معينة (جـ) ما هو عدد التذاكر المتوقع صرفها خلال 45 دقيقة.

٧٥- تصل طائرة شراعية إلى المطار بمتوسط $\mu = 8$ في الساعة، ما هو الاحتمال (ا) خمسة بالضبط سوف يصلون خلال ساعة (ب) على الأقل خمسة يصلون خلال ساعة (جـ) على الأقل 10 يصلون خلال ساعة (د) ما هي القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الطائرات التي تصل إلى المطار خلال 90 دقيقة(هـ) ما هو الاحتمال أنه على الأقل تصل طائرة خلال 2.5 ساعة ؟

٧٦- في بحث وجد أن شخص واحد من 1000 شخص يحمل جين تالف يؤدى إلى الإصابة بسرطان القولون. اختيرت عينة عشوائية من 15 شخص أوجد (ا) التوزيع التقريبي لعدد الأشخاص الذين يحملون الجين التالف (ب) استخدم هذا التوزيع في حساب الاحتمال التقريبي أن 7 يحملون الجين التالف .

٧٧- قامت شركة لبيع السيارات بإرسال طلب لكل مشتر منها سيارة معينة وذلك لفحصها من العيوب. بفرض أن 0.001 يمثل احتمال وجود عيب في السيارة. إذا اختيرت عينة عشوائية 10000 أوجد (ا) القيمة المتوقعة لعدد السيارات في العينة التي بها هذا العيب (ب) ما هو الاحتمال التقريبي أنه على الأقل 10سيارات بها هذا العيب (جـ) ما هو الاحتمال التقريبي لعدم وجود سيارات في العينة بها عيوب.

٧٨- يستقبل سنترال في المتوسط ثلاث مكالمات في الدقيقة وذلك من أماكن بعيدة والمطلوب (ا) احتمال عدم وصول أي مكالمات في دقيقة واحدة (ب) احتمال وصول مكالمتين في دقيقتين (جـ) احتمال وصول أربع مكالمات في ثلاث دقائق.

٧٩- إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص الذين يصلون إلى نادي رياضي بمتوسط $\mu = 2$ في الدقيقة المطلوب (ا) احتمال وصول شخص واحد في دقيقة واحدة (ب) احتمال وصول 5 أشخاص في ثلاثة دقائق (جـ) احتمال عدم وصول أي شخص في دقيقة واحدة.

٨٠- يستقبل سنترال في المتوسط ثلاثة مكالمات في الدقيقة وذلك من أماكن بعيدة والمطلوب (ا) احتمال عدم وصول أي مكالمات في دقيقة واحدة (ب) احتمال وصول مكالمتين في دقيقتين (جـ) احتمال وصول 4 مكالمات في ثلاث دقائق.

٨١- تقوم ماكينة بتصنيع الأقمشة، فإذا كان في المتوسط يوجد عيب لكل 10 ياردة من القماش أوجد (ا) احتمال عدم وجود عيوب في 2 ياردة من القماش (ب) احتمال وجود عيبين في ياردة من القماش.

٨٢- إذا كان عدد المكالمات التي يتلقاها مركز للشرطة بين 8:30 و8:00 مساء في يوم الجمعة يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\mu = 2$ أوجد (ا) احتمال عدم وصول مكالمتين خلال هذه الفترة (ب) احتمال وصول مكالمتين خلال هذه الفترة (جـ) احتمال وصول ثلاث مكالمات أو أقل خلال هذه الفترة.

٨٣- إذا كانت $x = r$ هو المنوال الوحيد لتوزيع BIN (n, p) أثبت أن :

$(n+1)\,p-1 < r < (n+1)\,p$.

-٨٤- إذا كانت الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي هي $e^{4(e^t - 1)}$ أثبت أن :

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = .93$.

-٨٥- إذا كانت $f(x,\mu)$ هي دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمتوسط $\mu = 100$. استخدم متباينة تشيبشف في تقدير الحد الأدنى للاحتمال $P(75 < X < 125)$.

-٨٦- إذا كانت عدد نقاط الشيكولاتة في نوع عين من الكيك لها توزيع بواسون . المطلوب : احتمال أن الكيكة من هذا النوع تحتوى على الأقل على أثنين من نقاط الشكولاته هو 99. أوجد اقل قيمة يأخذها متوسط هذا التوزيع .

-٨٧- قررت عائلة تنظيم الإنجاب إذا رزقها الله بخمسة ذكور . فإذا كان احتمال ولادة ذكر في هذه العائلة هو 0.4 . أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الحمل (الوضع).

-٨٨- قررت أسرة أن تنظم النسل إذا رزقها الله بثلاثة أطفال من نفس الجنس . بفرض أن احتمال ولادة طفل ذكر تساوى احتمال ولادة طفل أنثى تساوى 0.5 . أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الحمل.

-٨٩- يلعب فريق A مع الفريق B سلسلة من المباريات . فإذا كان احتمال أن A يكسب في المباراة الواحدة التي يلعبها 0.6 وإذا كانت المباريات مستقلة، أوجد احتمال أن الفريق A قد يكون كسب أربعة مباريات في المحاولة السادسة.

-٩٠- أوجد احتمال أن شخص يلقى عملة سوف يحصل على صورة في المحاولة السابعة.

-٩١- احتمال أن طالب يجتاز امتحان للحصول على رخصة قيادة طائرة هـو 0.7 أوجد احتمال أن الشخص ينجح في الامتحان (أ) في المحاولة الثالثة (ب) قبل المحاولة الخامسة.

الفصل السادس

توزيعات متصلة خاصة

Special Continuous Distributions

(٦-١) التوزيع المنتظم Uniform Distribution

بفرض أن X متغيرا عشوائيا متصلا يأخذ قيمه في فترة محدودة ، لتكن الفترة المفتوحة (a, b) ، وبفرض أن دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير هي $f(x) = c$ في الفترة (a, b) . الدالة $f(x)$ لابد أن تحقق الشرط أن $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ وهذا يعني أن :

$1 = \int_a^b c\,dx = c\,x\Big|_a^b = c(b-a)$ وعلى ذلك $c = 1/(b-a)$. بوضع $f(x)=0$ خارج الفترة فإن الخاصية $f(x) \geq 0$ أيضا تتحقق. يسمى هذا التوزيع بالتوزيع المنتظم في الفترة (a, b) بدالة كثافة احتمال على الشكل التالي :

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b$$
$$= 0 \ \text{elsewhere} .$$

سوف نكتب $X \sim UNIF(a, b)$ للدلالة على أن X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع المنتظم . يعطى هذا النموذج احتمال اختيار نقطة عشوائيا في الفترة (a, b). أهم تطبيق لهذا التوزيع هو توليد الأرقام العشوائية باستخدام الحاسب الآلي وتحت فرض أن البيانات التي نحصل عليها مأخوذة من توزيع منتظم $UNIF(0, 1)$. بيان $f(x; a, b)$ موضح في شكل (٣-١) عندما $a = 0$, $b = 5$.

دالة التوزيع للمتغير $X \sim UNIF(a, b)$ تكون على الشكل :

$$F(x; a, b) = 0 \qquad x \leq a$$
$$= \frac{x-a}{b-a} \qquad a < x < b$$
$$= 1 \qquad b \leq x.$$

بيان $F(x; a, b)$ موضح في شكل (٣-١٠) حيث $a = 0$, $b = 6$. يمكن الحصول على المئين ذو الرتبة $(100p)$ وذلك من العلاقة التالية :

$$F(x_p; a, b) = \frac{x_p - a}{b-a} = p.$$

أي أن :

$$x_p = a + (b-a)\,p .$$

هذا التوزيع ليس له منوال .

مثال (٦-١) تغادر القطارات إحدى المحطات فيما بين الساعة السابعة والثامنة صباحا بعند مرور ... ,20 ,18 ,15 ,13 ,10 ,8 ,5 ,3 من الدقائق بعد الساعة السابعة . ما هو احتمال أن شخصا يصل إلى المحطة يجب عليه أن ينتظر القطار لمدة أقل من دقيقة وذلك تحت فرض أن زمن وصول الشخص إلى المحطة يتبع التوزيع المنتظم أي أن :

(أ) $X \sim UNIF(7, 8)$

(ب) $X \sim UNIF(7{:}15\ ,\ 7{:}30)$

(ج) $X \sim UNIF(7{:}02\ ,\ 7{:}15)$

(د) $X \sim UNIF(7{:}03\ ,\ 7{:}15)$

(هـ) $X \sim UNIF(7{:}04\ ,\ 7{:}15)$

الحل : المطلوب إيجاد فئة الأعداد الحقيقية والتى لابد أن يقع فيها وصول الشخص لكى يكون زمن انتظاره أقل من دقيقة . الفئة E هي فئة الأعداد الحقيقية التي تتكون من الفترات $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(7, 8)$, $(9, 10)$ ... $(59, 60)$. أي أن احتمال أن ينتظر الشخص مدة أقل من دقيقة هو $P(E)$ ويحسب كالتالي :

(أ) $$P(E) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

والذي يقابل الفترة من 7 إلى 8 صباحا .

(ب) $$P(E) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

والذي يقابل الفترة من 15 : 7 إلى 30 : 7 صباحا .

(ج) $$P(E) = \frac{6}{13}$$

والذي يقابل الفترة من 02 :7 إلى 15 :7 صباحا .

(د) $$P(E) = \frac{5}{12}$$

والذي يقابل الفترة من 03 :7 إلى 15 :7 صباحا .

(هـ) $$P(E) = \frac{5}{11}$$

والذي يقابل الفترة من 04 :7 إلى 15 :7 صباحا .

مثال (٦-٢) إذا كان الزمن الذى يستغرقه شخص للذهاب من منزله إلى محطة القطار يتبع التوزيع المنتظم بين 15 , 20 دقيقة . فإذا كان الشخص يغادر منزله عند الساعة 7:30

حتى يلحق القطار والذى يغادر المحطة عند الساعة 7: 48 . المطلوب حساب احتمـــال أن يلحق الرجل القطار .

الحل : بفرض أن X متغيراً عشوائياً متصلاً يتبع التوزيع المنتظم في الفترة [15, 20] . المطلوب حساب الاحتمال $P(15 \le X \le 18)$ وذلك لأن القطار يغادر المحطة بعد 18 دقيقة من مغادرة الشخص لمنزله . بما أن $b - a = 20 - 15 = 5$ وعلى ذلك :

$$P(15 \le X \le 18) = \int_{15}^{18} \frac{1}{5}\, dx$$

$$= \frac{x}{5}\Big|_{15}^{18} = \frac{3}{5}.$$

مثال (٦-٣) بفرض أن القيمة g في المعادلة التربيعية $x^2 + g\,x + g$ متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم في الفترة [0, 6] . المطلوب حساب احتمال الدالة التربيعية التى لها جـــذور حقيقية . الآن الدالة التربيعية $a\,x^2 + b\,x + c$ يكون لها جذور عندما $b^2 - 4\ a\,c \ge 0$. في حالتنا ، لابد أن $g^2 - 4\,g \ge 0$. وحيث أن g تختار من الفترة [0, 6] فهذا يكـافئ أن $g - 4 \ge 0$ أو $4 \le g \le 6$. الآن فإن g متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم في الفـترة [0 , 6] . وحيث أن الفترة طولها 6 فإن :

$$P(4 \le g \le 6) = \int_{4}^{6} \frac{1}{6}\, dx = \frac{x}{6}\Big|_{4}^{6} = \frac{1}{3}.$$

مثال (٦-٤) إذا اختير عدد على الفترة (1, 0) باستخدام الحاسب الآلي وبطريقة عشوائية بيتبع التوزيع المنتظم $X \sim UNIF\ (0, 1)$. ما هو الاحتمال أن يكــون المكــان العشــرى الثانى للجذر التربيعى لهذا العدد هو الرقم 3 ؟

الحل : إذا كان $X \sim UNIF\ (0, 1)$ فإن أي قيمة للمتغير X تقع فـــي أي مــن الفــترات المانعة الآتية تحقق المطلوب :

$$.03 \le \sqrt{x} < .04$$
$$.13 \le \sqrt{x} < .14$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$.93 \le \sqrt{x} < .94$$

بفرض أن B_k هي فئة الأعداد في فترة (0, 1) التى يكون المكان العشرى الثانى لجذرها التربيعى هو الرقم k حيث $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ فإن أي قيمة للمتغير X تقع في B_k إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{m}{10} + \frac{k}{100} \le \sqrt{x} < \frac{m}{10} + \frac{k+1}{100}.$$

حيث $m = 0, 1, 2, \dots, 9$ المكان العشرى الأول . أي تحقق :

$$\frac{1}{100}(m + \frac{k}{10})^2 \le x < \frac{1}{100}(m + \frac{k+1}{10})^2$$

نعلم أن احتمال أن تقع X في الفترة يساوي طول الفترة ،أي يساوى :

$$\frac{1}{100}(m + \frac{k+1}{10})^2 - \frac{1}{100}(m + \frac{k}{10})^2$$
$$= \frac{1}{10000}(20m + 2k + 1)$$

وبما أن هذه الفترات مانعة فإن احتمال الفئة B_k هو :

$$P(B_k) = \frac{1}{10000} \sum_{m=0}^{9} (20m + 2k + 1) = .091 + .002k.$$

وخصوصا :

$$P(B_3) = .097 \ .$$

مثال (٦-٥) قام باحث في مجال علم الأحياء بوضع مجموعة من الحمام في غرفة مظلمة لعدة أيام ثم بعد ذلك تم إطلاقهم في الضوء . فإذا كان اتجاه الطيران للطائر يتبع التوزيع المنتظم حيث $X \sim [\,0, 360\,]$. أوجد $P(210 \le X \le 220)$.

الحل : تحت فرض أن $X \sim UNIF\ (0, 360)$ فإن :

$$P(210 \le X \le 220) = F(220) - F(210)$$
$$= \frac{220-0}{360-0} - \frac{210-0}{360-0}$$
$$= \frac{1}{36} .$$

المتوسط والتبايـــــن :

إذا كان $X \sim UNIF\ (a, b)$ فإن :

$$\mu = E(X) = \int_a^b x \left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$
$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$
$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b^2 + ab + a^2)(b-a)}{3(b-a)}$$
$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} .$$

وعلى ذلك :

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$
$$= \frac{(b-a)^2}{12} .$$

وعلى ذلك يمكننا استنتاج أن متوسط التوزيع هو نقطة الوسط والتباين يتناسـب مـع طـول الفترة (a, b) . على سبيل المثال إذا كانت قراءة درجة الحرارة (مقاس بالفهرنهيت) عنـد نقطة زمنية مختارة عشوائية في موقع ما يتبع (50 , 90) $X \sim UNIF$ وإذا كانت القـراءة في موقع آخر يتبع $Y \sim UNIF\ (30, 110)$. المتوسط للمتغـيرين X , Y واحـد حيـث $\mu_X = \mu_Y = 70$ بينما $\sigma_X^2 = 400/3$ أصغر من $\sigma_Y^2 = 1600/3$.

الدالـــة المولــدة للعـــزوم :

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}\,dx = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

$$= \frac{\left[1 + \frac{tb}{1!} + \frac{(tb)^2}{2!} + \ldots - 1 - \frac{ta}{1!} - \frac{(ta)^2}{2!} - \ldots\right]}{t\,(b-a)}.$$

$$= \frac{\left[(b-a) + \frac{t}{2!}(b^2 - a^2) + \frac{t^2}{3!}(b^3 - a^3) + \frac{t^3}{4!}(b^4 - a^4) + \ldots\right]}{(b-a)}$$

وعلى ذلك :

$$\mu_1' = \frac{b+a}{2} \quad , \quad \mu_2' = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \; ,$$

$$\mu_3' = \frac{b^4 - a^4}{4(b-a)} \quad , \quad \mu_4' = \frac{b^5 - a^5}{5(b-a)}$$

الدالة المولدة التراكميـــة :

$$\Psi_X(t) = \ln\left(1 + \frac{(\frac{t}{1!})(b^2 - a^2)}{2(b-a)} + \frac{(\frac{t^2}{2!})(b^3 - a^3)}{3(b-a)} + \ldots\right)$$

وعلى ذلك :

$$k_1 = \frac{a+b}{2} \quad , \quad k_2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$k_3 = 0 \quad , \quad k_4 = \frac{(b-a)^4}{120},$$

$$\alpha_3 = 0 \quad , \quad \alpha_4 = \frac{-5}{6}\;.$$

(٦-٢) توزيع جاما Gamma Distribution

يعتبر توزيع جاما واحد من التوزيعات المتصلة الشائعة الاستخدام في التطبيق، فكثير من المتغيرات العشوائية تتبع توزيع جاما مثل زمن الخدمة في مركز للبيع أو الزمن اللازم لإعادة تجديد السيارة . لقد أشتق اسم التوزيع من علاقته بدالة تسمى دالة جاما gamma function .

تعريف : دالة جاما ويرمز لها بالرمز $\Gamma(k)$ ، لأي $k > 0$ تعطى كالتالى :

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1}\, \bar{e}^{t}\, dt .$$

على سبيل المثال عندما $k = 1$ فإن $\Gamma(1) = \int_0^\infty \bar{e}^{t}\, dt = 1$. لدالة جاما خصائص مفيدة توضحها النظرية التالية :

نظرية (٦-١) تحقق دالة جاما الخصائص الآتية :

$$\Gamma(k) = (k-1)\,\Gamma(k-1) \qquad k > 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} .$$

يقال للمتغير العشوائي X أنه يتبع توزيع جاما بمعلمتين $k > 0$, $\theta > 0$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الشكل :

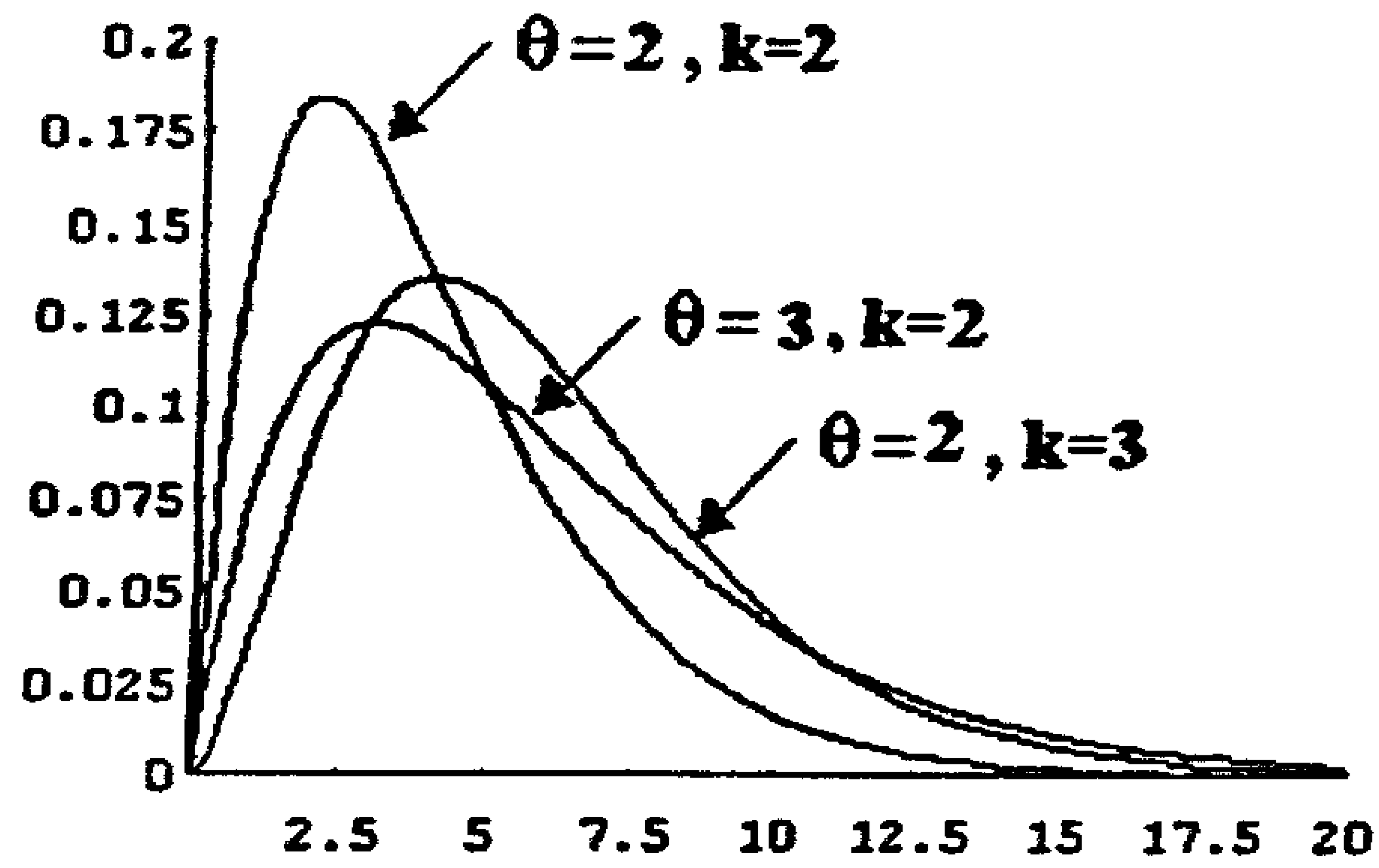
$$f(x;\theta,k) = \frac{1}{\theta^k\,\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, \bar{e}^{x/\theta} \quad x > 0$$

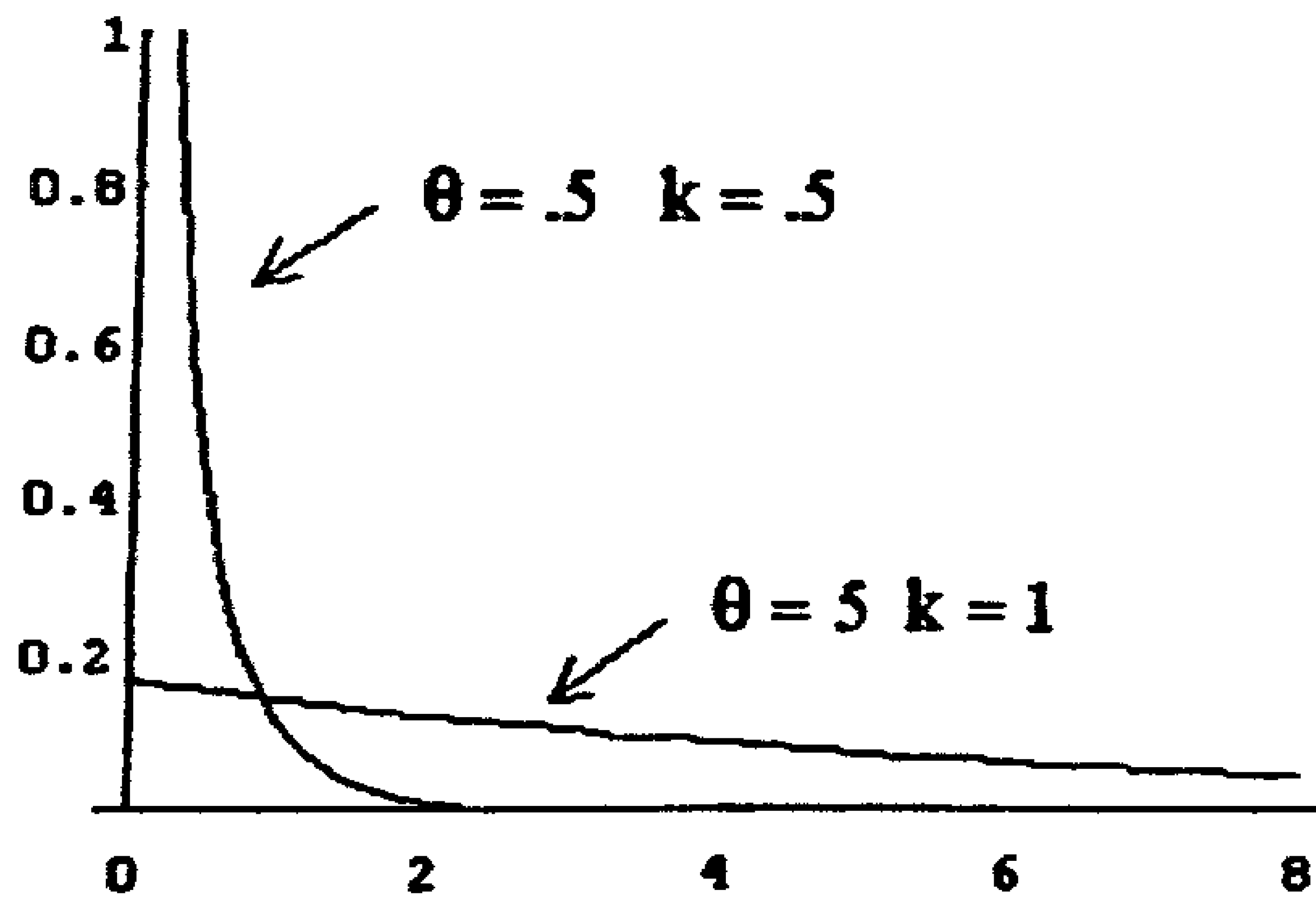
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

تحقق الدالة $f(x;\theta,k)$ شرطي دالة كثافة الاحتمال حيث $f(x;\theta,k) \ge 0$ وبوضع $t = x/\theta$ في التكامل $\int_0^\infty f(x;\theta,k)\,dx$ نحصل على $\Gamma(k)/\Gamma(k) = 1$. سوف نكتب $X \sim GAM(\theta,k)$ للدلالة على أن X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال $f(x;\theta,k)$.

يوجد ثلاث أشكال أساسية للدالة $f(x;\theta,k)$ تعتمد على ما إذا $k<1$ أو $k=1$ أو $k>1$. أشكال مختلفة للدالة $f(x;\theta,k)$ موضحة في شكل (٦-١) و (٦-٢) وذلك لقيم مختلفة من k,θ .

شكل (٦-١)





شكل (٦-٢)

عندما $k=1$ فإن $f(0,\theta,1)=1/\theta$ وعندما $k>1$ فإن $f(0;\theta,k)=0$. وعندما $k<1$ فإن المحور الراسي يحاذى $y=f(x;\theta,k)$.

دالة التوزيع للمتغير $X \sim GAM(\theta, k)$ هي :

$$F(x;\theta,k)=\int_0^x \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\frac{t}{\theta}} dt.$$

بوضع $u = t/\theta$ في التكامل فإن $F(x;\theta,k)=F(\frac{x}{\theta};1,k)$ حيث $F(.,k)$ تسمى دالة جاما الناقصة incomplete gamma function والتى تعتمد على θ فقط (معلمة القيـاس) وذلك من خلال المتغير x / θ . عادة ، يكون من الضرورى وجود θ في النموذج حتـى لا تعتمد النتائج على وحدة القياس المستخدمة . على سبيل المثال إذا كـان X يمثـل الزمـن بالأشهر حيث $X \sim GAM(\theta, k)$ و $\theta = 12$ وعلى ذلك :

$$P(X \leq 24 \text{ شهر}) = F(24/12\,;1,k) = F(2;1,k).$$

بفرض أن Y متغيرا عشوائيا مقاس قيمة بالأسـبوع فـإن $Y \sim GAM(48, k)$ حيـث $\theta = 4.12 = 48$. على سبيل المثال :

$$\begin{aligned} P(X \leq 24 \text{ شهر}) &= P(Y \leq 96 \text{ أسبوع}) \\ &= F(96/48\,;1,k) \\ &= F(2;1,k) \end{aligned}$$

أي نفس النتيجة السابقة .

عموما دالة التوزيع للمتغير X حيث $X \sim GAM(\theta, k)$ لا يمكن وضعها في شـكل صيغة ولكن إذا كانت k عدد صحيح موجب فإن التكامل يمكن التعبير عنه كمجموع .

نظرية (٦-٢)

$$F(x;\theta,k)=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(x/\theta)^i}{i!}\bar{e}^{x/\theta}.$$

البرهان :

$$F(x;\theta,k)=\int_0^{\frac{x}{\theta}}\frac{u^{k-1}\bar{e}^{u}\,du}{\Gamma(k)}$$

$$=\left.\frac{-u^{k-1}\bar{e}^{u}}{\Gamma(k)}\right|_0^{\frac{x}{\theta}}$$

$$+\int_0^{\frac{x}{\theta}} \frac{(k-1)\,u^{k-2}\,\bar{e}^{u}\;du}{\Gamma(k)}$$

$$=\frac{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{k-1}\bar{e}^{x/\theta}}{(k-1)!}+\int_0^{\frac{x}{\theta}} \frac{u^{k-2}\,\bar{e}^{u}\;du}{\Gamma(k-1)}.$$

وذلك بإجراء التكامل الجزئى واستخدام الحقيقـة أن $\Gamma(k)=(k-1)\,\Gamma(k-1)=(k-1)!$

وباستمرار التكامل بالتجزئة (k-1) من المرات نحصل على :

$$F(x;\theta,k)=-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{i}\bar{e}^{x/\theta}}{i!}+\int_0^{\frac{x}{\theta}}\frac{\bar{e}^{u}\;du}{\Gamma(1)}$$

$$=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{i}\bar{e}^{x/\theta}}{i!}.$$

يلاحظ أن الحدود في المجموع تقابل الحدود في توزيع بواسون حيث $\mu=x/\theta$.

مثال (٦-٦) إذا كانت كمية الترسيب في نهر (مقاس بالبوصة) تمثل متغيرا عشوائيا حيـث $X \sim GAM(.2, 6)$.

المطلوب : $P(X > 2)$

الحل :

$$P(X>2)=\int_2^{\infty}\frac{1}{(.2)^6\;\Gamma(6)}\;x^{6-1}\;\bar{e}^{(x/.2)}\,dx$$

$$=1-F(2;\;.2,\;6)$$

$$=\sum_{i=0}^{5}\frac{10^{i}}{i!}\;\bar{e}^{10}\;=0.067\;.$$

والتي يمكن حسابها من جدول توزيع بواسون عند $\mu=10$.

هناك جداول في ملحق (٥) لحساب $F(x;k)$ حيث :

$$k=1\,(1)\,5\,,x=.2(.2)8.0(.5)15.\quad,\;\;\theta=1,$$
$$k=6(1)10,x=1(.2)8.0\;(.5)17.$$

مثال (٦-٧) إذا كان زمن التفاعل يمثل متغيرا عشوائيا حيث $X \sim GAM(1, 2)$ أوجد :

(أ) $P(3 \le X \le 5)$

(ب) $P(X > 4)$

الحل :

الاحتمالات في (أ) و (ب) يمكن إيجادها باستخدام الجدول في ملحق (٥) كالتالي :

(أ)

$$P(3 \le X \le 5) = F(5,2) - F(3,2) = .95957 - .80085 = .15872.$$

(ب)

$$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4;2) = 1 - .90842 = .09158.$$

مثال (٦-٨) إذا كان زمن البقاء (مقاس بالأسبوع) لذكر الفأر المعالج بأشعة جاما يتبع المتغير العشوائي X حيث $X \sim GAM(15, 8)$

(أ) أوجد الاحتمال أن الفأر سوف يبقى على قيد الحياة بين 60 , 120 أسبوع .

(ب) على الأقل 30 أسبوعا .

الحل :

الاحتمالات في (أ) و (ب) يمكن إيجادها باستخدام الجدول في ملحق (٥) كالتالي :

(أ)

$$\begin{aligned} P(60 \le X \le 120) &= P(X \le 120) - P(X \le 60) \\ &= F(120/15;8) - F(60/15;8) \\ &= F(8;8) - F(4;8) \\ &= .54704 - .05113 = .49591. \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} P(X \ge 30) &= 1 - P(X < 30) \\ &= 1 - P(X \le 30) \\ &= 1 - F(30/15;8) \\ &= 1 - F(2;8) \\ &= 1 - .0011 = .9989. \end{aligned}$$

مثال (٦-٩) يتكون نظام من ثلاثة مكونات فإذا كان X يمثل الزمن (مقاس بالأيام) حتـــى يفشل النظـــام وإذا كـــان X يتبـــع توزيـــع جامـــا بمعلمـــة $\theta=1$, $k=3$ ، المطلـــوب حساب $P(X \geq 3)$.

الحل :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(0 \leq X \leq 3)$$

$$= 1 - \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^3 x^2 \, \bar{e}^{x} \, dx$$

$$= 1 - \left(-\bar{e}^{x} \left(\frac{2 + 2x + x^2}{2} \right) \right) \Big|_0^3$$

$$= 1 - \left\{ \left(\frac{-8.5}{e^3} \right) + 1 \right\}$$

$$= .423 .$$

<u>المتوســـط والتبايـــــن :</u>

متوسط المتغير X حيث $X \sim GAM(\theta, k)$ يمكن إيجاده كالتالي :

$$E(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} \, \bar{e}^{x/\theta} \, dx$$

$$= \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} \int_0^\infty x^{(1+k)-1} \, \bar{e}^{x/\theta} \, dx$$

$$= \frac{\theta^{1+k} \Gamma(1+k)}{\theta^k \Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{1+k} \Gamma(1+k)} x^{(1+k)-1} \, \bar{e}^{x/\theta} \, dx$$

$$= \frac{\theta^{1+k} \Gamma(1+k)}{\theta^k \Gamma(k)} = \theta k \, \Gamma k / \Gamma k = \theta k.$$

بنفس الشكل $E(X^2) = \theta^2 k(1+k)$ وعلى ذلك التباين هو:

$$Var(X) = \theta^2 k(1+k) - (k\theta)^2 = k\theta^2$$

في المثال (٦-٦) ،فإن كمية الترسيب اليومية تتبع توزيع جاما بمتوسط 1.2 بوصة وتباين 0.24 .

مثال (٦-١٠) إذا كان الدخل للأسرة الواحدة في بلد ما يتبع توزيع جاما حيث $X \sim GAM(\frac{1}{2},2)$ (مقاس 10000 $). أوجد $P(X > 20000)$.

الحل : بما أن متوسط الدخل للأسرة الواحدة في البلد المعني هو $1 = 2.\frac{1}{2} = (k\theta)$ (مقاس 10000 $). وعلى ذلك إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل الدخل ، بوحدات 1000 $ ، لأسرة مختارة فإنه بدلا من حساب $P(X > 20000)$ يتم حساب $P(X > 2)$ كالتالي :

$$P(X>2)=\frac{1}{(\frac{1}{2})^2\Gamma(2)}\int_2^\infty x^{2-1}\,\bar{e}^{2x}dx$$

$$=4\int_2^\infty x\,\bar{e}^{2x}\,dx$$

$$=4\left(-\frac{x}{2}\,\bar{e}^{2x}\right)\Big|_2^\infty+2\int_2^\infty \bar{e}^{2x}\,dx$$

$$=(-2.\,\bar{e}^{2x}-\bar{e}^{2x})\Big|_2^\infty$$

$$=-(2x+1)\,\bar{e}^{2x}\Big|_2^\infty$$

$$=5\,\bar{e}^{4}=.0916.$$

العزوم حول الصفر :

يمكن الحصول على العزم من الدرجة r حول الصفر من الدالة المولدة للعزوم حيث :

$$M_X(t)=\int_0^\infty e^{tx}\frac{x^{k-1}\,\bar{e}^{x/\theta}}{\theta^k\,\Gamma(k)}\,dx$$

$$=\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\int_0^\infty x^{k-1}\,e^{(t-1/\theta)x}\,dx$$

بوضع $u=-(t-1/\theta)x$ فإن :

$$M_X(t)=\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^{-k}\frac{1}{\theta^k\ \Gamma(k)}\int_0^\infty u^{k-1}\,\bar{e}^{u}\,du$$

أي أن :

$$M_X(t)=(1-\theta t)^{-k} \qquad t<1/\theta$$

المشتقة من الدرجة r ، في هذه الحالة ، هي :

$$M_X^{(r)}(t)=(k+r-1)\ldots(k+1)k\,\theta^r\,(1-\theta t)^{-k-r}$$
$$=\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k)}\,\theta^r\,(1-\theta t)^{-k-r}$$

وعلى ذلك : $M_X^{(r)}(0)$ تعطى العزم من الدرجة r حول الصفر حيث :

$$E(X^r)=\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k)}\,\theta^r .$$

يمكن وضع الدالة المولدة للعزم على صورة مسلسلة كالتالى :

$$M_X(t)=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k)}\frac{\theta^r}{r!}\,t^r$$

عندما $\theta=2$, $k=\nu/2$ نحصل على صورة خاصة لتوزيع جاما تسمى توزيع مربع كاي *chi – square distribution* بمعلمة ν تسمى درجات الحرية . توزيع مربع كاي سوف نناقشه بالتفصيل في البند (٦-٣) . عندما $k=1$ نحصل على حالة خاصة تسمى التوزيع الأسى exponential distribution والذى سوف نناقشه بالتفصيل في البند (٦-٤) .

<u>الدالة المميزة :</u>

الدالة المميزة لتوزيع جاما يمكن اشتقاقها كالتالى :

$$\phi_X(t)=E(e^{itx})=\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\int_0^\infty e^{itx}\ x^{k-1}\ \bar{e}^{x/\theta}\,dx$$

$$=\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\int_0^\infty x^{k-1}\ \bar{e}^{\frac{x}{\theta}(1-it\theta)}\,dx.$$

بوضع $u=\frac{x}{\theta}(1-it\theta)$ نحصل على $\phi_X(t)$ كالتالي:

$$\phi_X(t)=(1-it\theta)^{-k}$$

كما يمكن أن نكتبها بالشكل التفصيلى التالى :

$$\phi_X(t) = 1 + \frac{\theta k i t}{1!} + \frac{\theta^2 k(k+1)(it)^2}{2!} + \frac{\theta^3 k(k+1)(k+2)(it)^3}{3!} + \dots$$

وعلى ذلك :

$$\mu'_r = \frac{\theta^r \Gamma(k+r)}{\Gamma(k)} \quad r = 1, 2, \dots$$

حيث :

$$\mu'_1 = \theta k = \mu$$
$$\mu'_2 = \theta^2 k(k+1)$$
$$\mu'_3 = \theta^3 k(k+1)(k+2)$$
$$\mu'_4 = \theta^4 k(k+1)(k+2)(k+3).$$

(٦-٣) توزيع مربع كاي The chi – square Distribution

كما سبق أن ذكرنا يعتبر توزيع مربع كاي حالة خاصة من توزيع جاما ويلعب دور هـام في الإحصاء . ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع جاما بمعلمة $k = \nu/2 \ , \ \theta = 2$ حيث ν عدد صحيح موجب يسمى درجات الحرية . دالة كثافة الاحتمال للمتغير X هي :

$$f(x;\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2) 2^{\nu/2}} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} \qquad 0 \le x < \infty .$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

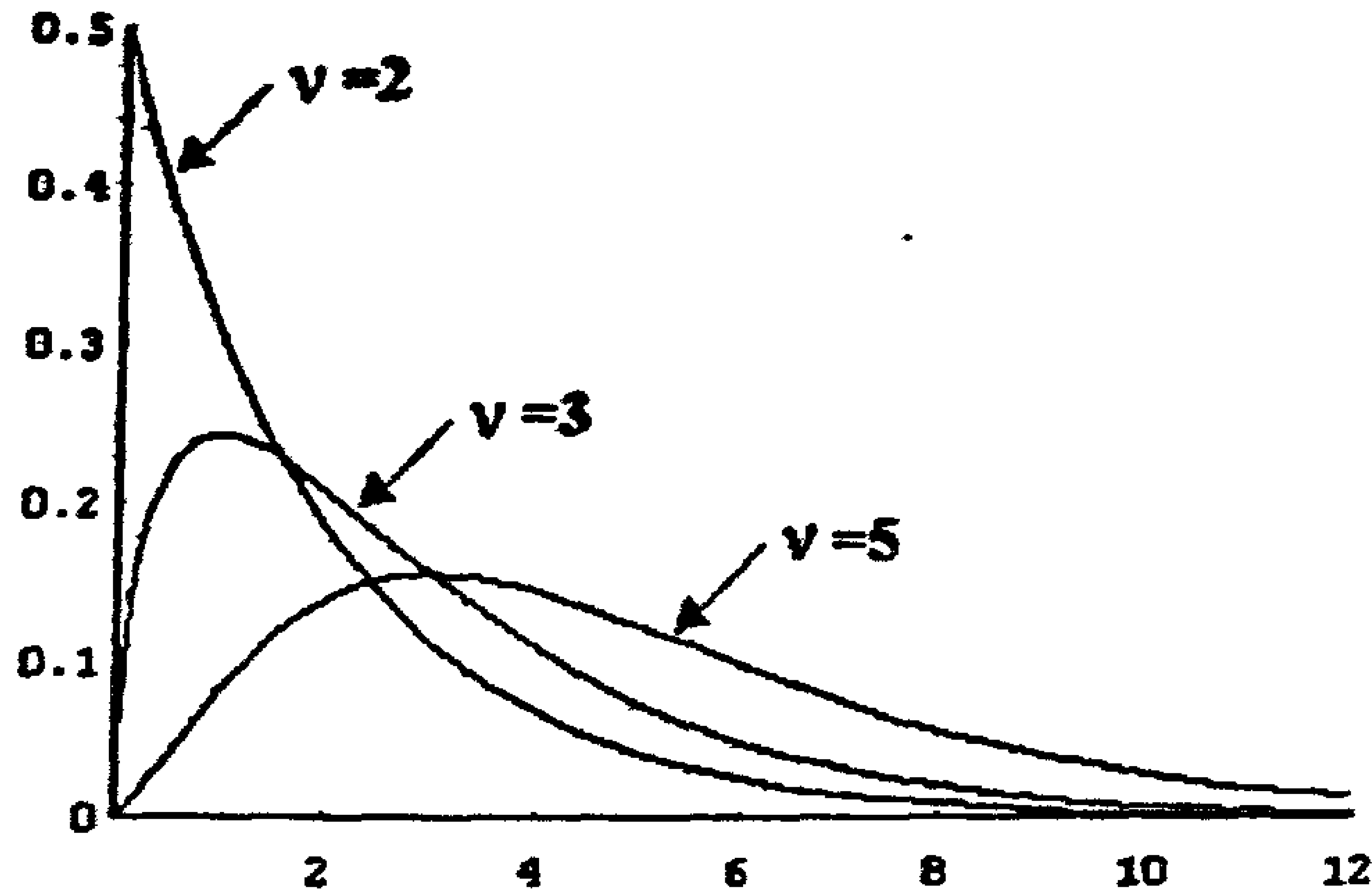
يستخدم الرمز $\chi^2(\nu)$ للدلالة على أن x يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية ν. المتوسـط والتباين لتوزيع مربع كاي بدرجات حرية ν هما :

$$\mu = k\theta = \nu \quad , \quad \sigma^2 = k\theta^2 = 2\nu .$$

وهذا يعني أن المتوسط يساوى عدد درجات الحرية ، والتباين يساوى ضعف عـــدد درجـات الحرية . من النتائج التي تم الحصول عليها من توزيع جاما ، فإنه يمكـــن القـول أن الدالـة المولدة للعزوم لتوزيع $\chi^2(\nu)$ هي :

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\nu/2} \qquad t < \frac{1}{2}.$$

يعطي شكل (٦-٣) ثلاث منحنيات لتوزيع $\chi^2(v)$ عند $v = 2,3,5$.



شكل (٦-٣)

دالة التوزيع لمتغير عشوائي X يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية v تكـون على الشكل :

$$F(x;v) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(v/2)2^{v/2}} w^{v/2-1} e^{-w/2} dw .$$

والتي لا يمكن وضعها في شكل صيغة.

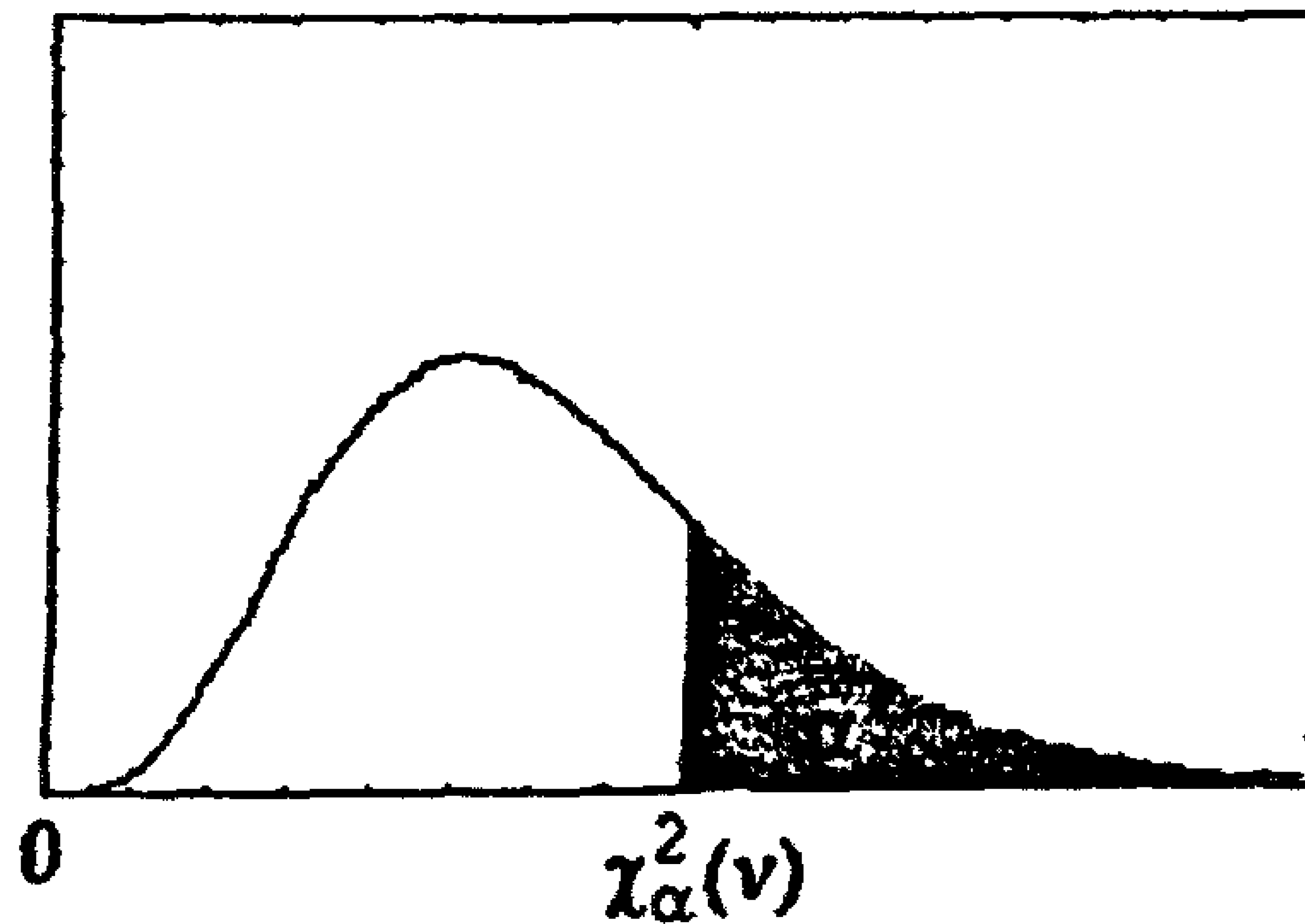
بفرض أن α احتمال موجب وإذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع مربع كـاي بدرجات حرية v فإن $\chi^2_\alpha(v)$ هو العدد بحيث أن :

$$P(X \geq \chi^2_\alpha(v)) = \alpha .$$

أي أن $\chi^2_\alpha(v)$ هو المئين ذو الرتبة $100(1-\alpha)$ كما هو موضح في شكل (٦-٤).

ولأن توزيع مربع كاي ذات أهمية كبيرة في التطبيقات فإن هناك جداول لإيجاد قيمـة

شكل (٦-٤)



$\chi^2_\alpha(v)$. الجدول في ملحق (٦) يعطى قيم $\chi^2_\alpha(v)$ وذلك لقيم مختلفة من α و v حيث α تأخذ القيم :

.995 , .99, .975, .95, .90, .10, .05, 0.025, .01, .005

ودرجات حرية من $v = 1$ إلى $v = 40$. يوضح الصف الثاني من الجدول قيم α والعمود الأول من الشمال قيم درجات الحرية أما محتويات الجدول فهي لقيم $\chi^2_\alpha(v)$. وعلى ذلك للحصول على القيمة $\chi^2_\alpha(6)$ والتي تكون المساحة على يمينها تساوى .05 فإننا نبحث في الجدول عند تقاطع الصف الذي به $v = 6$ مع العمود .05. وعلى ذلك $\chi^2_{.05}(6) = 12.592$. ولعدم تماثل منحنى توزيع مربع كاي فلا بد من استخدام الجدول لإيجاد $\chi^2_{.95}(6) = 1.635$.

مثال (٦ - ١١) أوجد القيمة $\chi^2_{.01}(14)$ لتوزيع مربع كاي .

الحل :

بالبحث في جدول توزيع مربع كاي في ملحق (٦) عند تقاطع الصف $v = 14$ مع العمود $\alpha = 0.01$ نجد أن $\chi^2_{01}(14) = 29.141$.

مثال (٦-١٢) إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية v. أوجد قيمة $\chi^2_\alpha(4)$ التي تكون المساحة على يسارها تساوى 0.99 .

الحل .

القيمة $\chi^2_\alpha(4)$ تكون المساحة على يسارها تساوي .99. وتكون المساحة على يمينها تساوى .01 = .99 -1 وعلى ذلك فإن القيمة $\chi^2_{01}(4)$ هي تلك القيمة في جدول توزيع مربع كاي التي تقع عند تقاطع الصف $v = 4$ والعمود $\alpha = .01$ وهي $\chi^2_{.01}(4) = 13.277$.

مثال (٦- ١٣) إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية $v = 15$ وكان a , b ثابتان بحيث أن $P(a < X < b) = 0.99$ أوجد القيمتين a b على أن تكون المساحة في طرفي التوزيع متساوية.

الحل .

المطلوب هنا هو إيجاد القيمتين a ,b اللتين تقسمان المنحنى بحيث أن المساحة في الطرف الأيمن هي .005. وعلى ذلك القيمة b هي $\chi^2_{.005}(15) = 32.799$. القيمة

$\chi^2_{.995}(15)$ تقع في الطرف الأيسر وتكون المساحة على يسارها هي 0.005 وبالتالي فإن المساحة التي تقع على يمينها هي 995. = 005.-1 وعلى ذلك فإن القيمة a هي $\chi^2_{.995}(15) = 4.600$.

مثال (٦-١٤) إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع $\chi^2(5)$. استخدم جدول توزيع مربع كاي في ملحق (٦) لإيجاد :

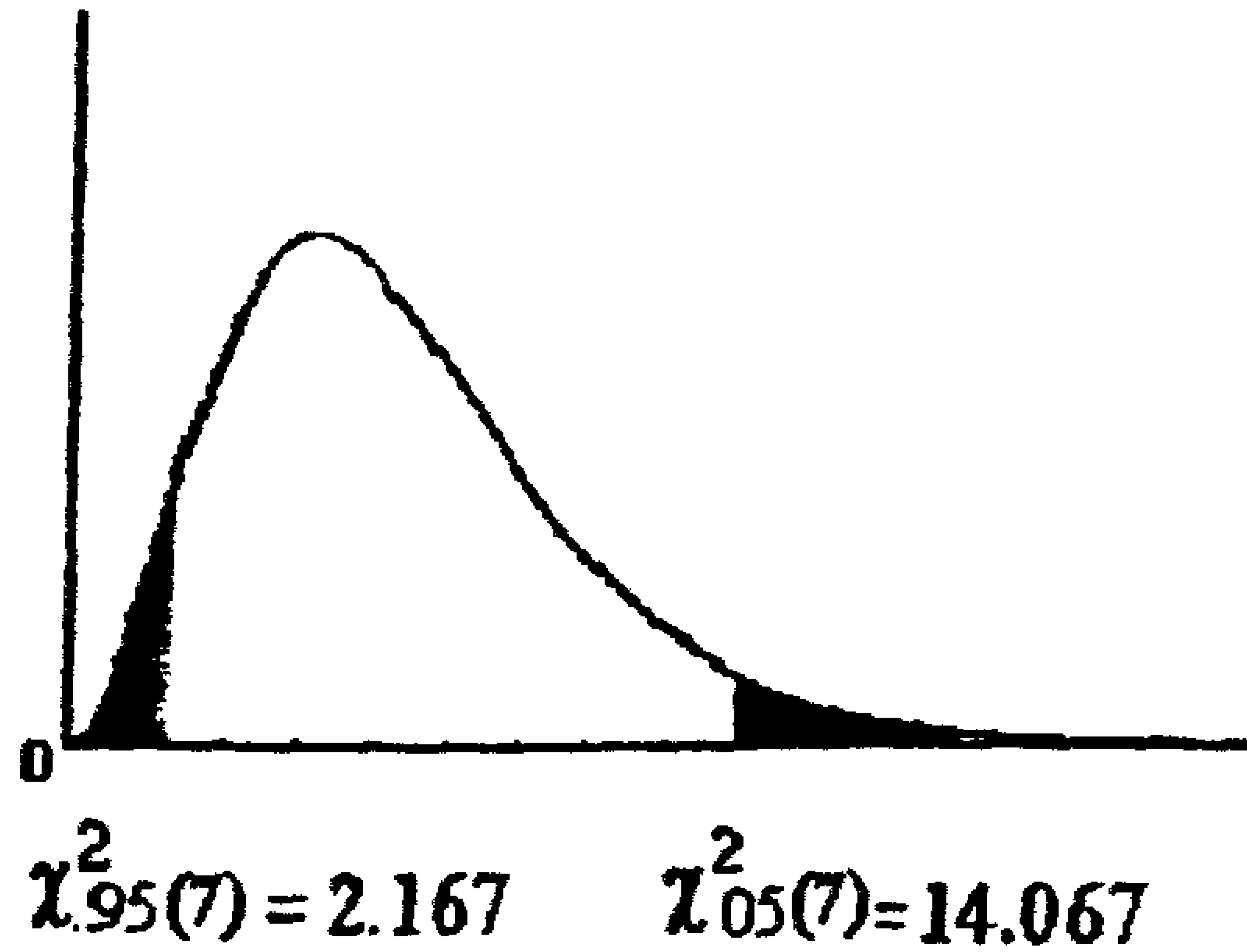
(أ) $P(1.145 < X < 12.832)$

الحل :

(أ) من جدول توزيع مربع كاي في ملحق (٦) فإن :

$$\chi^2_{.95}(5) = 1.145 \ , \ \chi^2_{.025}(5) = 12.832$$
$$P(X \le 1.145) = .05$$
$$P(X \ge 12.832) = .025$$
$$P(1.145 < X < 12.823) = 1 - .05 - .025 = .925.$$

مثال (٦-١٥) إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية $v = 7$. استخدم جدول توزيع مربع كاي في ملحق (٦) لإيجاد : $\chi^2_{.05}(7) = 14.067 \ , \ \chi^2_{0.95}(7) = 2.167$.النقطتان موضحتان في شكل (٦-٥) .



شكل (٦-٥)

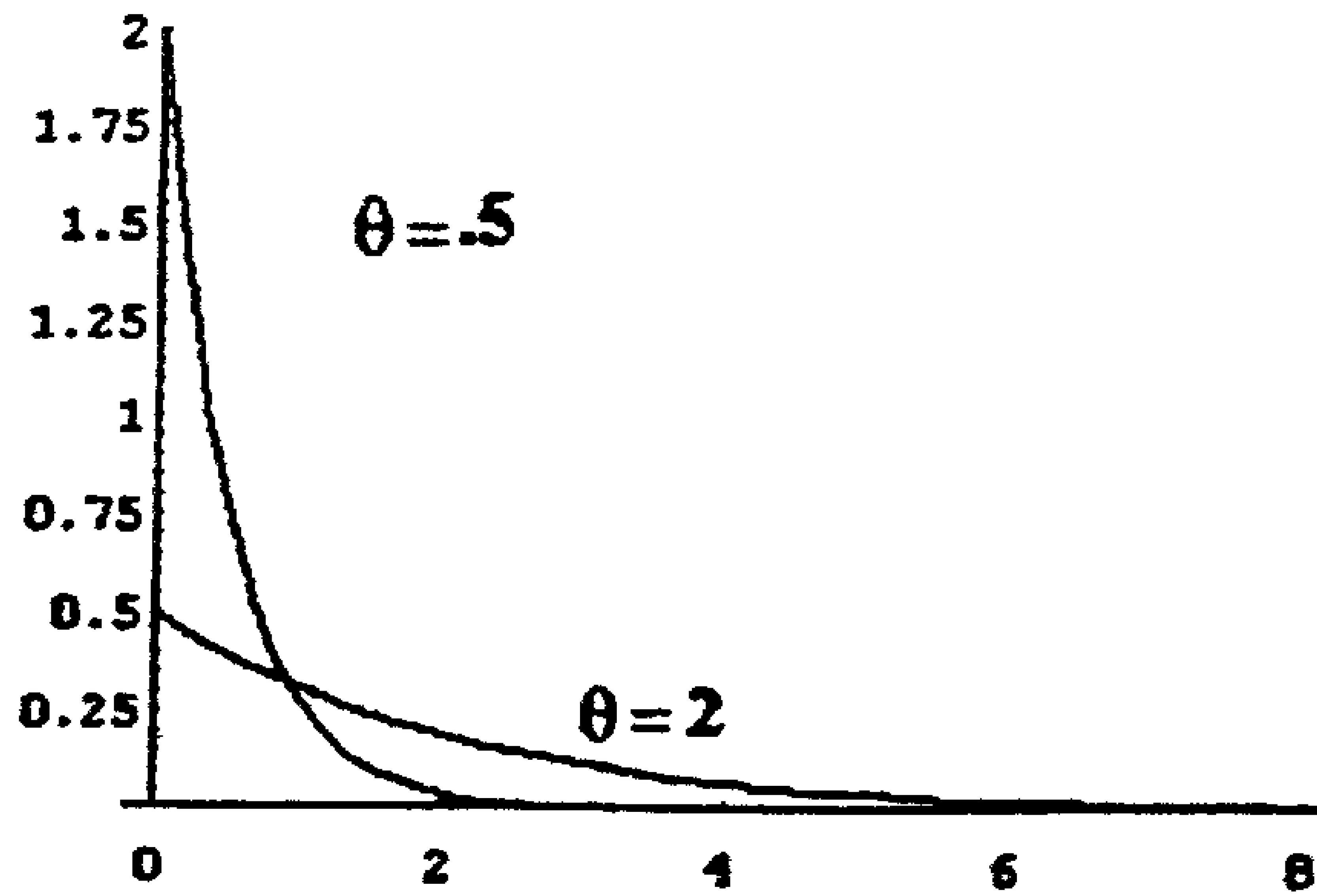
(٦-٤) التوزيع الأسى The Exponential Distribution

تعطى عائلة التوزيعات الأسية نماذج احتمالية مفيدة في مجال الهندسة والعلوم حيث تصف كثير من الظواهر مثل أعمار بعض السلع الكهربائية ، الوقت اللازم حتى تتعطل بعض الأنظمة الإلكترونية – وقت الانتظار لوقوع حادثة ما .

يقال للمتغير العشوائى X أنه يتبع التوزيع الأسى إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الشكل :

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} \qquad x>0$$
$$=0 \ \text{elsewhere.}$$

حيث θ تسمى معلمة المقياس (بعض المؤلفين يستخدمون الصورة $\lambda\bar{e}^{\lambda x}$ حيث $(\theta=\frac{1}{\lambda})$. سوف نكتب $X\sim EXP(\theta)$ للدلالة على أن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الأسى بمعلمة θ . بما أن $X\sim exp(\theta)$ حالة خاصة من توزيع جاما حيث $k=1$ فإن المتوسط والتباين للمتغير X هما على التوالى $\mu=\theta$, $\sigma^2=\theta^2$. أي أن كلا من المتوسط والانحراف المعياري يساويان θ . بيان $f(x;\theta)$ موضح في شكل (٦-٦) عندما $\theta=2$, $\theta=.5$.



شكل (٦-٦)

دالة التوزيع للمتغير X هي :

$$F(x;\theta)=1-\bar{e}^{x/\theta} \qquad x>0$$

مثال (٦-١٦) إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الأسي حيث $X \sim Exp(5)$ أوجد :

(أ) $P(X \le 10)$

(ب) $P(5 \le X \le 10)$

الحـــل :

(أ) $P(X \le 10)=F(10;5)$

$$=1-\bar{e}^{(.2)(10)}$$

$$=1-\bar{e}^{2}$$

$$=1-.135=.865.$$

(ب)

$$P(5 \le X \le 10)=F(10;5)-F(5,5)$$

$$=(1-\bar{e}^{2})-(1-\bar{e}^{1})$$

$$=.233.$$

مثال (٦-١٧) إذا كان X الزمن (مقاس بالساعات بين حوادث السيارات في تقاطع مـــا حيث $X \sim Exp(10)$ أوجد : $P(X \ge 24)$.

الحل :

$$P(X \ge 24)=1-P(0 \le X \le 24)$$

$$=1-\int_0^{24}\frac{1}{10}\,\bar{e}^{x/10}\,dx$$

$$=1+\bar{e}^{x/10}\Big|_0^{24}=1+\bar{e}^{24/10}-\bar{e}^{0}$$

$$=\bar{e}^{24/10}=.091.$$

تطبيقات للتوزيع الأسي

Applications of the Exponential Distribution

عادة ، يستخدم التوزيع الأسي كنموذج لتوزيع الأزمنة بين وقوع أحداث (نجاحات) مثل العملاء الذين يصلون إلى مركز الخدمة أو المكالمات التى تستقبلها لوحة سويتش. يرجع ذلك إلى الارتباط الوثيق بين التوزيع الأسي وبين عملية بواسون والتى تناولتها في البند (٥ - ٤) .

نظرية (٦-٣) بفرض أن عدد الأحداث $X(t)$ التي تقع في فترة زمنية طولها t يتبع توزيع بواسون بمعلمة λt (حيث λ القيمة المتوقعة لوقوع الأحداث في وحدة واحدة من الزمن) وأن عدد مرات وقوع الأحداث في فترات زمنية غير متقاطعة (متنافية) مستقلة عن بعضها . وعلى ذلك فإن أطوال الفترات الزمنية التي تفصل بين لحظات وقوع الأحداث تكون متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الأسي بمعلمة λ . البرهان الكامل خارج نطاق الكتاب. يمكن التحقق من النتيجة بالنسبة للزمن X_1 حتى وقوع الحادثة الأولى .

$$P(X_1 \le t) = 1 - P(X_1 > t)$$

$$= 1 - P[\text{عدم وقوع أحداث (نجاحات) في الفترة } (0,t)]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\lambda t}.(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

والتي بالضبط دالة التوزيع لمتغير عشوائى X حيث $X \sim Exp(1/\lambda)$.

مثال (٦-١٨) إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل الزمن (مقاس بالدقائق) بين وصول السيارات إلى موقف ما خلال الذروة حيث $X \sim Exp(1/6)$ أوجد $p(1 \le X \le 2)$.

الحل :

$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 6\, e^{-6x}\, dx$$

$$= -e^{-6x} \Big|_1^2 = e^{-6} - e^{-12}$$

$$= .0025.$$

مثال (٦-١٩) إذا كان الزمن X (مقاس بالساعات) بين وقـــوع حالـــة فشـــل فـــي جزء من حاسب آلي يتبع التوزيع الأسي حيث $X \sim EXP\,(36)$ أوجد $P(X \geq 48)$

الحـــل :

$$P(X \geq 48) = 1 - \int_0^{48} \frac{1}{36}\, \bar{e}^{x/36}\, dx$$

$$= 1 + \bar{e}^{48/36} - \bar{e}^{0}$$

$$= \bar{e}^{4/3} = .264.$$

مثال (٦-٢٠) بفرض أن المكالمات المستقبلة على لوحة الســـويتش خـــلال 24 تتبـــع توزيع بواسون حيث $\lambda = .5$ مكالمة لكل يوم. وعلى ذلك عدد الأيـــام X بيـــن حـــدوث مكالمات يتبع التوزيع الأسي بمعلمة .5. وعلى ذلك احتمال أن أكثر من يوميـــن تفصـــل بين المكالمات هو :

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= \bar{e}^{(.5)(2)} = .368.$$

الزمن المتوقع بين مكالمات ناجحة هو $1/.5 = 2$ يوم .

نظرية (٦-٤) لمتغير عشوائي متصل X فإن $X \sim EXP(\theta)$ إذا وفقط إذا :

$$P[X > a + t \mid X > a] = P[X > t]$$

لكل قيم $a > 0$, $t > 0$.

البرهان :

$$P[X > a + t \mid X > a] = \frac{P[X > a + t \text{ and } X > a]}{p[X > a]}$$

$$= \frac{P[X > a + t]}{P[X > a]}$$

$$= \frac{\bar{e}^{(a+t)/\theta}}{\bar{e}^{a/\theta}} = P[X > t].$$

أي أن الاحتمال السابق لا يعتمد على a وهذا يوضح أن التوزيع الأسي هـــو التوزيـــع المتصل الوحيد الذي يحقق فقد الذاكرة no – memory وهذا يعني أنه إذا كان جـــهاز قد استخدم لمدة a وحدة زمنية فإن احتمال أن يعيش b وحدة زمنية أو اكثر لا يعتمـــد على a، أي لا يعتمد على المدة التي سبق استخدامها فيها . وهذا يعني أن الجـــهاز غـــير معرض لان يبلى بالاستعمال .

مثال (٦-٢١) إذا كان مركب في الحالة الصلبة له زمن الحياة أو زمن الفشل (مقاس بالساعات) هو $X \sim EXP(100)$ الاحتمال أن المكون سوف يعيش على الأقل 50 ساعة أي أن :

$$P(X \geq 50) = 1 - F(50;100)$$
$$= \bar{e}^{.5} = .6065.$$

(٦-٥) توزيع وايبل Weibull Distribution

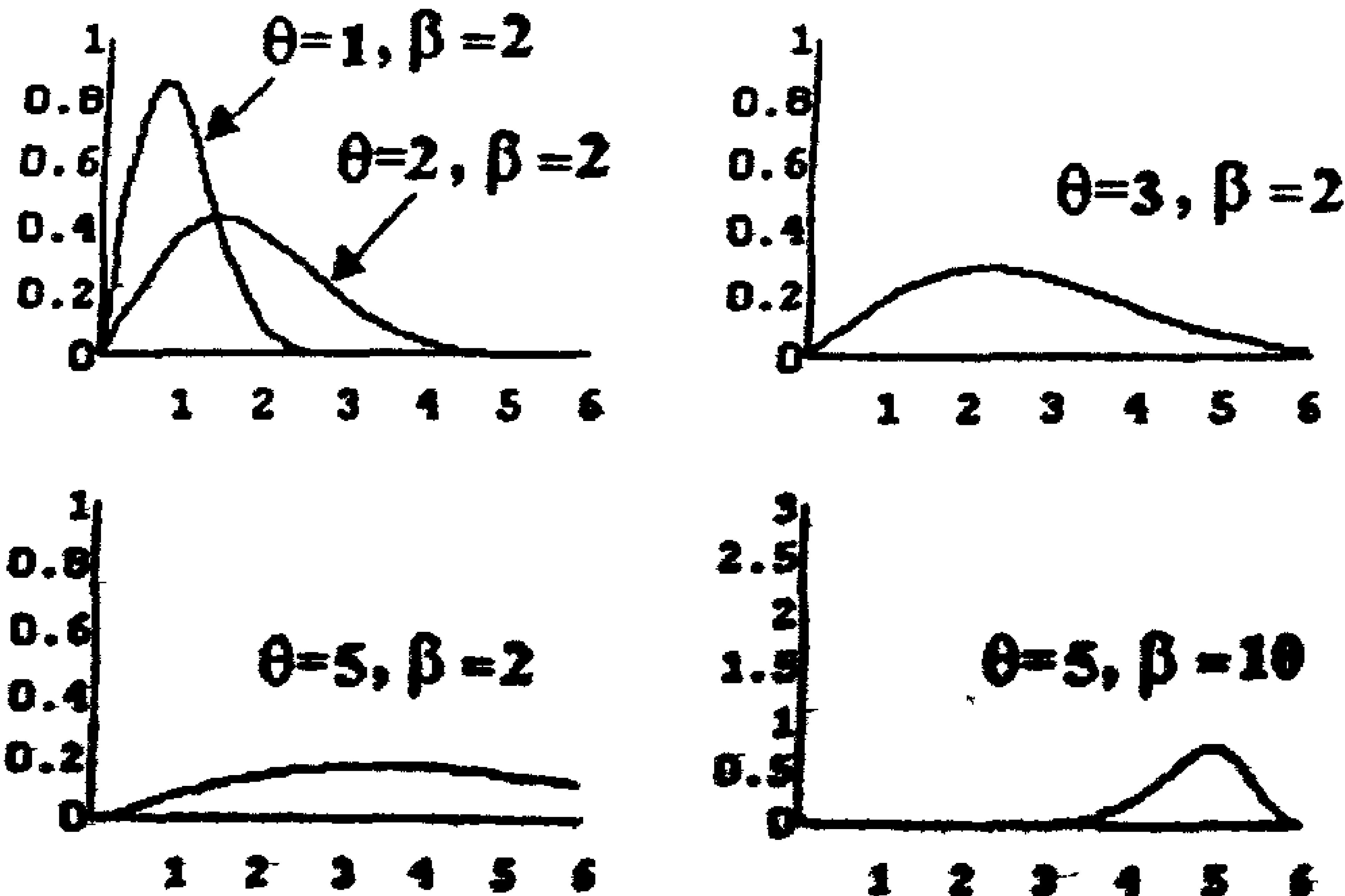
أقترح العالم W. Weibull توزيع وايبل لاستخدامه في التطبيقات الرقمية مثل أزمنة الحياة أو قوة الكسر للمعادن .

يقال للمتغير العشوائي X أنه يتبع توزيع وايبل بمعلمتين $0 < \beta$, $0 < \theta$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الشكل :

$$f(x;\theta,\beta) = \frac{\beta}{\theta} x^{\beta-1} \bar{e}^{(x/\theta)^{\beta}} \qquad x > 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

سوف نكتب $X \sim WEI(\theta,\beta)$ للدلالة على أن X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع وايبل بمعلمتين θ,β . تسمى المعلمة β معلمة الشكل وذلك كما هو الحال في توزيع جاما. يوجد لتوزيع وايبل ثلاثة أشكال وذلك بالاعتماد على المعلمة β حيث $1 > \beta$ أو $\beta = 1$ أو $\beta > 1$. عندما $\beta > 1$ فإن $f(0;\theta,\beta) = 0$ وعندما $\beta = 1$ فـإن $f(0;\theta,1) = \frac{1}{\theta}$ أي أن المنحنى يقطع المحور الأسي عند النقطة $1/\theta$.

عندما $\beta < 1$ فإن المحور الراسي يحاذى $y = f(x;\theta,\beta)$.أشكال مختلفة من توزيع وايبل موضحة



شكل (٦-٧)

في شكل (٦-٧) .

دالة التوزيع للمتغير X هي :

$$F(x;\theta,\beta) = 1 - \bar{e}^{(x/\theta)^{\beta}} \qquad x > 0.$$

يمكن كتابة دالة التوزيع على الشكل $F(x/\theta;,1,\beta)$ والتي تعنى أن θ هي معلمة المقياس . عندما $\beta = 2$ فإننا نحصـــل علـــى توزيـــع يســـمى ريـــلأي Rayleigh distribution .

مثال (٦-٢٢) إذا كانت المسافة (مقاس بالبوصة) بين التصويب للهدف ومركز الـهدف يتبع توزيع وايبل حيث $X \sim WEI(10,2)$ أوجد $P(X \leq 5)$.

الحل :

$$P(X \leq 5) = F(5;10,2) = 1 - \bar{e}^{(5/10)^2} = .221 .$$

<u>المتوسط والتبايـــن :</u>

المتوسط للمتغير $X \sim WEI(\theta,\beta)$ يمكن الحصول عليه كالتالى :

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{\beta}{\theta^{\beta}} x^{\beta-1} \bar{e}^{(x/\theta)^{\beta}} dx$$

$$= \frac{\beta}{\theta^{\beta}} \int_0^{\infty} x^{(1+\beta)-1} \bar{e}^{(x/\theta)^{\beta}} dx.$$

بوضع $t = (x/\theta)^{\beta}$ مع بعض الاختصارات فإن :

$$E(X) = \theta \int_0^{\infty} t^{(1+1/\beta)-1} \bar{e}^{t} dt$$

$$= \theta \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) .$$

وبنفس الشكل :

$$E(X^2) = \theta^2 \Gamma(1 + 2/\beta)$$

وعلى ذلك :

$$Var(X) = \theta^2 [\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta})].$$

من دالة التوزيع يمكن الحصول على المئين ذو الرتبة (100p) كالتالي :

$$x_p = \theta[-\ln(1-p)]^{1/\beta}.$$

(٦-٦) توزيــع باريتــو Pareto Distribution

يقال لمتغير عشوائي X أنه يتبع توزيع باريتو بمعلمتين $a > 0$, $k > 0$ إذا كــان دالة كثافته الاحتمالية على الشكل :

$$f(x;a,k) = \frac{k}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-(k+1)} \qquad x > 0$$

$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

سوف نكتب $X \sim PAR(a, k)$ للدلالة على أن X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع بــاريتو . المعلمة k تسمى معلمة الشكل .

دالة التوزيع تعطى كالتالي :

$$F(x;a,k) = 1 - \left(1+\frac{x}{a}\right)^{-k} \qquad x > 0.$$

ولان المعادلة السابقة يمكن وضعها على الشكل $F(x/a\,;1,k)$ فإن a تكون معلمـــة المقياس. يستخدم توزيع باريتو كنموذج في مجال الطب حيث يصف زمن الحيـــاة بعــد عملية زرع القلب .

إذا كان $X \sim PAR(a, k)$ فإن متوسط التوزيع وتباينه هما :

$$Var(X) = a^2k/[(k-2)(k-1)^2] \;,\; E(X) = a/(k-1)$$

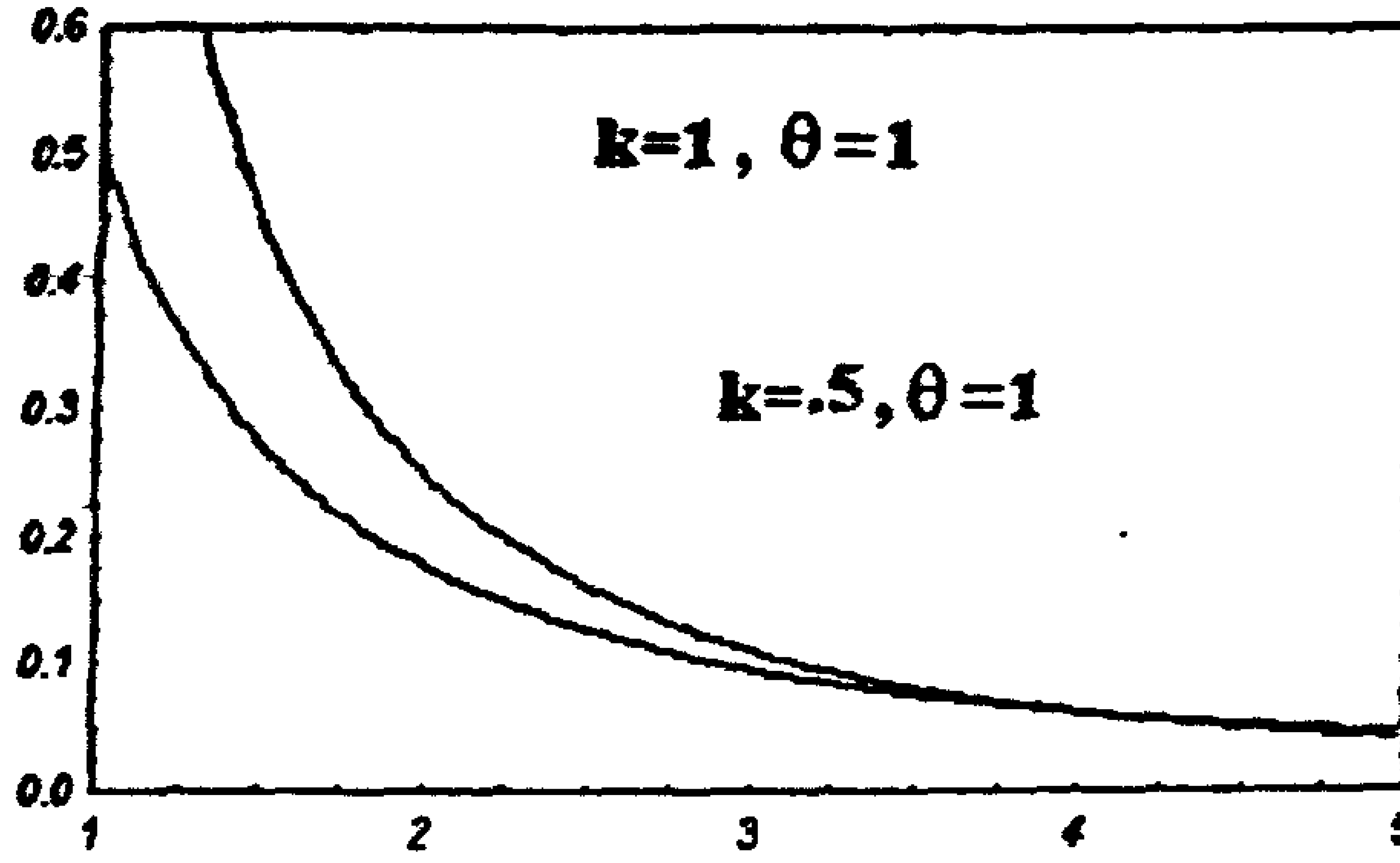
أيضا المئين ذو الرتبة (100p) هو: $x_p = a[(1-p)^{-1/k} - 1]$

هناك شكل آخر لتوزيع باريتو وهو :

$$f(y;\theta,k) = \left(\frac{k}{\theta}\right)\left(\frac{y}{\theta}\right)^{-(k+1)} \qquad y > \theta$$

$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

حيث $\theta > 0$, $k > 0$. بيان $f(y;\theta,k)$ موضح في شكل (٦-٨) .



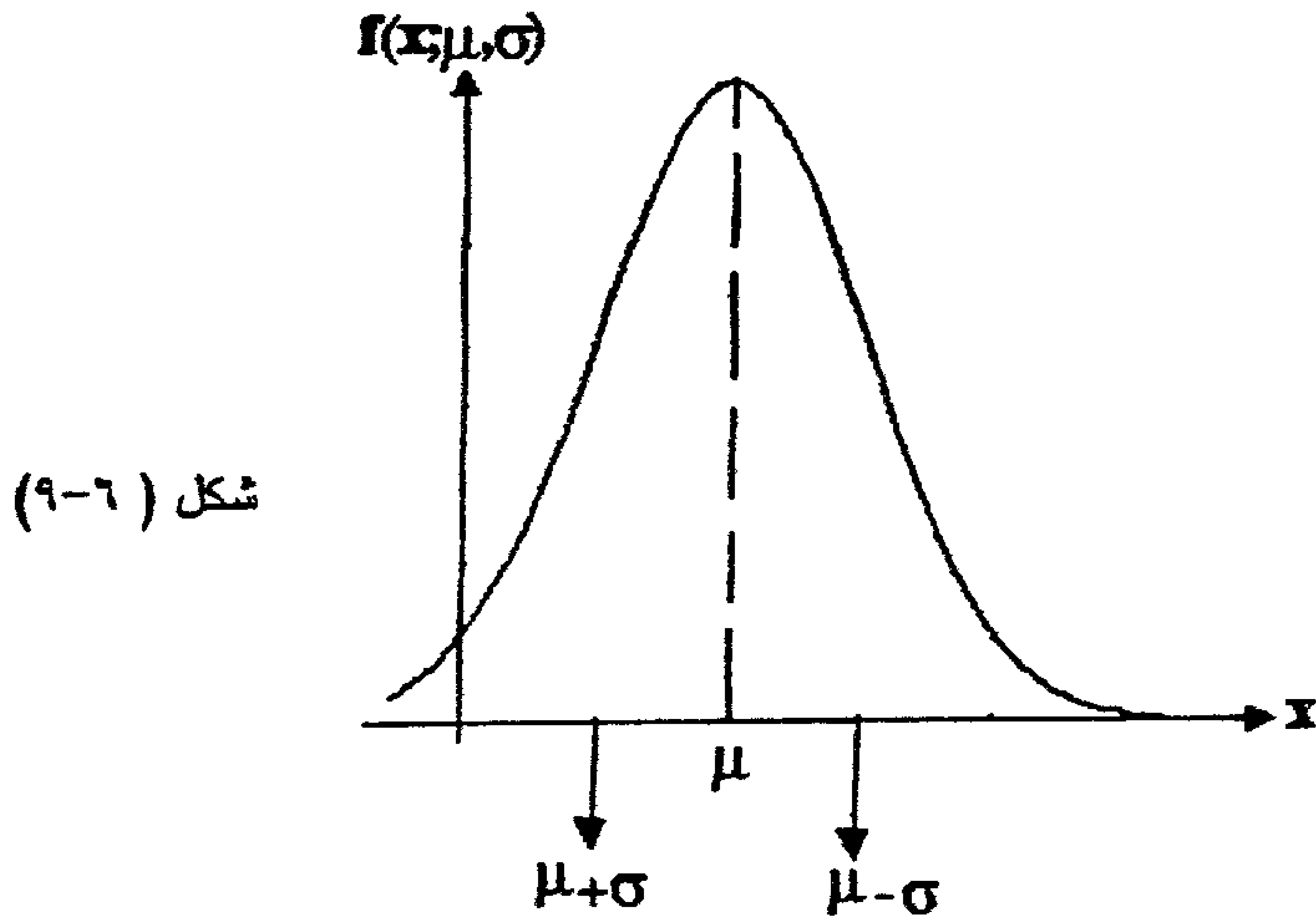
شكل (٦-٨)

(٦-٧) التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

يعتبر العالم Abraham de Moivre (1733) أول من نشر بحث عن التوزيع الطبيعى وذلك كتقريب لتوزيع مجموع متغيرات عشوائية تتبع توزيع ذى الحدين . ويمكن القول أن التوزيع الطبيعى (أحيانا يسمى توزيع جاوس Gaussian distribution) يعتبر أهم توزيع احتمالى في مجال الاحتمال والإحصاء ، فكثير من التوزيعات للمجتمعات العددية يقترب منحناها كثيراً من المنحنى الطبيعى.على سبيل المثال الأطوال ، الأوزان ، قياسات الأخطاء في التجارب النفسية ، قياسات الذكاء، الدرجات في الاختبارات المختلفة ، القياسات الإقتصادية ... الخ . أيضاً حتى لو كان التوزيع متقطع فإن مجموعها أو متوسطها يتبع تقريباً التوزيع الطبيعى وذلك تحت شروط مناسبة والذى يعتبر أساس نظرية النزعة المركزية التى سوف نتناولها في الفصل العاشر . يقال للمتغير العشوائى X إنه يتبع التوزيع الطبيعى بمعلمتين μ , σ , (σ^2,μ) حيث $-\infty<\mu<\infty$, $\sigma>0$ حيث μ معلمة الموقع و σ معلمة القياس إذا كان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائى X على الشكل :

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\bar{e}^{(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad -\infty<x<\infty$$

حيث e ترمز لأساس اللوغاريتم الطبيعي وتساوى تقريباً 2.71828 بينما π تمثـل الثـابت المشهور في الرياضيات والذي قيمته تقريبـاً 3.14159 . سـوف نكتـب $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ للدلالة على أن X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بمعلمتين μ, σ^2 . بيـان $f(x;\mu,\sigma^2)$ موضح في شكل (٦-٩) حيث يظهر المنحنى الطبيعي متماثل حول μ ويأخذ شكل الجرس (أو الناقوس) ويتقارب طرفا المنحنى مـن الصفـر عنـد $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$.



شكل (٦-٩)

تحقق الدالة $f(x;\mu,\sigma^2)$ شرطي دالة كثافة الاحتمال وهما :

(أ) $f(x;\mu,\sigma^2) \geq 0$

(ب) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma^2)\,dx = 1$

بالنسبة للشرط (أ) واضح $f(x;\mu,\sigma) \geq 0$ لأي عدد x . أما بالنسبة للشرط (ب) وبوضـع $z = (x-\mu)/\sigma$ فإن :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma^2)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz \qquad (٦-١)$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz.$$

وبوضع $w = z^2/2$ فإن $z = \sqrt{2w}$, $dz = (w^{-1/2}/\sqrt{2})\,dw$ وعلى ذلك :

$$I = \int_0^\infty \frac{w^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\, \bar{e}^{w}\, dw = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

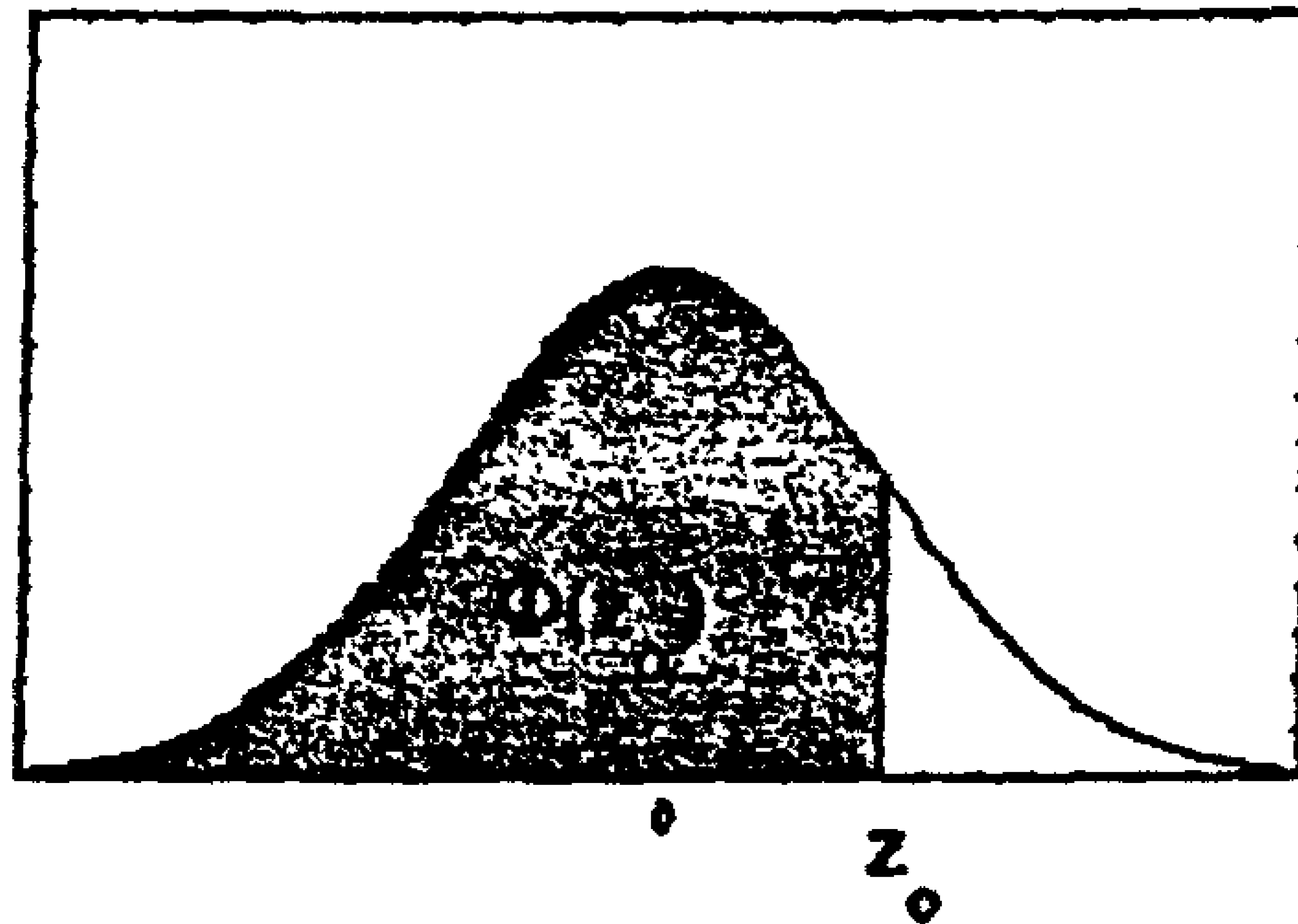
حيث $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. وضع $z = (x-\mu)/\sigma$ في التكامل السابق جعل ما بداخل التكامل في (٦-١) يمثل دالة كثافة احتمال لتوزيع يسمى التوزيع الطبيعي القياسي والذي دالة كثافته الاحتمالية تكون على الشكل :

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \bar{e}^{z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty.$$

سوف نكتب $Z \sim N(0, 1)$ للدلالة على أن Z متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي القياسي. للمتغير Z دالة توزيع تكون على الشكل :

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)\, dt.$$

المساحة المظللة في شكل (٦-١٠) توضح $\Phi(z_0)$.

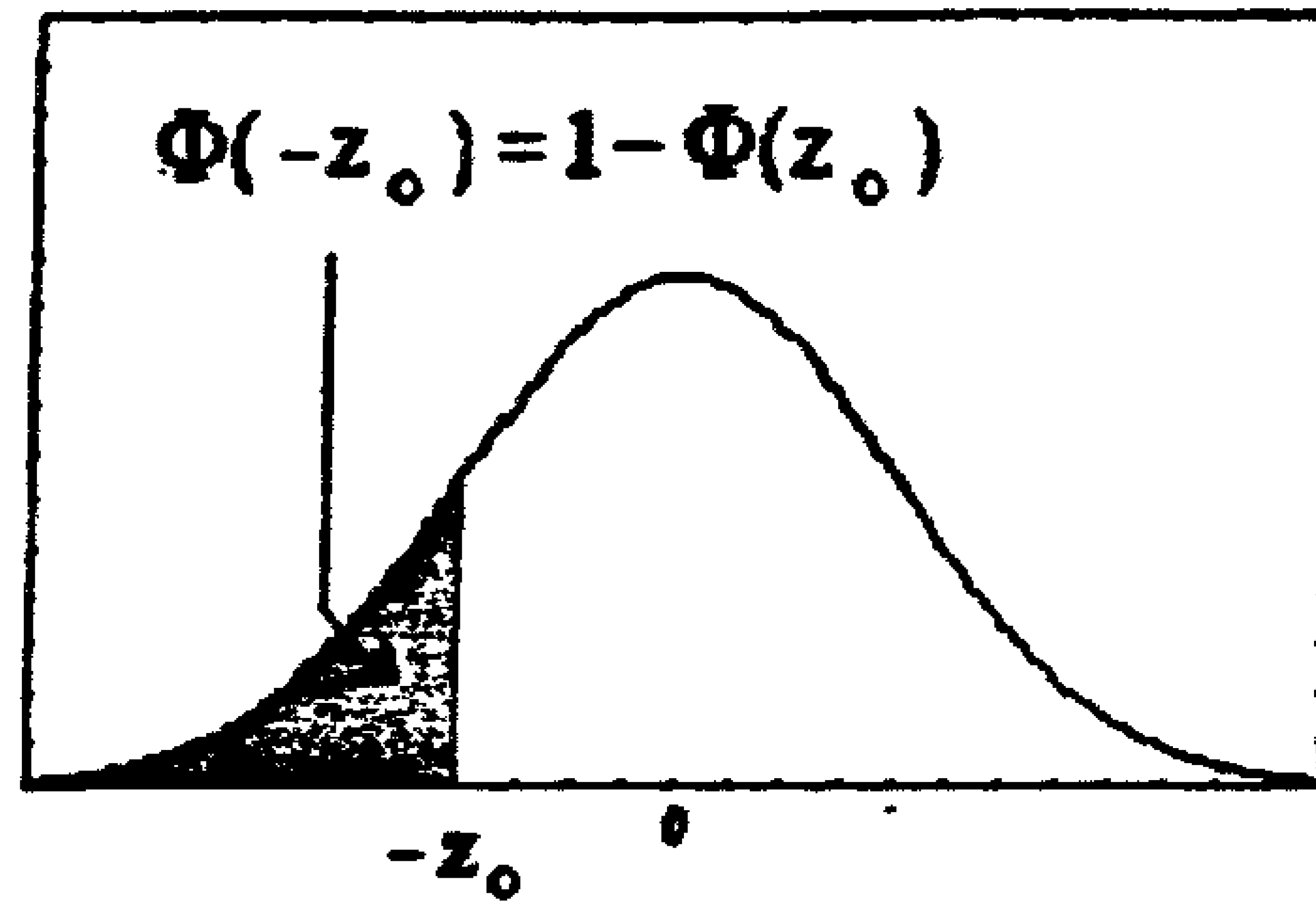


شكل (٦-١٠)

كما أن :

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

والموضحة في شكل (٦-١١) .



شكل (٦-١١)

بعض الخصائص الهندسية للتوزيع الطبيعى القياسى يمكن الحصول عليها بطرق التفاضل منها : $\phi(z) = \phi(-z)$ لكل قيم z الحقيقية وعلى ذلك $\phi(z)$ دالة زوجية في z أيضاً:

$$\phi'(z) = -z\,\phi(z),$$

$$\phi''(z) = (z^2 - 1)\,\phi(z).$$

والدالة $\phi(z)$ لها قيمة عظمى وحيدة عند $z = 0$ ونقطتى الانقلاب عند $z \pm 1$. أيضا $\phi(z) \to 0\ ,\ \phi'(z) = -z/[\sqrt{2\pi}\exp(z^2/2)] \to 0$ عندما $z \to \pm\infty$. سوف نستخدم هذه الحقائق في ايجاد $E(Z)\ ,\ E(Z^2)$ ومنها نوجد المتوسط والتباين للمتغير $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

<u>المتوسط والتباين للمتغير X</u> حيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\,\phi(z)\,dz$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(z)\,dz$$

$$= -\phi(z)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\,\phi(z)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\phi''(z) + \phi(z)]\,dz$$

$$= \phi'(z)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\,dz$$

$$= 0 + 1 = 1.$$

عندما $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وبوضع $z = (x-\mu)/\sigma$ فإن :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z)\,\phi(z)\,dz$$

$$= \mu\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\,dz + \sigma\int_{-\infty}^{\infty} z\,\phi(z)\,dz$$

$$= \mu,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z)^2 \phi(z)\, dz$$

$$= \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} z\, \phi(z)\, dz$$

$$+ \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2\, \phi(z)\, dz$$

$$= \mu^2 + \sigma^2.$$

ومنها :

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = (\mu^2 + \sigma^2) - \mu^2 = \sigma^2.$$

الوسيط والمنوال ونقاط الإنقلاب :

إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن الوسيط = المنوال = الوسط الحسابى .

البرهان :

(أ) إذا كان m_0 يرمز للوسيط فإن :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{m_0} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \frac{1}{2}$$

بوضع $z = (x-\mu)/\sigma$ فإن :

$$\int_{-\infty}^{\frac{m_0-\mu}{\sigma}} \phi(z)\, dz = \frac{1}{2}$$

ولكـــن :

$$\int_{-\infty}^{0} \phi(z)\, dz = \frac{1}{2}$$

أي أن :

$$\frac{m_0 - \mu}{\sigma} = 0$$

ومنها :

$$m_0 = \mu .$$

(ب) منوال المتغير X حيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ يمكن الحصول عليه بحل المعادلة التالية :

$$\frac{d \log f(x; \mu, \sigma)}{dx} = -\left(\frac{m-\mu}{\sigma^2}\right) = 0$$

ومنها المنوال = $m = \mu$.

إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن نقطتي الانقلاب تكون عند $x = \mu \pm \sigma$ كما يتضح من شكل (٦-٩) .

البرهان :

$$f''(x) = 0$$

أو تكافئ :

$$\frac{d^2 \log f(x; \mu, \sigma)}{dx^2} = 0$$

ومنها :

$$-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x_0 - \mu)^2}{\sigma^4} = 0$$

أو :

$$x_0 = \mu \pm \sigma.$$

الموضوعات المتقدمة في تحويل المتغيرات العشوائية سوف ندرسها بالتفصيل في الفصل الثامن . ولكن يكون من المناسب ذكر النظرية التالية عند هذه النقطة .

نظرية (٦-٥) إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن :

(أ) $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(ب) $F_X(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

البرهان :

$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$
$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right)$$
$$= P(X \le \mu + z\sigma)$$
$$= \int_{-\infty}^{\mu+z\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx.$$

بوضع $w = (x-\mu)/\sigma$ فإن :

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{w^2/2}\, dw$$
$$= \Phi(z).$$

برهان (أ) نحصل عليه بتفاضل $F_Z(z)$ حيث :

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{z^2/2}.$$

يمكن إثبات (ب) كالتالى :

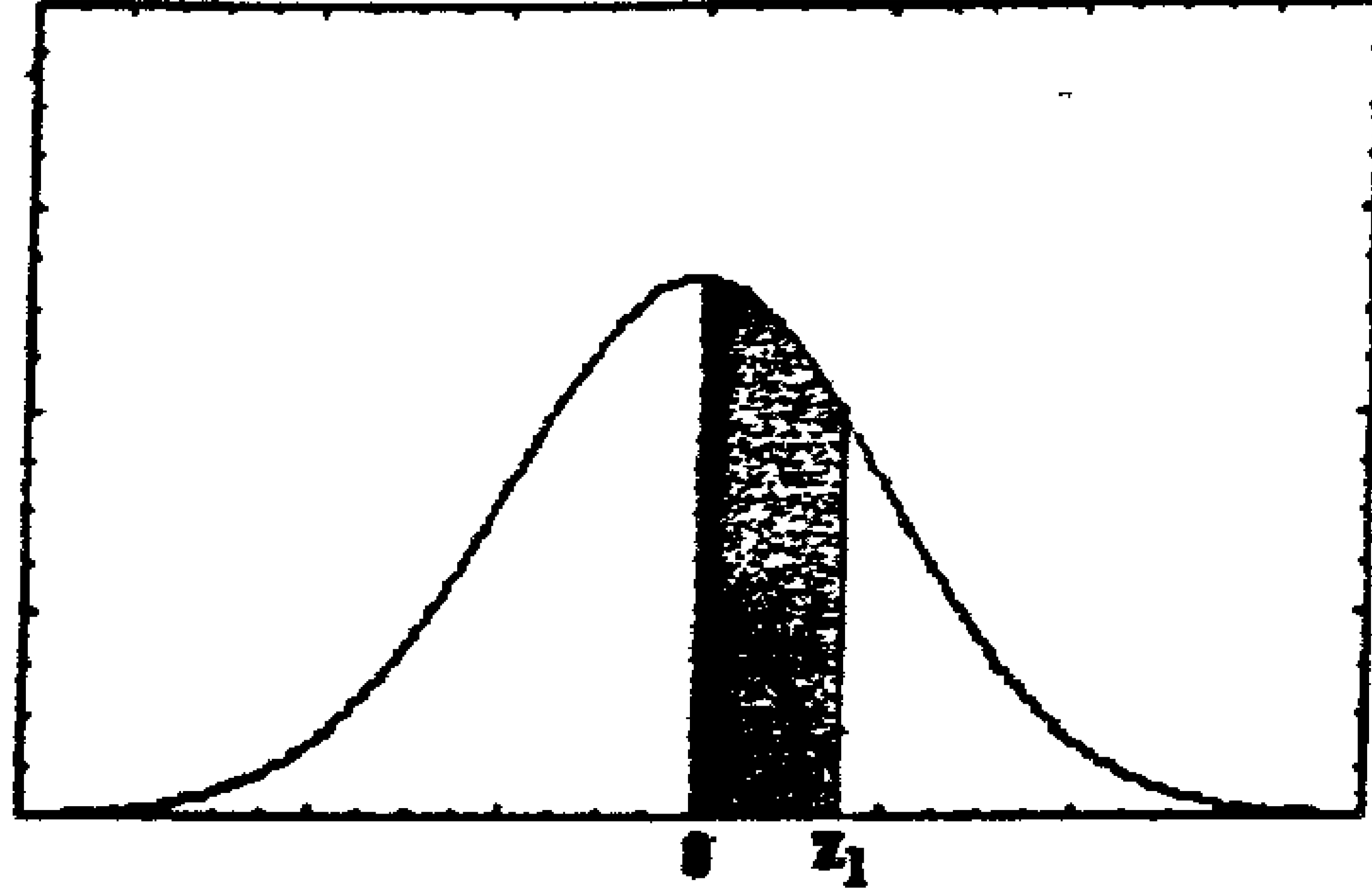
$$F_X(x) = P[X \le x]$$
$$= P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right]$$
$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

وعلى ذلك يمكن حساب دالة التوزيع $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ وذلك باستخدام دالـــة التوزيـــع للمتغـــير العشوائى Z حيث $Z \sim N(0, 1)$.

إذا كان z_1 عدد حقيقي موجب فان الاحتمال $(0 < Z < z_1)$ يســـاوي المســـاحة المظللة في شكل (٦-١٢) ويمكن الحصول عليها من جدول التوزيع الطبيعي القياســـي فـــي ملحق (٧)، المساحات الواقعة تحت المنحني الطبيعي القياسي غير معطاة في الجـــدول لقيـــم z السالبة ولكن يمكن حسابهم باستخدام خاصية التماثل للمنحنـــى الطبيعـــي. وعليـــه لأي $z_1 > 0$ فإن :

$$P(-\infty < Z < z_1) = .5 + P(0 < Z < z_1),$$
$$P(0 < Z < z_1) = P(-z_1 < Z < 0),$$

$$P(|Z|<z_1) = P(-z_1<Z<z_1)$$
$$= 2P(0<Z<z_1),$$
$$P(|Z|>z_1) = 2P(Z>z_1) = 2[.5-P(0<Z<z_1)].$$



شكل (٦-١٢)

مثال (٦- ٢٣) إذا كان Z متغير عشوائي يتبـــع التوزيـــع الطبيعـــي القياســـي احســـب الاحتمالات الآتية مع توضيح ذلك بيانيا .

(ا) $P(0<Z<1.05)$

(ب) $P(-1.06<Z<1.06)$

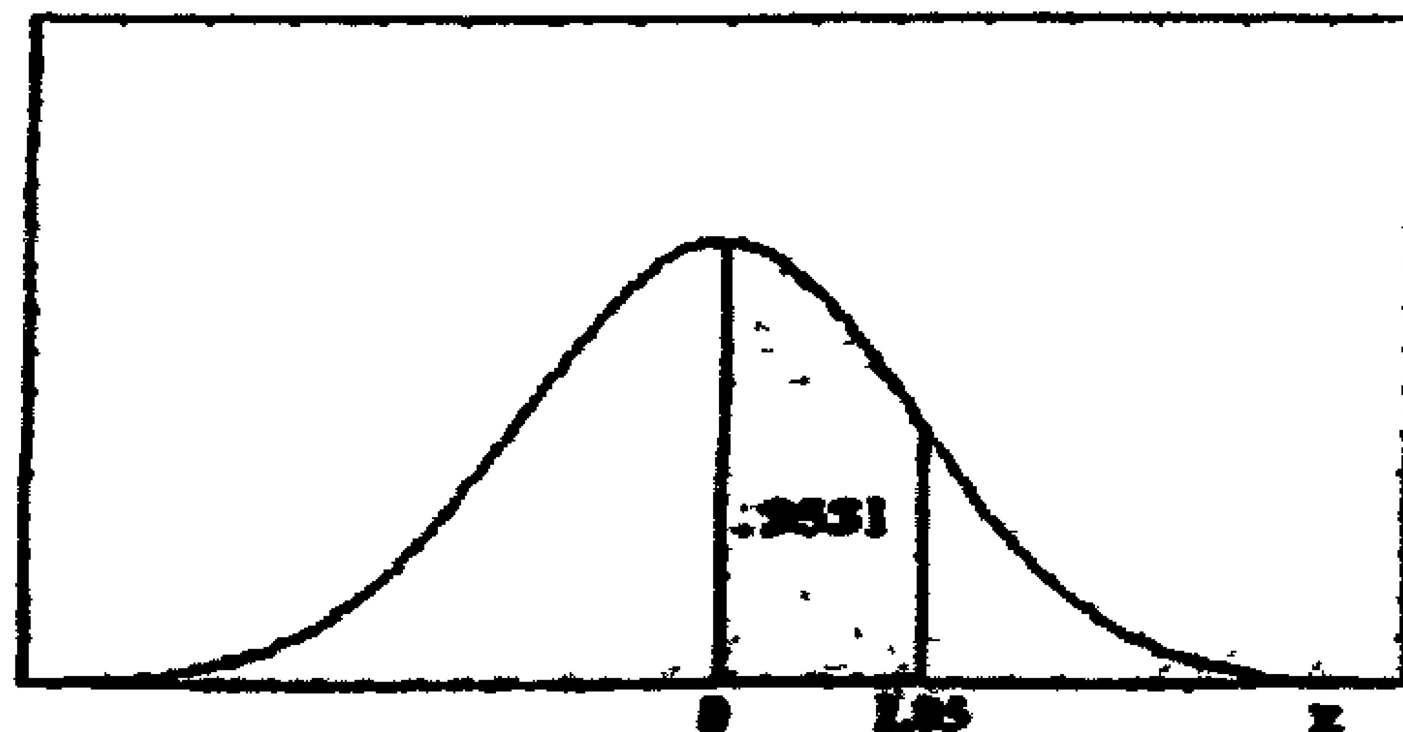
الحل .

(أ) لإيجاد قيمة الاحتمال $P(0<Z<1.05)$ نبحث في العمود الأول على الشمال مـــن جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٧) عن القيمة 1 ثم نتحرك أمـــام هـــذه القيمة أفقيا حتى نصل إلى العمود الذي رأس عنوانه الرقـــم 0.05 فتكـــون هـــي المساحة المطلوبة أي أن :

$$P(0<Z<1.05) = 0.3531.$$

والتي تمثل المساحة المظللة في •

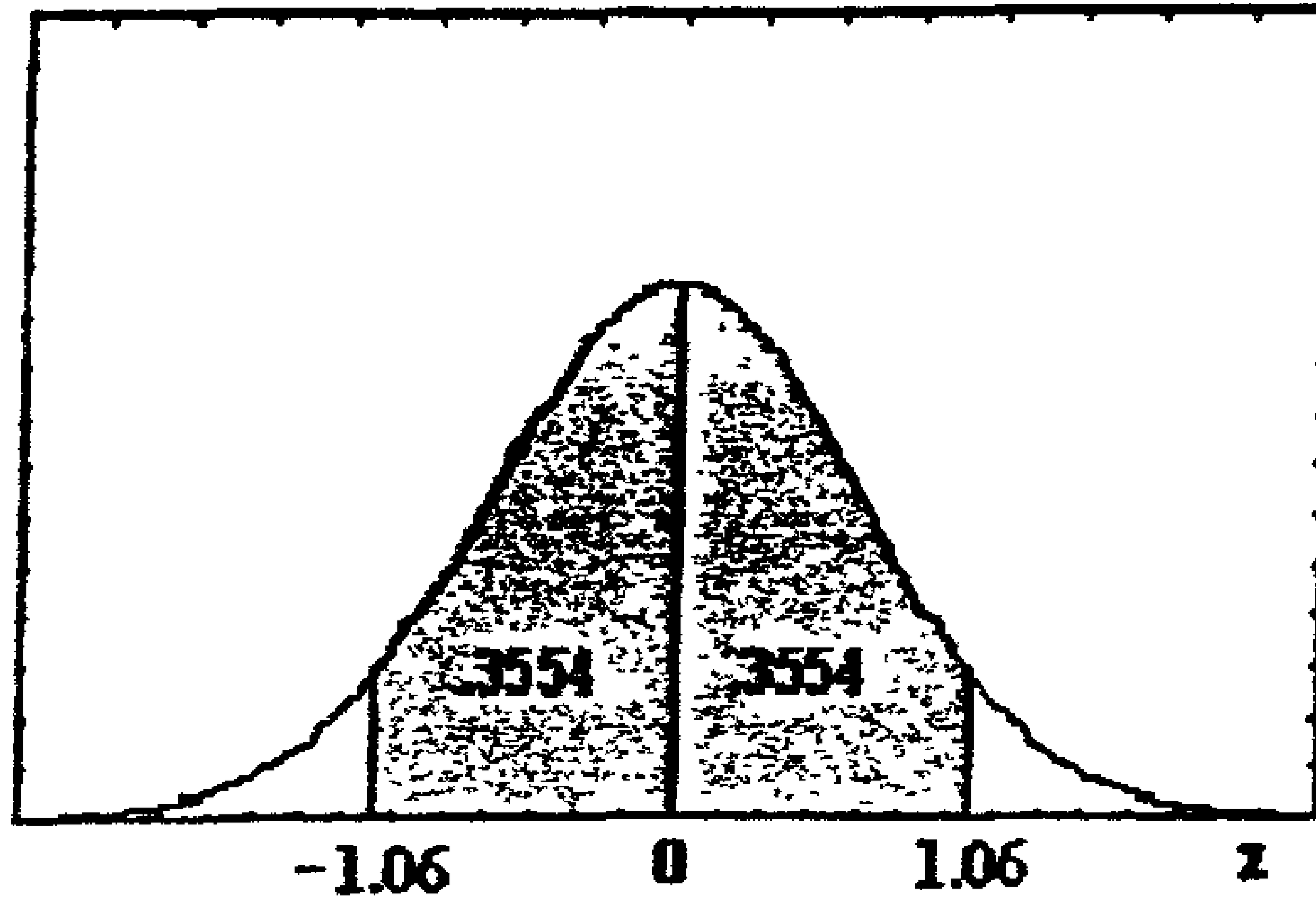
شكل (٦-١٣)



(ب) الاحتمال المطلوب هو $P(-1.06 < Z < 1.06)$ وهو يساوي المساحة المظللة في شكل (٦-١٤) .

ونظرا لتماثل المنحنى الطبيعي فان :

$$P(-1.06 < Z < 1.06) = P(-1.06 < Z < 0) + P(0 < Z < 1.06)$$
$$= 2P(0 < Z < 1.06) = 2(0.3554) = 0.7108.$$



شكل (٦-١٤)

مثال (٦-٢٤) : في مدينة صغيرة وجد أن أعلى درجة حرارة مسجلة يوميا خلال فصل الربيع لها متوسط 20°c وانحراف معياري 5°c. بفرض أن المتغير العشوائي X (أعلى درجة حرارة يوميا) يخضع للتوزيع الطبيعي، أوجد النسبة المئوية للأيام التي فيها أعلى درجة حرارة :

(أ) بين 22°c و 26°c

(ب) على الأقل 28°c

الحل .

(أ) إذا كان X يرمز لأعلى درجة حرارة مسجلة يوميا فان X يكون متغير عشوائي طبيعي متوسطه $\mu = 20$ وانحرافه المعياري $\sigma = 5$. المتغير الطبيعي القياسي المناظر هو :

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-20}{5}.$$

عندما $x_1 = 22$ فإن :

$$z_1 = \frac{22-20}{5} = 0.4.$$

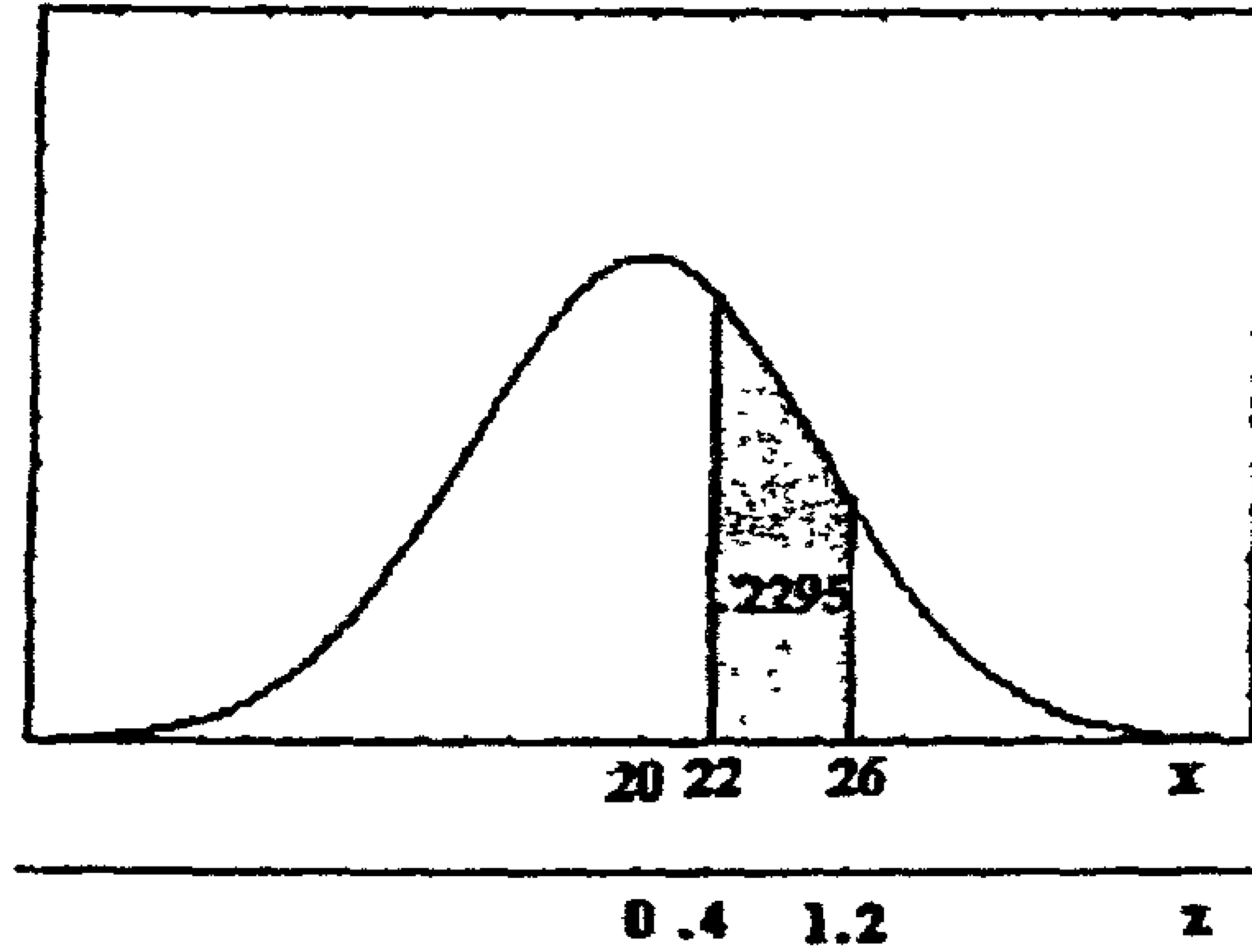
وعندما $x_1 = 26$ فان :

$$z_2 = \frac{26-20}{5} = 1.2.$$

الاحتمال المطلوب هو $P(22<X<26)$ وهو يساوي المساحة المظللة في شكل (٦-١٥) .

أي أن :

$$P(22 < X < 26) = P(0.4 < Z < 1.2)$$
$$= 0.3849 - 0.1554 = 0.2295.$$



شكل (٦- ١٥)

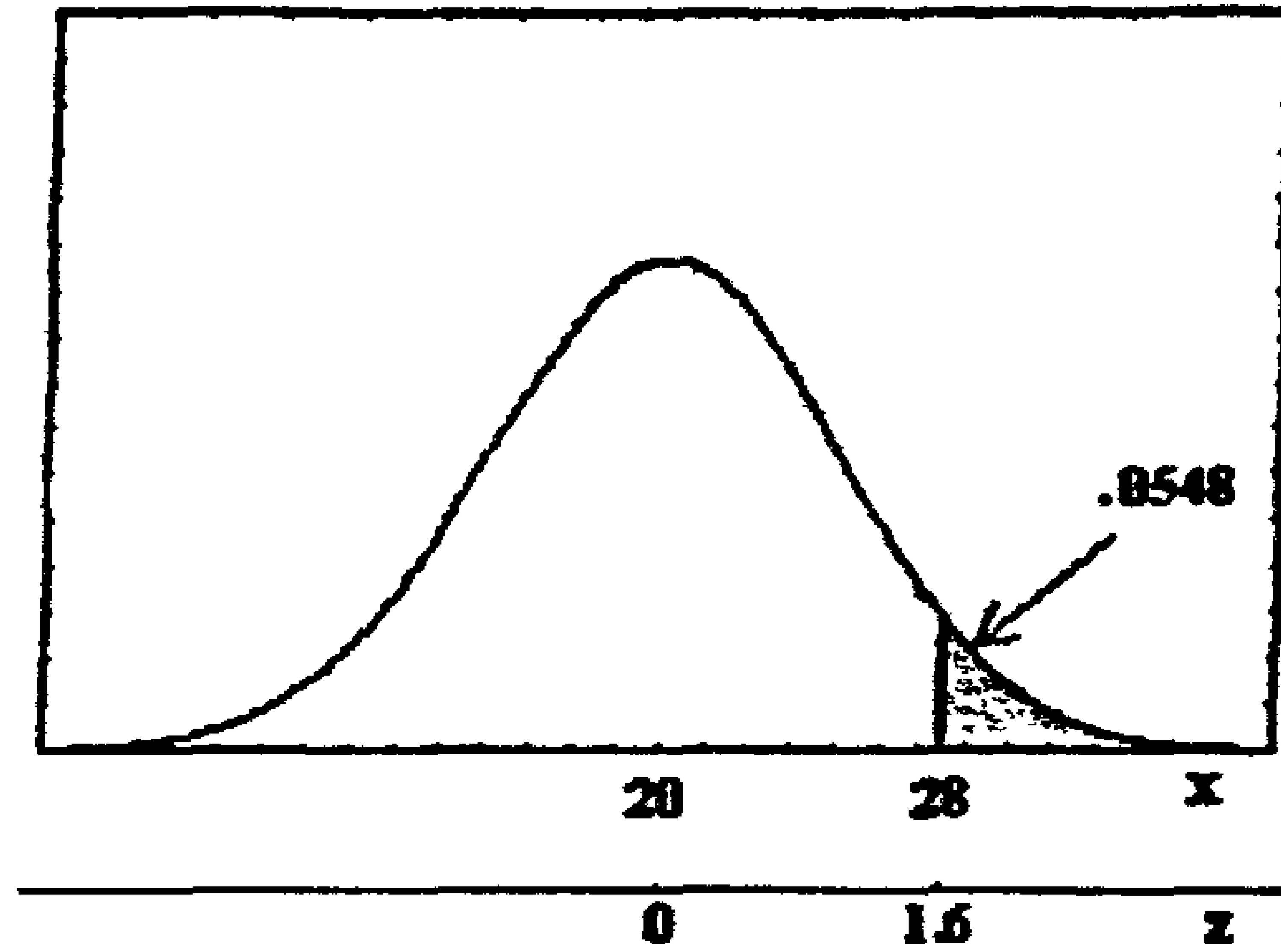
أي أن النسبة المئوية للأيام التي فيها أعلى درجة حرارة بين (22°c و 26°c) هي % 22.95 .

(ب) عندما $x_1 = 28$ فإن :

$$z_1 = \frac{28-20}{5} = 1.6.$$

الاحتمال المطلوب هو $P(X \geq 28)$ وهو يساوي المساحة المظللة في شكل (٦ - ١٦) . أي أن :

$$P(X > 28) = P(Z > 1.6)$$
$$= P(Z > 0) - P(0 < Z < 1.6)$$
$$= 0.5 - 0.4452 = 0.0548.$$



شكل (٦ – ١٦)

أي أن النسبة المئوية للأيام التي فيها أعلى درجة حرارة فوق 28°c هي % 5.48 .

مثال (٦-٢٥) إذا كانت مبيعات الغاز الطبيعي في الأسبوع في محطة لتعبئة الغاز يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 3000$ جالون وانحراف معياري $\sigma = 200$ جالون.
أوجد الاحتمال أن المبيعات في الأسبوع ما بين 3200 و 3500 جالون .
الحل . إذا كان X متغير عشوائي يرمز لمبيعات الغاز الطبيعي في الأسبوع ، فان X يكون متغير عشوائي طبيعي متوسطه $\mu = 3000$ وانحرافه المعياري $\sigma = 200$.

عندما $x_1 = 3200$ فإن :

$$z_1 = \frac{3200 - 3000}{200} = 1.0.$$

وعندما $x_2 = 3500$ فإن :

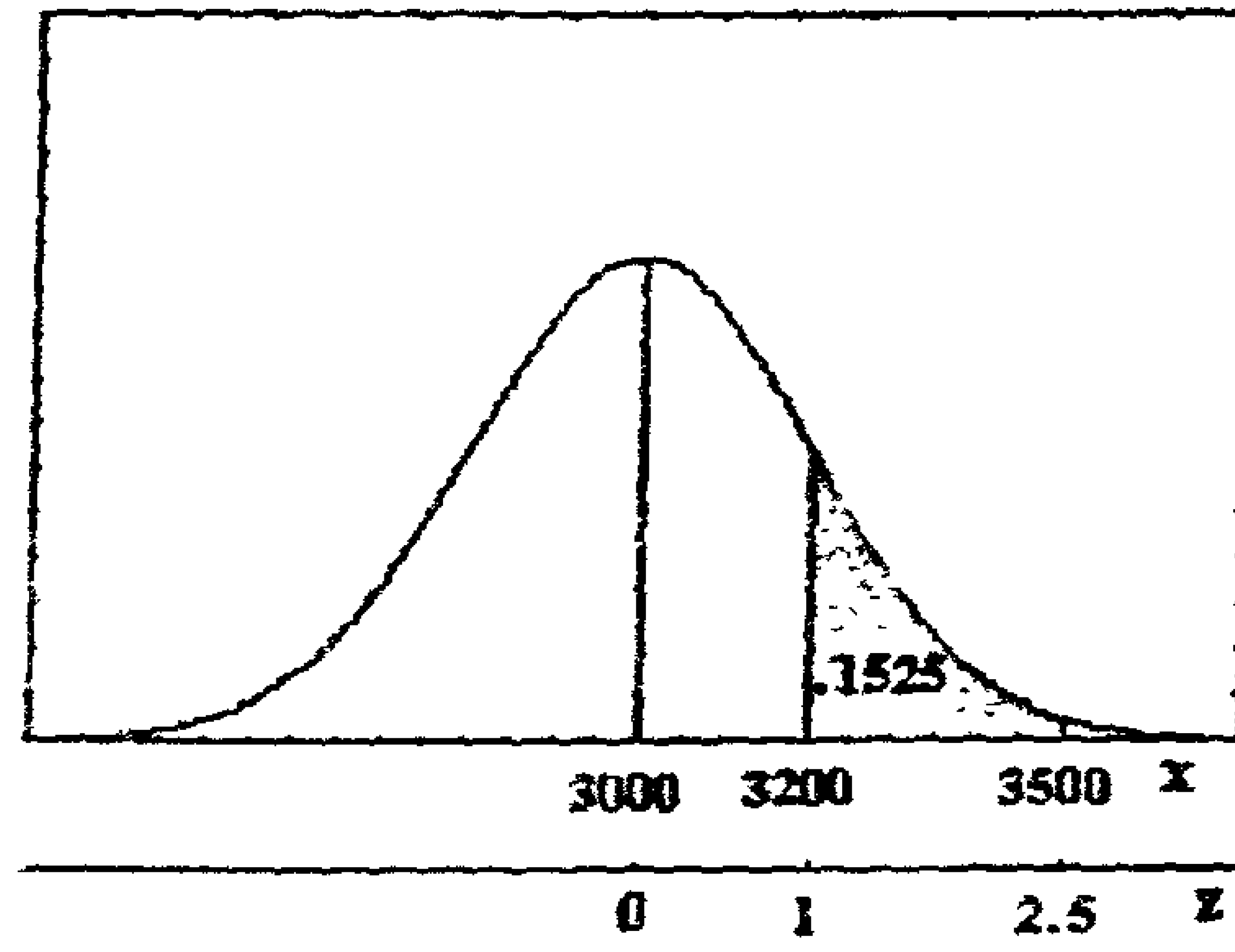
$$z_2 \frac{3500 - 3000}{200} = 2.5.$$

الاحتمال المطلوب هو :

$$P(3200 < X < 3500)$$

وهو يساوي المساحة المظللة في شكل (٦- ١٧) أي أن :

$$P(3200 < X < 3500) = P(1.0 < Z < 2.5)$$
$$P(0 < Z < 2.5) - P(0 < Z < 1)$$
$$= 0.4938 - 0.3413 = 0.1525.$$



شكل (٦-١٧)

مثال (٦-٢٦) إذا كانت كمية المطر الذي يسقط سنويا في منطقة معينة متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 2$ بوصة. أوجد المتوسط السنوي لسقوط المطر في عام محدد إذا كان احتمال سقوط أكثر من 30 بوصة من المطر في هذا العام يساوي 0.0548 .

الحل . بفرض أن X متغير عشوائي طبيعي له متوسط غير معروف وانحراف معياري $\sigma = 2$، المتغير الطبيعي القياسي المناظر يكون :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

عندما $x_1 = 30$ فإن :

$$z_1 = \frac{30 - \mu}{2}.$$

ولكن احتمال أن X أكثر من 30 هو 0.0548، كما هو معطى، وعلى ذلك فان :

$$P(Z \geq \frac{30-\mu}{2}) = 0.0548.$$

أي أن :

$$P(0 \leq Z \leq \frac{30-\mu}{2}) = 0.4452.$$

ولكن من جدول التوزيع الطبيعي القياسي المعطى في ملحق (٧) فان :

$$P(0 \leq Z \leq 1.6) = 0.4452.$$

أي أن $\frac{30-\mu}{2} = 1.6$ ومنه $\mu = 26.8$ بوصة .

مثال (٦-٢٧) إذا كانت حموضة الدم الآدمي مقاس بدلالة الأس الأيدروجين متغير عشوائي طبيعي متوسطه $\mu = 7.2$. إذا كان احتمال أن يكون مستوى الأس الايدروجيني اكبر مـــن 7.5 يساوي 0.0222 أوجد الانحراف المعياري للتوزيع .

الحل ، عندما $x_1 = 7.5$ فإن :

$$z_1 = \frac{7.5-7.2}{\sigma} = \frac{0.3}{\sigma}.$$

أي أن :

$$P(Z \geq \frac{0.3}{\sigma}) = 0.0222.$$

وبالتالي فان :

$$P(0 \leq Z \leq \frac{0.3}{\sigma}) = 0.5 - 0.0222 = 0.4778.$$

ولكن من الجدول الطبيعي القياسي في ملحق (٧) نجد أن :

$$P(0 \leq Z \leq 2.01) = 0.4778.$$

أي أن $\frac{0.3}{\sigma} = 2.01$ ومنه $\sigma = 0.149$.

مثال (٦-٢٨) إذا كان $X \sim N(2, 4)$ فإن :

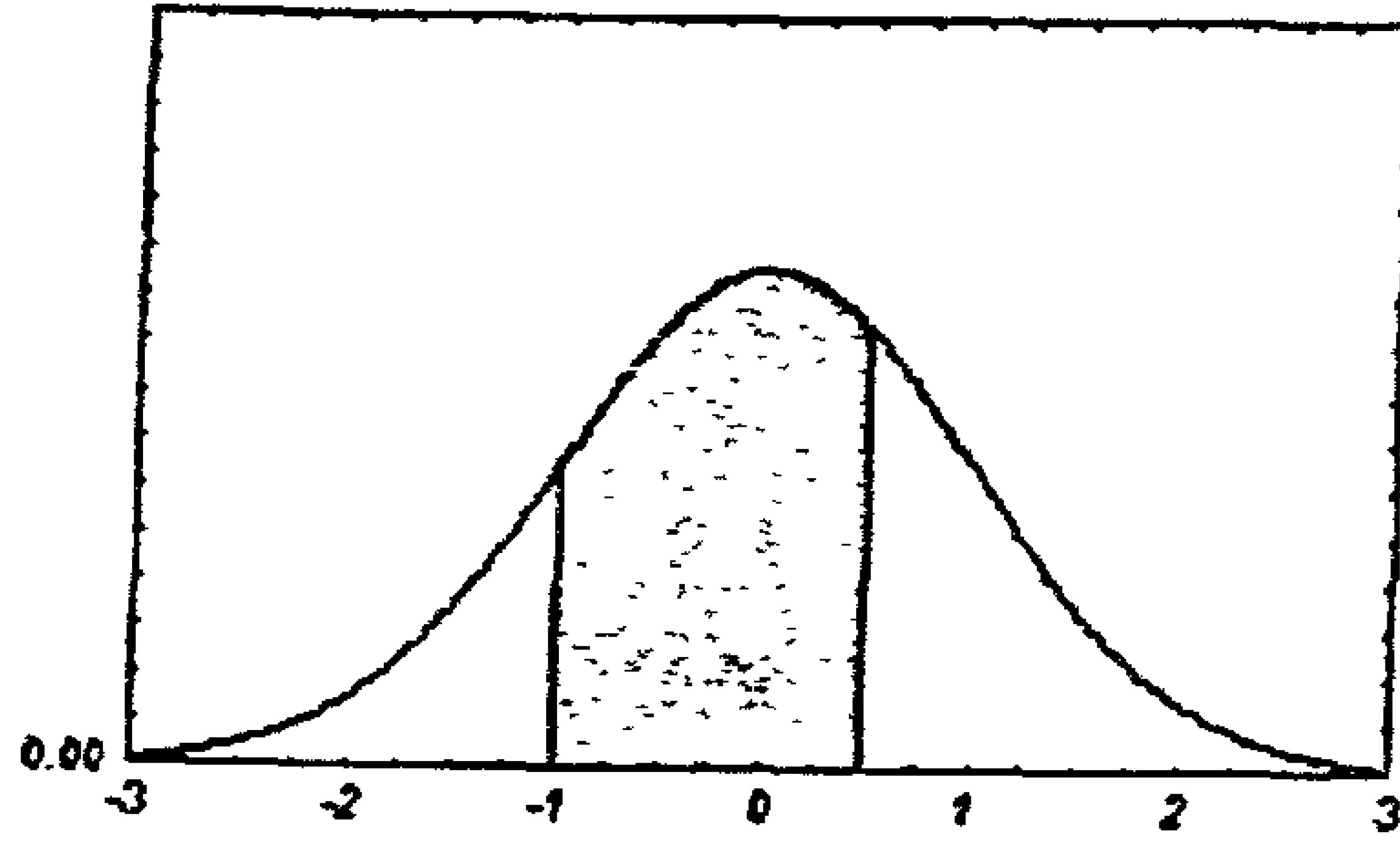
$$P(0 \le X \le 3) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}$$

$$= \Phi\left(\frac{3-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{2}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-1)$$

$$= 0.1915 + 0.3413 = .533.$$

وذلك من الجدول الطبيعي القياسي في ملحق (٧). الاحتمال المطلوب موضح في شـــكل (٦-١٨).



شكل (٦-١٨)

العـزوم :

نظرية (٦-٦) إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن :

(أ) $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$

(ب) $E(X-\mu)^{2r} = \frac{(2r)!\sigma^{2r}}{r!2^r} \quad r = 1, 2, \ldots$

(ج) $E(X-\mu)^{2r-1} = 0 \quad r = 1, 2, \ldots$

البرهان :

(أ) بما أنَ الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي Z هي :

$$M_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tz} \bar{e}^{z^2/2} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{(z-t)^2/2+t^2/2} dz$$

$$= e^{t^2/2}.$$

وذلك لأن $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{(z-t)^2/2} dz$ يساوى 1 لأنه يمثل التكامل على دالة كثافة الاحتمال لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط t وتباين 1 . بما فإن :

$$M_X(t) = M_{\sigma Z+\mu}(t)$$

$$= e^{\mu t} M_Z(\sigma t) = e^{\mu t+\sigma^2 t^2/2}.$$

المعادلة (ب) والمعادلة في (ج) يمكن الحصول عليهما كالتالى :

$$M_{X-\mu}(t) = e^{\sigma^2 t^2/2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2r} t^{2r}}{2^r r!}$$

$$= \frac{\sigma^{2r}(2r)! t^{2r}}{2^r r!(2r)!}.$$

المعاملات المقابلة لـ $\frac{t^{2r}}{(2r)!}$ في المسلسلة السابقة تمثل العـزم مـن الدرجـة $2r$ حـول المتوسط حيث $r = 1,2,...$ ،أي العزوم الزوجية .أما العزوم الفردية فتساوي صفر أي أن : $E(X-\mu)^{2r-1} = 0$ حيث $r = 1, 2, ...$.

إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن الدالة المميزة تكون على الشكل :

$$\phi_X(t) = M_X(it) = e^{\mu(it)+\frac{1}{2}(it)^2\sigma^2}.$$

والدالة التراكمية تكون على الشكل :

$$\psi_X(t) = \ln \phi_X(t) = \mu(it) + \frac{1}{2}(it)^2\sigma^2.$$

ويمكن إيجاد العزوم الأربعة الأولى حول المتوسط من الدالة $\psi_X(t)$ كالتالي :

$$k_1 = \mu'_1 = \mu \qquad , \mu_1 = 0$$

حيث μ'_1 هو معامل $\frac{it}{1!}$ في الدالة المولدة التراكمية التي رمزنا له بالرمز k_1.

و
$$k_2 = \mu_2 = \sigma^2$$

حيث μ_2 هو معامل $\frac{(it)^2}{2!}$ في الدالة المولدة التراكمية التى رمزنا له بالرمز k_2 .

و
$$k_3 = \mu_3 = 0$$

حيث μ_3 هو معامل $\frac{(it)^3}{3!}$ في الدالة المولدة التراكمية التى رمزنا له بالرمز k_3 .

و
$$k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 = 0$$

حيث $\mu_4 - 3\mu_2^2$ هو معامل $\frac{(it)^4}{4!}$ في الدالة المولدة التراكمية التى رمزنا لـــها بـــالرمز k_4. وحيث أن $\mu_2 = \sigma^2$ فإن :

$$\mu_4 - 3\sigma^4 = 0$$

أي أن :

$$\mu_4 = 3\sigma^4.$$

معامل الالتواء للتوزيع الطبيعي هو :

$$\alpha_1 = \mu_3^2 / \mu_2^{3/2} = 0$$

لأن :

$$\mu_3 = 0, \mu_2 = \sigma^2.$$

معامل التفلطح للتوزيع الطبيعى هو :

$$\alpha_2 = \mu_4 / \mu_2^2 = 3$$

لأن :

$$\mu_2 = \sigma^2, \mu_4 = 3\sigma^4.$$

(٦-٨) التوزيع اللوغاريتمى الطبيعى :

The Lognormal Distribution

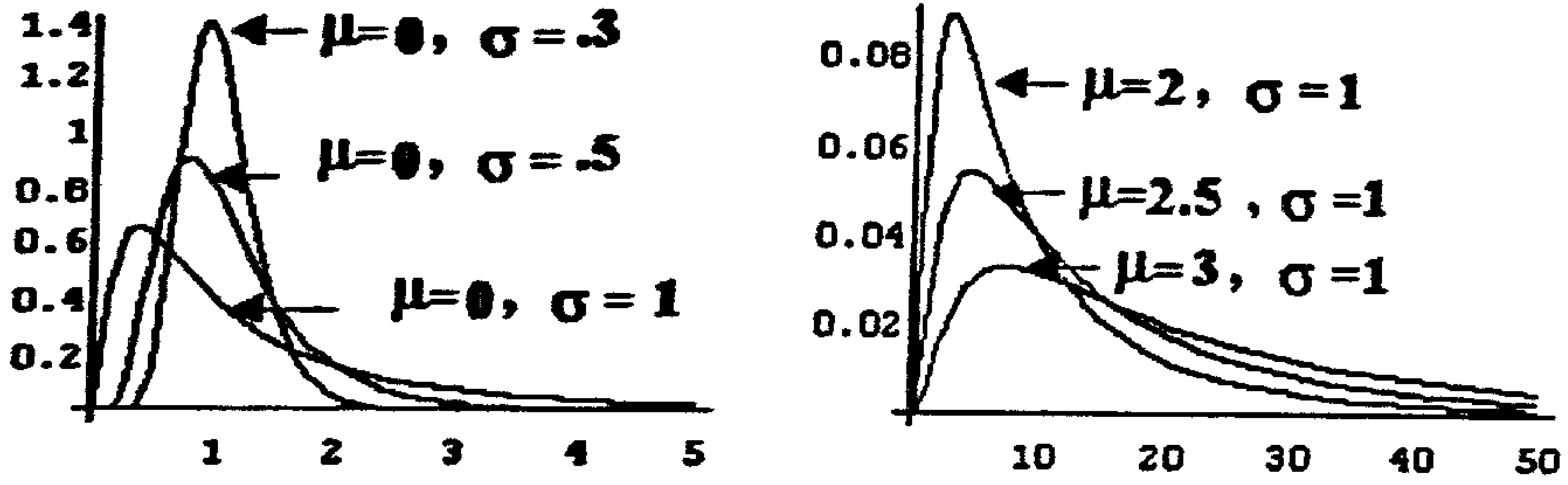
يقال للمتغير العشوائى X أنه يتبع التوزيع اللوغاريتمى إذا كان المتغير العشـــوائى $Y = \ln(X)$ يتبع التوزيع الطبيعى بمعلمتيـــن μ, σ^2 . دالـــة كثافـــة الاحتمـــال للمتغـــير العشوائى X تكون على الشكل :

$$f_1(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\, \bar{e}^{[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)} \qquad x \geq 0$$

$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

سوف نكتب $X \sim LOG(\mu,\sigma)$ للدلالة على أن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع اللوغاريتمي بمعلمتين μ,σ . ويجب أن نعلم أن μ,σ هنا ليست المتوسط والانحراف المعياري للمتغير X ولكنها للمتغير $\ln(X)$. بيان $f(x;\mu,\sigma)$ موضح في شكل (٦-١٩). حيث منحنى التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي له التواء موجب .

شكل (٦- ١٩)



لأن $\ln(X)$ يتبع التوزيع الطبيعي فإن دالة التوزيع المتغير X يمكن حسابها بدلالة دالة التوزيع للمتغير العشوائي Z حيث $Z \sim N(0,1)$ لقيم $x \geq 0$. أي أن :

$$F_1(x,\mu,\sigma)=P(X\leq x)=P(\ln(X)\leq \ln x)$$

$$=P\left(Z\leq \frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right).$$

العزم من الدرجة r حول الصفر هو :

$$\mu'_r = E(X^r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\int_0^{\infty} x^{r-1}\ \bar{e}^{[\ln(x)-\mu]/(2\sigma^2)}dx.$$

بوضع $Y = \ln X$ فإن :

$$\mu'_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} e^{ry} \; \bar{e}^{[y-\mu]^2/(2\sigma^2)} dy$$

$$= e^{r\mu + \frac{\sigma^2 r^2}{2}} \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

ومنها فإن :

$$E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2},$$

$$Var(X) = e^{2\mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1).$$

الوسيط للمتغير العشوائي $X \sim LOG(\mu, \sigma)$ يمكن الحصول عليه كالتالى :

$$F(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \int_0^{m_o} \bar{e}^{[\ln(x)-\mu]^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}.$$

أي أن :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\ln(m_o)} \bar{e}^{(y-\mu)^2/(2\sigma^2)} dy = \frac{1}{2}$$

ومنها $m_0 = e^{\mu}$

يمكن الحصول على المنوال وذلك بحل المعادلة التالية :

$$\frac{d \log f(x; \mu, \sigma)}{dx} = 0$$

تحت شرط أن :

$$\frac{d^2 \log f(x; \mu, \sigma)}{dx^2} < 0$$

ومنهـا :

$$m = \exp(\mu - \sigma^2)$$

مثال (٦-٢٩) إذا كان $X \sim LOG(3.5, 1.2)$ أوجـــد $E(X)$, $Var(X)$ وأوجـد $P(50 \le X \le 250)$.

الحل :

$$E(X) = e^{3.5+.72} = 68$$
$$Var(X) = e^{8.44}(e^{1.44}-1) = 14907.2 .$$
$$P(50 \le X \le 250)$$
$$= F(250; 3.5, 1.2) - F(50, 3.5, 1.2)$$
$$= \Phi\left(\frac{\ln(250)-3.5}{1.2}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(50)-3.5}{1.2}\right)$$
$$= \Phi(1.68) - \Phi(.34)$$
$$= .4535 - 0.1331 = .3204.$$

وذلك من جدول التوزيع الطبيعى القياسى في ملحق (٧) .

(٦-٩) توزيــع بيتــا Beta Distribution

يقال لمتغير عشوائى X أنه يتبع توزيع بيتا بمعالم a , b (a > 0 , b > 0) , A , B إذا كان له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x; a, b, A, B) = \frac{1}{B-A} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x-A}{B-A}\right)^{a-1} \left(\frac{B-x}{B-A}\right)^{b-1} \quad A \le x \le B$$
$$= 0 \ \text{elsewhere} .$$

المتوسط والتباين لمتغير عشوائى X يتبع توزيع بيتا بمعالم A, B, a, b هما :

$$\mu = A + (B-A) \cdot \frac{a}{a+b},$$
$$\sigma^2 = \frac{(B-A)^2 \ a b}{(a+b)^2 \ (a+b+1)}$$

مثــال (٦-٣٠) إذا كــــان X متغــــيرا عشــــوائيا يتبــــع توزيــــع بيتــــا حيــــث : $a = 2,\ b = 3\ \ A = 2,\ B = 5$

(أ) أوجد المتوسط للتوزيع.

(ب) $P(X \le 3)$

الحل :

(أ)

$$\frac{a}{a+b}=.4,$$

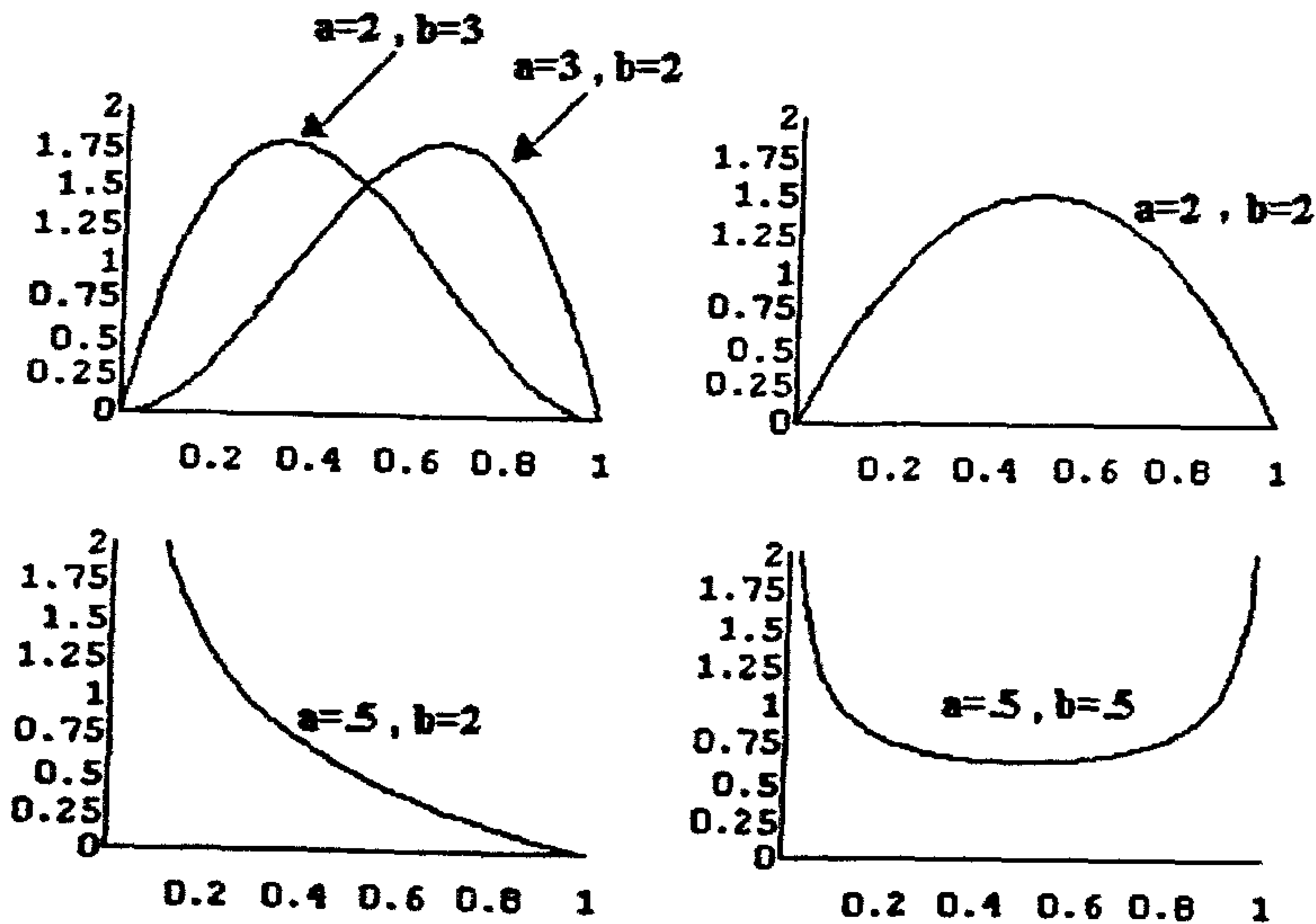
$$E(X)=2+3(.4)=3.2\ ,$$

$$P(X\le 3)=\int_2^3 \frac{1}{3}.\frac{4!}{1!2!}\left(\frac{x-2}{3}\right)\left(\frac{5-x}{3}\right)^2 dx$$

$$=\frac{4}{27}\int_2^3 (x-2)(5-x)^2 dx$$

$$=\frac{4}{27}.\frac{11}{4}=\frac{11}{27}=.407.$$

عندما $B=1$, $A=0$ نحصل على توزيع بيتا المعيارى (القياسى).بيان $f(x;a,b)$ موضـح في شكل (٦-٢٠) لقيم مختلفة من a , b . التكامل للدالة $f(x;a,b)$ سهلة فقـط عندمـا a , b تأخذ قيم صحيحة .



شكل (٦-٢٠)

مثال (٦-٣١) إذا كان X يتبع توزيع بيتا بمعلمتين $b=5$, $a=1$ أوجد $P(X \leq .1)$.

الحل :

$$P(X \leq .1) = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(5)\Gamma(1)} \int_0^{.1} x^0 (1-x)^4 \, dx$$

$$= 5 \int_0^{.1} x^0 (1-x)^4 \, dx$$

$$= -(1-x)^5 \Big|_0^{.1} = .6723 .$$

مثال (٦-٣٢) إذا كانت نسبة القوة العاملة العاطلة في يوم معطى تتبع توزيع بيتا بمعلمتيـــن $a=2$, $b=18$ أوجد :

$P(.2 < X < 1)$.

الحل :

$$P(.2 < X < 1) = \frac{\Gamma(20)}{\Gamma(2)\Gamma(18)} \int_{.2}^{.1} x \ (1-x)^{17} \, dx$$

$$= (19.18) \int_{0.2}^{.1} x(1-x)^{17} \, dx$$

$$= (19.18)\left\{\frac{-x(1-x)^{18}}{18}\right\} \Big|_{.2}^{1} + \frac{1}{18} \int_{0.2}^{.1} (1-x)^{18} \, dx$$

$$= (19.18)\left\{\frac{-x(1-x)^{18}}{18} - \frac{(1-x)^{19}}{18.19}\right\} \Big|_{.2}^{1}$$

$$= \{ -19x(1-x)^{18} - (1-x)^{19} \Big|_{.2}^{1} = .0829.$$

عندما $a=b=1$ فإن :

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} . x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} x^0 (1-x)^0 = 1.$$

وعلى ذلك تصبح دالة كثافة احتمال بيتا على الشكل :

$$f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

أي تصبح دالة التوزيع المنتظم في الفترة $(1, 0)$.

لإيجاد العزم من الدرجة r حول الصفر وإذا كان المتغير العشوائي X له توزيع بيتا بمعلمتيـــن a , b نتبع الآتي :

بفرض أن :

$$B(a,b)=\int_0^1 u^{a-1}\ (1-u)^{b-1}\ du .$$

وذلك لقيم $a \geq 0\ ,\ b \geq 0$ وعلى ذلك :

$$E(X)^r = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{a+r-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$
$$= \frac{B(a+r,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+r)\,\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(a+b+r)}.$$

حيث $r \geq 0$ وبوضع r=0 في الصيغة السابقة فإن $\int_0^1 f(x;a,b)\,dx = 1$ وبما أن $f(x;a,b) \geq 0$ لجميع قيم x في الفترة [0, 1] فإن هذا يبرهن أن (f (x; a, b دالة كثافة احتمال . بوضع $r=1$, $r=2$ فإن :

$$E(X) = \frac{\Gamma(a+1)\ \ \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\ \Gamma(a+b+1)} = \frac{a}{a+b}\ ,$$
$$E(X^2) = \frac{\Gamma(a+2)\ \ \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\ \Gamma(a+b+2)} = \frac{(a+1)(a)}{(a+b+1)(a+b)}\ ,$$

وعلى ذلك :

$$\mu = E(X) = \frac{a}{a+b}\ ,$$
$$\sigma^2 = E(X^2) - [\,E(X)\,]^2$$
$$= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

حسابات الاحتمـال Probability Calculations

إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع بيتا بمعلمتين a , b فإن دالة التوزيع تكـــون علـــى الشكل :

$$F(x;a,b) = 1 \qquad x > 1,$$
$$= I_x(a,b) \qquad 0 \le x \le 1$$
$$= 0 \qquad x < 1,$$
$$I_x(a,b) = \int_0^x \frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(a,b)}\,dt,$$
$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\ \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

حيث $I_x(a, b)$ تسمى دالة بيتا الناقصة incomplete beta function . فيما عدا إذا كـانت b = 1 فإن الدالة لا يمكن وضعها في صيغة بسيطة تشتمل على a, b, x ولذلك لا بـد مـن وجود جداول للأزواج المختلفة من (a, b) . بدلا من استخدام الجداول سوف نتـــاقش كيفيـــة الحصول على F(x; a, b) لعدد من الحالات :

أولا : عندما $a > 0$ و $b = 1$.

$$I_x(a,1) = \int_0^x \frac{t^{a-1}}{B(a,1)}\,dt = \int_0^x a\ t^{a-1}\,dt$$
$$= t^a \Big|_0^x = x^a.$$

حيث $B(a,1) = \Gamma(a+1) \ / \ \Gamma(a)\Gamma(1) = a$. عندما $a > 0$ و $b \ge 1$ فإن التكامل بالتجزئة للدالة $I_x(a, b)$ هو :

$$I_x(a,b) = \int_0^x \frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(a,b)}\,dt$$
$$= \frac{t^a(1-t)^{b-1}}{a\,B(a,b)}\Big|_0^x + \int_0^x \frac{(b-1)t^a(1-t)^{b-2}}{a\,B(a,b)}\,dt$$
$$= \frac{\Gamma(a+b)\ x^a\ (1-x)^{b-1}}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)} + I_x(a+1, b-1), \qquad (٦-١)$$

وذلك لأن :

$$\frac{a\ B(a,b)}{(b-1)} = \frac{a\ \Gamma(a)\ \Gamma(b)}{(b-1)\ \Gamma(a+b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+1)\ \Gamma(b)}{(b-1)\ \Gamma(a+b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+1)\ \Gamma(b-1)}{\Gamma(a+b)} = B(a+1,\ b-1).$$

الآن إذا كانت b عدد صحيح موجب فإن يمكن تكرار المعادلة (٦-١) كالتالي :

$$I_x(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)\ x^a\ (1-x)^{b-1}}{\Gamma(a+1)\ \Gamma(b)} + I_x(a+1, b-1)$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)\ x^a\ (1-x)^{b-1}}{\Gamma(a+1)\ \Gamma(b)} + \frac{\Gamma(a+b)\ x^{a+1}\ (1-x)^{b-2}}{\Gamma(a+2)\ \Gamma(b-1)} + I_x(a+2, b-2) = \ldots$$

(٦-٢)

$$= \sum_{i=a}^{a+b-2} \frac{\Gamma(a+b)\ x^i\ (1-x)^{a+b-1-i}}{\Gamma(i+1)\Gamma(a+b-i)} + I_x(a+b-1,\ 1)$$

$$= \sum_{i=a}^{a+b-2} \frac{\Gamma(a+b)\ x^i\ (1-x)^{a+b-1-i}}{\Gamma(i+1)\ \Gamma(a+b-i)} + x^{a+b-1}$$

$$= \sum_{i=a}^{a+b-1} \frac{\Gamma(a+b)\ x^i\ (1-x)^{a+b-1-i}}{\Gamma(i+1)\ \Gamma(a+b-i)}.$$

تذكر أنه عندما $a+b$ موجبة صحيحة فإن :

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(i+1)\Gamma(a+b-i)} = \frac{(a+b-1)!}{i!(a+b-1-i)!} = \binom{a+b-1}{i},$$

وعلى ذلك يمكن الحصول على النتيجة التالية من (٦-٢) عندما كل من a , b قيم صحيحة موجبة و $0 \le x \le 1$:

$$I_x(a,b) = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} x^i\ (1-x)^{a+b-1-i}$$

والذى يمثل احتمال متغير عشوائى U يتبع توزيع ذى الحدين ، بمعلمتين :
$p = x$, $n = a + b - 1$ يقع بين a (ويشملها) و $a + b - 1$. وعلى ذلك يمكن تلخيص العلاقة بين توزيع بيتا وتوزيع ذى الحدين كالتالي :

إذا كان X متغيرا يتبع توزيع بيتا بمعلمتين a , b حيث a , b عددين موجبين وصحيحين فإنه عندما $0 \le x \le 1$ يكون :

$$F_X(x) = P(a \le U \le a + b - 1)$$
$$= 1 - F_U(a - 1)$$

حيث U متغيرا عشوائيا يتبع ذى الحدين بمعلمتين $n = a + b - 1$, $p = x$.

مثال (٦-٣٣) إذا كان X يمثل نسبة تركيز الأكسجين المذاب في نهر عند نقطة معينة . توزيع X في الماء النقى يتبع بيتا بمعلمتين $a = 3$ و $b = 2$ أوجد :

(أ) $P(X \le .4)$

(ب) $P(X \le .2)$

الحل :

(أ)

$$P(X \le .4) = F_X(.4)$$
$$= P(3 \le U \le 3+2-1)$$
$$= P(U=3) + P(U=4)$$
$$= .1536 + .0256 = .1792 .$$

(ب)

$$P(X \le .2)$$
$$= F_X(.2) = P(3 \le U \le 4)$$
$$= .0256 + .0016 = .0272 .$$

باستخدام دالة التوزيع $F_X(x)$ أو العلاقات السابقة أو جداول $I_x(a, b)$ يمكن إيجاد الاحتمالات على الصورة $P(x_1 \le X \le x_2)$ أو $P(X > x_1)$.

مثال (٦-٣٤) في مرحلة معينة من النوم تسمى REM تكون مرتبطة بدرجة عالية بالأحلام إذا فرض باحث في مجال الأمراض النفسية أن X يمثل النسبة من زمن النوم الكلية والتي يقضيها الشخص في REM حيث X يتبع توزيع بيتا بمعلمتين : $a = 12$, $b = 48$ أوجد $P(.1 \le X \le .3)$.

الحل :

$$P(.1 \le X \le .3)$$
$$= F_X(.3) - F_X(.1)$$
$$= I_{.3}(12,48) - I_{.1}(12,28)$$
$$= 0.96507 - .01280 = .95227 .$$

والمستخرجة من الجدول التالى لـ I_x (12, 48)

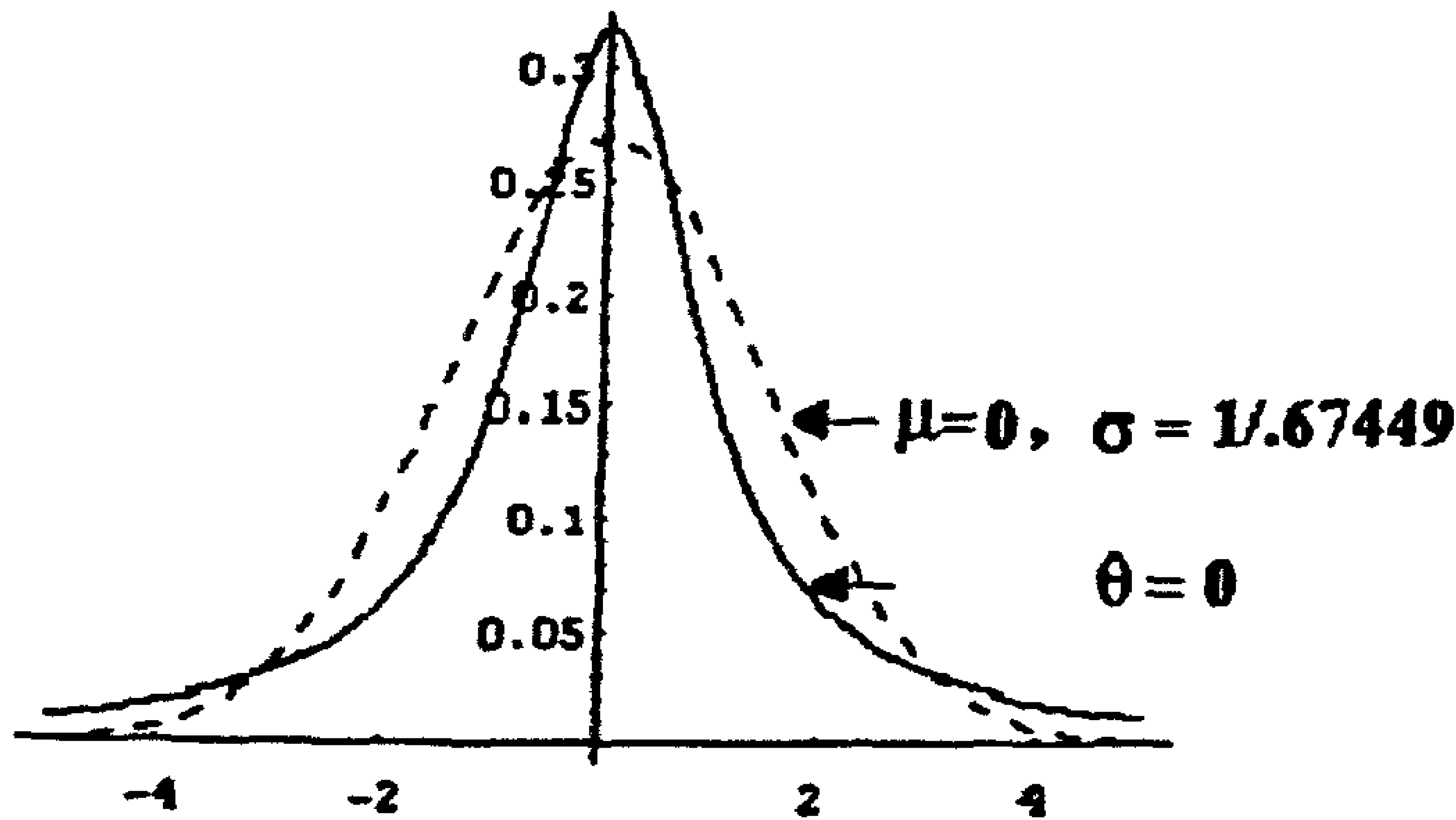
	.00	.02	.04	.06	.08
.0	.00000	.00000	.00000	.00017	.00219
.1	.01280	.04552	.11496	.22646	.37037
.2	.52582	.67041	.78857	.87468	.93127
.3	.96507	.98353	.99279	.99707	.99889
.4	.99961	.99987	.99996	.99999	1.00000

(٦- ١٠) توزيع كوشـى Cauchy Distribution

دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائى X يتبع توزيع كوشى بمعلمة θ تأخذ الشكل التالى :

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+(x-\theta)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

يشبه بيان دالة كوشى دالة التوزيع الطبيعى في إنه متماثل حول نقطة . هنـــا توزيـــع كوشـــى متماثل حول θ . وعلى ذلك يعتبر θ مقياس للموقع لهذا التوزيع . شـــكل (٦-٢١)يوضـــح دالة كوشى مع دالة كثافة الاحتمال لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي.



شكل (٦-٢١)

إذا كان X له توزيع كوشى فإن متوسطه يكون غير موجود . لبرهنة ذلك وبفرض أن المتوسط موجود فإن :

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x;\theta)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\theta) f(x,\theta)\,dx$$

$$+\theta \int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\theta) \ f(x;\theta)\,dx + \theta.$$

سوف نثبت أن التكامل على $(x-\theta) f(x;\theta)$ غير معرف ، في الفترة $-\infty < x < \infty$.

بوضع $v = x - \theta$ فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\theta) f(x;\theta) \ dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\theta}{1+(x-\theta)^2}\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{1+v^2} \ dv.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{v}{1+v^2}\,dv + \int_{0}^{\infty} \frac{v}{1+v^2} \ dv \right) \qquad (٦-٣)$$

بما أن $v/(1+v^2) \geq 0$ لكل $v \geq 0$, $v/(1+v^2) \geq \frac{1}{2}$ عندما $v > 1$ فإن :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{v}{1+v^2}\,dv \geq \int_{0}^{1} 0 \ dv + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{2} \ dv = \infty$$

وعلى ذلك التكامل لـــ $v/(1+v^2)$ على الفترة $(0,\infty)$ غير منتهى بمـــا أن $v/(1+v^2)$ دالة فردية في v و :

$$\infty = \int_{0}^{\infty} \frac{v}{1+v^2}\,dv = -\int_{-\infty}^{0} \frac{v}{1+v^2} \ dv \ ,$$

وعلى ذلك التكامل في (٦-٣) غير معرف .

دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائى X يتبع كوشى بمعلمتين يأخذ الشكل التالى :

$$f(x;\theta,\eta) = \frac{1}{\eta} \frac{\theta}{\theta^2 + (x-\eta)^2} \qquad -\infty < x < \infty \ .$$

الدالة المولدة للعزوم للدالة $f(x;\theta,\eta)$ غير معرفة وكذلك كل العزوم .

الوسيط يمكن الحصول عليه بحل المعادلة التالية :

$$F(m_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{m_0}\frac{\theta}{\theta^2(x-\eta)^2}\,dx=.5$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)\right]\Big|_{-\infty}^{m_0}=.5$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{m_0-\eta}{\theta}\right)\right]=0$$

أو $m_0=\eta$.

يمكن الحصول على المنوال بحل المعادلة :

$$\frac{d\left[\left(\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{\theta}{\theta^2+(m-\eta)^2}\right)\right]}{dx}=0.$$

ومنها $m=\eta$ حيث $\frac{d^2f(x;\theta,\eta)}{dx^2}<0$ عندما $m=\eta$.

(٦-١١) معالم المقياس والشكل

Location and Scale Parameters

في كل من التعريفات التالية $F_0(z)$, $f_0(z)$ تمثل توصيف كامل لدالة التوزيع ودالة كثافة الاحتمال على التوالي :

تعريف : معلمة الموقع location parameter : القيمة η تسمى معلمة الموقع لتوزيع X إذا كانت دالة التوزيع على الشكل :

$$F(x;\eta)=F_0(x-\eta).$$

وبطريقة أخرى :

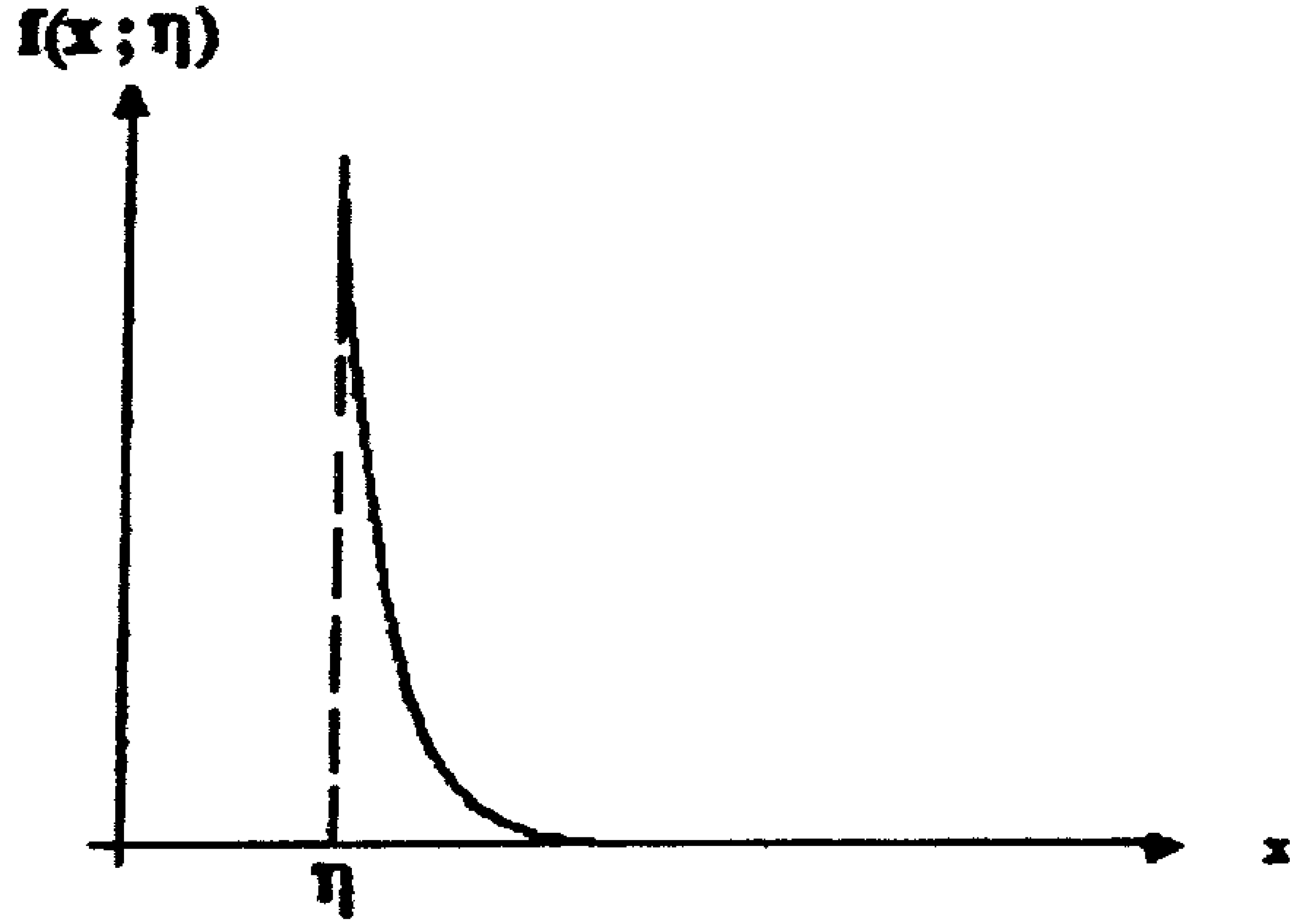
$$f(x;\eta)=f_0(x-\eta).$$

مثال (٦-٣٥) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x;\eta)=\bar{e}^{(x-\eta)}\qquad x>\eta$$

$$=0 \text{ elsewhere}.$$

بيان $f(x;\eta)$ موضح في شكل (٦-٢٢). يستخدم هذا التوزيع بكثرة في اختبارات الحياة. تستخدم معلمة الموقع كمقياس للنزعة المركزية للمتغير X مثل المتوسط والوسيط.



شكل (٦-٢٢)

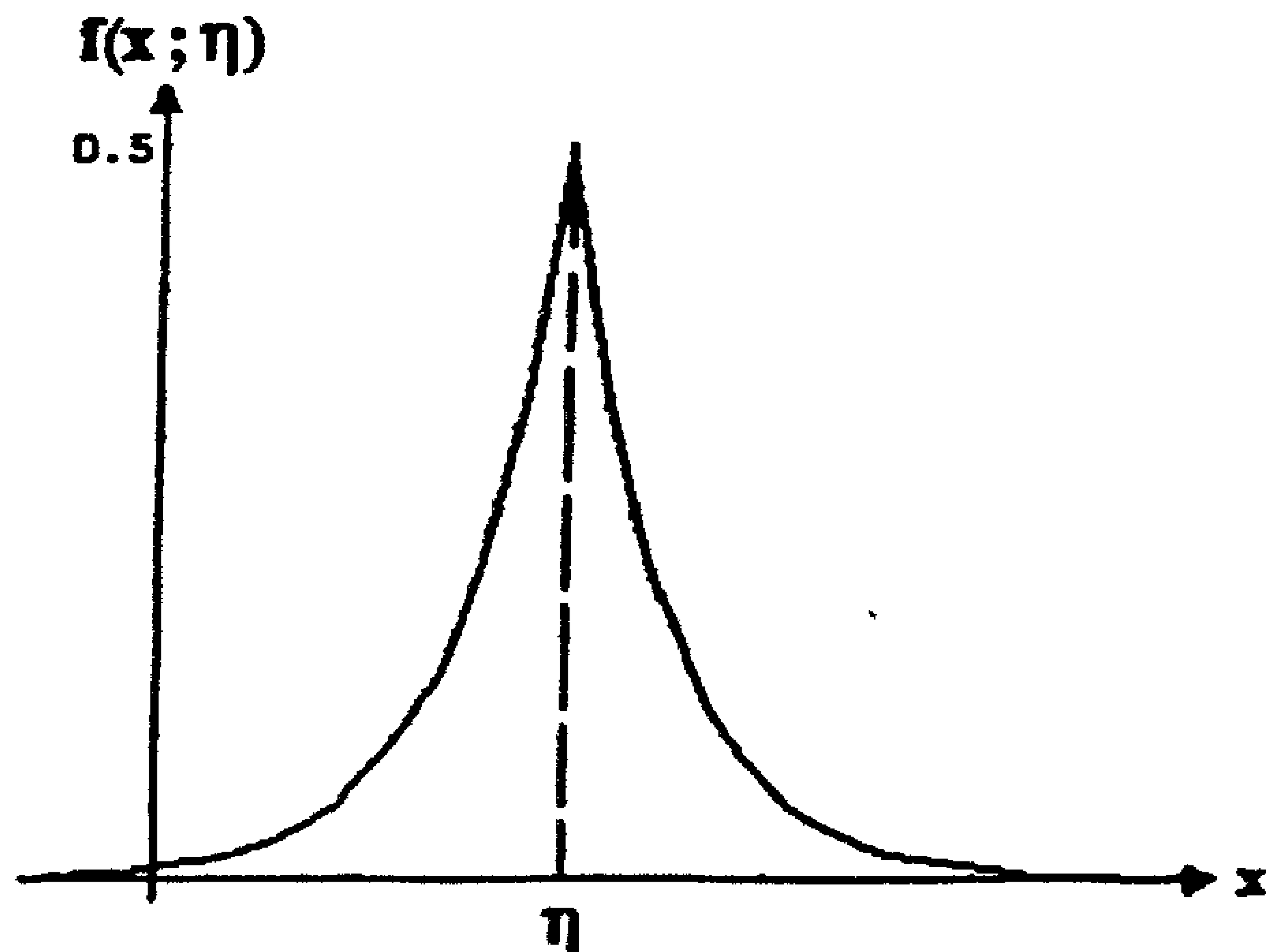
مثال (٦-٣٦) لتكن دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي Z على الصورة:

$$f_0(z) = \frac{1}{2}\ e^{-|z|} \qquad -\infty < z < \infty.$$

إذا كان X له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x;\eta) = \frac{1}{2}\ e^{-|x-\eta|} \qquad -\infty < x < \infty.$$

بيان $f(x;\eta)$ موضح في شكل (٦-٢٣) وعلى ذلك η هي (معلمة الموقع) متوسط التوزيع ولأن $f(x;\eta)$ متماثلة حول η ولها قيمة عظمى وحيدة η وعلى ذلك η هو الوسيط والمنوال لهذا التوزيع.



شكل (٦-٢٣)

تعريف : معلمة المقياس : تسمى القيمة الموجبة θ معلمة المقياس لتوزيع متغير عشـوائى X إذا كانت دالة التوزيع لها الشكل التالى :

$$F(x;\theta) = F_0\left(\frac{x}{\theta}\right).$$

من ناحية أخرى يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى X على الشكل :

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} f_0\left(\frac{x}{\theta}\right).$$

مثال (٦-٣٧) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim EXP(\theta)$ فإن θ تمثـل معلمـة المقياس . والانحراف المعياري σ هو θ . ولكن هذا لا يحدث دائما فعلى سبيل المثـال إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim WEI(\theta, 2)$ فإن θ تمثل معلمة المقياس ولكن ليسـت الانحراف المعياري للمتغير X .

تعريف : القيمتين η و $\theta > 0$ يمثلان معلمة الموقع والقياس على التوالى لمتغير عشـوائى X إذا كانت دالة التوزيع يمكن كتابتها على الشكل :

$$F(x;\theta,\eta)= F_0\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right).$$

ومن ناحية أخرى فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى X تأخذ الشكل التالى :

$$f(x;\theta,\eta)= \frac{1}{\theta}\ f_0 =\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right).$$

التوزيع الطبيعي هو مثال لدالة احتمال تحتوى على مقياس الموقع والمقيـاس . هنـاك أمثلـة أخرى مهمة كالتالي :

مثال (٦-٣٨) ليكن Z متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f_0(z)=\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{1+z^2} \qquad -\infty < z < \infty. \qquad (٦-٥)$$

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى X على الشكل $(1/\theta)f_0[(x-\eta)/\theta]$ حيث $f_0(z)$ معطاة في المعادلة (٦- ٥) وعلى ذلك يقال أن X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع كوشى بمعلمة موقع η ومعلمة قياس θ وسوف نكتب $X \sim CAU(\theta,\eta)$ للدلالة على أن X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع كوشى بمعلمتين η , θ.

مثال (٦-٣٩) إذا كان x متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x;\theta,\eta)=\frac{1}{\theta}\,\bar{e}^{\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)} \qquad x>\eta$$
$$=0 \text{ elsewhere}.$$

الدالـــة $f(x;\theta,\eta)$ تســمى التوزيــع الأســى بمعلمتيــن وســوف نرمــز لــها بــالرمز $X \sim EXP(\theta,\eta)$.

التوزيع ذو المعلمتين والذي يعتمد على دالة كثافة احتمال $f_o(z)$ في مثـال (٦-٣٦) يسمى توزيع لابلاس أو التوزيع الأسى المزدوج ويعرف كالتالى $X \sim DE(\theta,\eta)$.

أيضاً يمكن أن يكون للتوزيع ثلاثة معالم وذلك باستبدال الدالة $f_o(z)$ بالدالـة $f_Z(z)$ والتي تعتمد على معلمة أخرى تسمى معلمة الشكل، لتكن β. فعلى سبيل المثال إذا كـــان $Z \sim WEI(1,\beta)$ فإن X يتبع وايبل بثلاثة معالم حيث η معلمة الموقع و θ معلمة القياس و β معلمة الشكل حيث دالة كثافته الاحتمالية على الشكل :

$$f(x;\theta,\eta,\beta)=(1/\theta)\ f_Z[(x-\eta)/\theta].$$

حيث يكتب $X \sim WEI(\theta,\eta,\beta)$. بنفس الشكل إذا كان $Z \sim GAM(1,k)$ فإن X لـــه توزيع جاما بثلاثة معالم حيث يكتب $X \sim GAM(\theta,\eta,k)$.

تمـــارين :

-١- إذا كان $X \sim UNIF(50,75)$ أوجد :

(أ) دالة التوزيع للمتغير X .

(ب) $P(10<X<70)$.

(ج) $E(X)$.

(د) $Var(X)$.

-٢- إذا كان $Q \sim UNIF(0, 3)$ أوجد الاحتمال أن جذور المعادلة $g(t) = 0$ حقيقة حيث $g(t) = 4t^2 + 4Qt + Q + 2$.

-٣- بفرض أن x قيمة اختيرت عشوائياً من الفترة [0, 10] حيث $X \sim UNIF(0, 10)$. القيمة x تقسم الفترة [0, 10] إلى فترتين .

(أ) أوجد دالة التوزيع لأقصر فترة .

(ب) ما هو الاحتمال لنسبة طول أقصر فترة إلى أطول فترة أقل من ¼ ؟

-٤- إذا كان زمن الحياة للفار الأبيض المعرض لمستوى معين من أشعة X متغير عشوائي حيث $X \sim GAM(5, 4)$ أوجد :

(أ) $P(X < 15)$.

(ب) $P(5 < X < 20)$ ، القيمة المتوقعة لزمن الحياة ، $E(X)$.

-٥- إذا كان الزمن (مقاس بالدقائق) ، لدخول العميل رقم 3 في يوم ما مركز لبيع الأغذية يمثل متغير عشوائي حيث $X \sim GAM(1, 3)$. إذا فتح المركز الساعة 8 صباحاً أوجد الاحتمال :

(أ) العميل الثالث يصل بين 8: 05 , 8:10 .

(ب) العميل الثالث يصل بعد 8: 10 .

(ج) أوجد بيان f(x) .

-٦- إذا كان $X \sim GAM(1, 2)$ أوجد المنوال ؟

-٧- للوحة سويتش ، بفرض أن الزمن X (مقاس بالدقائق) حتى وصول المكالمة الثالثة في يوم ما متغيراً عشوائيا يتبع توزيع جاما بمعلمة مقياس $\theta = 2$ و معلمة الشكل $k = 3$.

-٨- إذا كان Y متغير عشوائي يتبع جاما بمعلمتين θ, k . اثبت أن المنوال للمتغير Y يساوى 0 إذا كان $K \leq 1$. عندما $K > 1$ أوجد صيغة المنوال للمتغير Y . ثم أثبت أنه لكل قيم k, θ للمتغير Y يكون أقل من μ .

٩- استخدم الجدول في إيجاد $p\,(5 \le X \le 10)$ عندما X يتبع توزيع جامـا بمعلمتيـن $\theta = .5 \quad k = 3$.

١٠- إذا كانت $(1-2t)^{-6}, t < \frac{1}{2}$ هي الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي X . أوجـد $P\,(X < 5.23)$.

١١- إذا كانت X تتبع توزيع جاما بمعالم $\theta = 4, K = 3$ أوجد $P(3.28 < X < 25.2)$. ملحوظة اعتـبر الاحتمـال المكـافئ $(12.6 > Y > 1.64)\ P$ حيـث $Y = 2X/4 = X/2$.

١٢- إذا كانت X تتبع توزيع جاما بدالة كثافة احتمال

$$f(x) = \frac{1}{\theta^2} x\ \bar{e}^{x/\theta} \qquad 0 < x < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

إذا كانت $x = 2$ هو المنوال الوحيد للتوزيع أوجد $P(X < 9.49), \theta$.

١٣- إذا كان X متغير عشوائي يتبع بواسون بمعلمة m . إذا كانت m هي قيمـة لمتغـير عشوائي يتبع جاما بمعلمتين $\theta = 1,\ k = 2$ أحسب $P\,(X = 0, 1, 2)$.

١٤- إذا كان $X \sim EXP\,(1)$ و $Y \sim GAM\,(2, 2)$ و $(\mu_X = \mu_Y)$

(أ) مقارنة σ_X^2 مع σ_Y^2 .

(ب) قارن بين $P(X - \mu_X > 2\sigma_X)$ مع $P(Y - \mu_Y > 2\sigma_Y)$

١٥- إذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل الزمن اللازم لقراءة رسالة (مقاس بالدقائق) يتبـع التوزيع الأسى حيث $X \sim EXP\,[2]$ أوجد :

(أ) $P\,(X > 1)$

(ب) الوسيط والمئين من الرتبة (90) لتوزيع المتغير X .

-١٦- إذا كان $X \sim \exp(\theta)$ أوجد :

$$E(X-\mu)^4 \quad , E(X-\mu)^3$$

وإذا كانت لوحة السويتش تعمل من عند الزمن 8 صباحاً أوجد الاحتمـــال باعتبـــار أن المكالمة الثالثة تصل أقل 06: 8 صباحاً .

-١٧- بفرض أن المتغير Q في التمرين 2 يتبع $Q \sim PXP(1.5)$ أوجـــد الاحتمـــال أن جذوره = $g(t)$ حقيقة .

-١٨- بفرض أن الزمن (مقاس بالساعات) حتى فشل ترنزستور متغير عشوائي حيـــث : $X \sim EXP(100)$

(أ) أوجد $P(X > 15)$ (ب) $P(X > 10)$.

(ج) بفرض أنه تم فحص ترنزستور بعد 95 ساعة مـــن عملـــة أوجـــد الاحتمـــال الشرطي أن $X > 110$.

(د) أوجد $Var(X)$.

-١٩- للتوزيع التالي :

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta^2}\right) \qquad 0 < x < \infty$$

أوجد : (أ) العزوم الأربعة الأولى حول الصفر .

(ب) المنوال . (ج) الوسيط .

-٢٠- أوجد الثابت c بحيث أن $f(x) = \bar{e}^{x^2+4x}, -\infty < x < \infty$ تحقق شرطي دالة كثافة الاحتمال.

-٢١- إذا كان $X \sim WEI(400, 2/3)$ أوجد :

(أ) $P(X > 410)$ (ب) $P(X > 410 | X > 395)$

(ج) $E(X)$ (د) $Var(X)$.

٢٢- إذا كانت المسافة من مكان التصويب لبندقية (مقاس بالمتر) إلـــى الــهدف متغــير عشوائي X حيث (X ~ WEI (10, 2 أوجد :

(أ) $p\,(X > 20)$ (ب) وضح $f\,(x)$ بيانيا .

(ج) أوجد $E(X)$ و $Var\,(X)$.

٢٣- أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الصفر للتوزيع التالي :

$$f(x) = \frac{b(x-A)^{b-1}}{\theta} \exp\left(-\left(\frac{X-A}{\theta}\right)^{b}\right) \qquad A < x < \infty$$

٢٤- إذا كان (X~WEB(10, 2 , 3 أوجد :

(أ) μ_X (ب) σ_X^2 (ج) المنوال (د) الوسيط .

٢٥- إذا كان $X \sim PAR(\theta, K)$ أوجد :

(أ) $E\,(X^1)\ ,\ K > 1$

(ب) $E\,(X^2)\ ,\ K > 2$.

٢٦- إذا كان (X ~ PAR (100, 3 أوجد $E(X)\ ,\ Var\,(X)$.

٢٧- إذا كان $X \sim PAR(\theta, K)$ أوجد :

(أ) المئين للمتغير X . (ب) أوجد الوسيط للمتغير X .

إذا كانت $a = 10\ ,\ k = 2$.

٢٨- بفرض أن (Z ~ N (0, 1 أوجد الاحتمالات التالية :

(أ) $P\,(Z \le 1.53)$ (ب) $P\,(Z > -.49)$

(ج) $P\,(.35 < Z < 2.01)$ (د) $P\,(|Z| > 1.28$.

٢٩- أوجد القيمة b , a بحيث :

(أ) $P\,(Z \le a) = .648$ (ب) $P(|Z| < b) = .95$

٣٠- إذا كان $X \sim N\ (3;\ .16)$ أوجد الاحتمالات التالية :

(أ) $P(X > 3)$ (ب) $P(X > 3.3)$

(ج) $P(2.8 < X < 3.1)$ (د) أوجد الميئن 9.8 للمتغير X .

(هـ) أوجد القيمة C . بحيث أن $P(3-c < X < 3+c) = .9$.

٣١- إذا كان $X \sim N\ (10,\ 16)$ أوجد :

(أ) $P(X \le 14)$ (ب) $P(4 < X < 18)$

(ج) $P(2X - 10 < 18)$ (د) المينه .

٣٢- إذا كان كمية الضوء X (مقاس lumens $x_{.95}$) والمنتج من مصباح كهربائى من نوع ما يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط $\mu = 350$ وتباين $\sigma^2 = 400$ أوجد :

(أ) $P(325 < X < 363)$

(ب) القيمة c بحيث أن كمية الضوء المنتج من 90% من المصابيح سوف يزيد عن c (مقاس lumens) .

٣٣- بفرض أن $X \sim N\ (1,\ 2)$ أوجد :

(أ) $E(X-1)^4$ (ب) $E(X^4)$.

٣٤- أوجد $F(.8963)$, $F(-2.76431)$ حيث :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

٣٥- إذا كان Y متغير عشوائي حيث $Y \sim GAM(\theta, k)$ أوجـد $\mu_Y^{(r)} = E(Y - \mu_Y)^r$ حيث $r = 3, 4$ عندما $k \to \infty$ أثبت أن $\mu_Y^{(3)} \to 0$ و $\mu_Y^{(4)} / \sigma_Y^4 \to 3$. مـا هي العلاقة بين توزيع جاما والتوزيع الطبيعي عندما r تكون كبيرة .

٣٦- إذا كانت $N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{w^{2/2}} dw$ أثبت أن $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.

٣٧- إذا كانت $X \sim N\ (75,\ 100)$ أوجد :

$P(70 < X < 100)\ ,\ P(X < 60)$

٣٨- إذا كان $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ أوجد b بحيث أن :

$P(-b < (X-\mu)/\sigma < b) = .9$

٣٩- إذا كان $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ بحيث أن :

$P(X < 94) = .95\ ,\ P(X < 89) = .9$ أوجد μ, σ^2 .

٤٠- أوجد المئين الثامن لتوزيع $N(65\ ,25)$.

٤١- إذا كانت e^{+8tz} هـــي الدالـــة المولـــدة للعـــزوم لمتغـــير عشـــوائي X أوجـــد :

$P(-1 < X < 9)$.

٤٢- إذا كان X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, \bar{e}^{x^2/2} \qquad 0 < x < \infty$$

أوجد المتوسط والتباين للمتغير X .

٤٣- إذا كان $X \sim N(5, 10)$ أوجد :

$P(.04 < (X-5)^2 < 38.4)$.

٤٤- إذا كان $X \sim N(1, 4)$ أحسب :

$p(1 < X^2 < 9)$.

٤٥- إذا كان الزمن اللازم لهضم وحدة واحدة من طعام معين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 25 دقيقة وانحراف معياري قدره 3 دقائق . ما هو احتمال أن تهضم وحدة طعـام في أقل من 30 دقيقة ؟

٤٦- أوزان الدجاج في مزرعة ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 6 رطل وانحراف معياري 1.5 أوجد :

(أ) احتمال أن يكون وزن الدجاجة اختيرت عشوائيا اكبر من سبعة أرطال .

(ب) نسبة الدجاج الذي وزنه اقل من أربعة أرطال .

٤٧- تنتج ماكينة للمشروبات الباردة في المتوسط 7 أوقيات من العصير لكل كوب. بفرض أن كمية الشراب يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 0.5 أوقية . المطلوب :

(أ) نسبة الأكواب التي تحتوي على الأقل 7.8 أوقية .

(ب) ما هو احتمال أن كوب يحتوي من بين 6.7 إلى 7.9 أوقية .

٤٨- يقطع شخص المسافة من منزله إلى عمله يومياً في زمن قدره 24 دقيقة في المتوسط بانحراف معياري 3.8 دقيقة . بفرض أن الزمن الذي يستغرقه يوميا يتبع التوزيع الطبيعي . أوجد احتمال أن الزمن الذي يستغرقه على الأقل نصف ساعة.

٤٩- إذا كانت أطوال 1000 طالبا تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 68.5 بوصة وانحراف معياري 2.7 بوصة. كم عدد الطلبة المتوقع أن تكون أطوالهم : (أ) اقل من 63 بوصة . (ب) بين 67.5 الى 71 بوصة . (جـ) تساوي 69 بوصة . (د) اكبر من 74 بوصة .

٥٠- تدفع شركة أجور العاملين فيها بمتوسط 100 جنيه لكل ساعة بانحراف معياري 5 جنيه. إذا كانت الأجور تقريباً تتبع التوزيع الطبيعي. ما هي النسبة المئوية من للعاملين الذين أجورهم تتراوح بين 80 إلى 90 في الساعة ؟

٥١- إذا كان معدل الذكاء I.Q لمجموعة من الطلبة الراغبين في الالتحاق في جامعة ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 115$ وانحراف معياري $\sigma = 12$.أوجد احتمال أن يكون معدل الذكاء أكبر من 120.

٥٢- إذا كان متوسط العمر لمولد كهربائي صغير هو 10 سنوات بانحراف معياري 2 سنة. أوجد احتمال أن يقل عمر المولد عن 8 سنوات.

-٥٣- إذا كانت درجة الحرارة في مدينة ما يتبع التوزيـــع الطبيعـــي بمتوســـط 20 درجـــة وانحراف معياري 3 درجات. أوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة في أحد الأيام اقـل من 25 درجة.

-٥٤- إذا كان قطر السلك الكهربي من إنتاج شركة ما يتبع التوزيـــع الطبيعـــي بمتوســـط 8 ملليمتر وتباين 0.0004 ملليمتر. اشتري شخص سلك فما هـــو احتمـــال أن قطـــره لا يتعدي 8.0 ملليمتر .

-٥٥- إذا كان $\ln(X)$ يتبع التوزيع الطبيعى بمتوســـط μ وتبـــاين 4 أوجـــد الاحتمـــال $P(1.202 < X < 8.318)$.

-٥٦- أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الصفر للتوزيع التالي :

$$f(x)=\frac{1}{B(a,b)}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \qquad 0<x<\infty$$

-٥٧- أثبت لتوزيع بيتـــا على الشكل :

$$f(x)=\frac{1}{B(m,n)}(1-x)^{m-1}\ x^{n-1} \qquad 0<x<1$$

أن المتوسط هو $\frac{m}{m+n}$ = و الوسط التوافقي هو $\frac{m-1}{m+n-1}$.

-٥٨- للتوزيع التالي :

$$f(x)=\frac{(x+a)}{a^2} \qquad -a<x<0$$

$$=\frac{(x-a)}{a^2} \qquad a<x<a$$

$$=0 \text{ elsewher}.$$

أوجد : (أ) $F\left(\frac{-a}{2}\right)$, $F\left[\frac{a}{2}\right]$

(ب) العزوم الربعة الأولى حول الصفر .

-٥٩- إذا كان X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمال على الشكل :

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{\theta^3\sqrt{\pi}}x^2\ \exp\left(-\frac{x^2}{\theta^2}\right) \qquad 0<x<\infty$$

$$=0 \text{ elsewher}.$$

أوجد (أ) العزوم الأربعة الأولى حول الصفر .

(ب) المنوال . (ج) الوسيط .

-٦٠- إذا كان $X \sim WEI(\theta,\beta)$ أوجد $E(X^k)$ تحت فرض أن $K > -\beta$.

الفصل السابع

التوزيعات المشتركة

Joint Distributions

(٧-١) المتغيرات العشوائية المتعددة

Severals Random Variables

فى كثير من التطبيقات يكون الاهتمام بأكثر من متغير عشوائى $X_1,X_2,...,X_3$. لذلك يكون من المناسب رياضيا النظر إلى تلك المتغيرات كمكونات لمتجه X أبعاده (kx1) ، $X=(X_1,X_2,...,X_k)$ ، والمسمى بالمتجه العشوائى وهذا يجعلنا نفترض القيم $x=(x_1,x_2,...,x_k)$ في البعد k . فعلى سبيل المثال القيمة المشاهدة x هى نتيجة قياس k من الصفات مثل قياس الطول والوزن وضغط الدم ... إلى k من الصفات لمشاهدة ما أو قد تكون النتائج التى عددها k لمحاولات متكررة لتجربة عشوائية تهتم بمتغير واحد. لتوضيح ذلك سوف نبدأ بالمثال التالى. بفرض أن عملة ألقيت ثلاثة مرات وإذا كان اهتمامنا فى عدد مرات ظهور الصورة فى الرمية الأولى والثانية وأيضا فى عدد مرات ظهور الصورة فى الرميات الثلاثة. وعلى ذلك فإن فضاء القيمة سوف يكون:

$$S = \{a \mid a_i,\ i = 1,2,...,8\},$$

حيث :

$$a_1 = TTT\ , a_2 = TTH\ , a_3 = THT$$
$$a_4 = HTT\ , a_5 = THH\ , a_6 = HTH$$
$$a_7 = HHT\ , a_8 = HHH$$

وإذا كان X_1,X_2 دالتين بحيث أن:

$X_1(a_1)=X_1(a_2)\ =0\ , X_1(a_3) = X_1(a_4) = X_1(a_5) = X_1(a_6) = 1, X_1(a_7) = X_1(a_8) = 2, X_2(a_1) = 0, X_2(a_2) = X_2(a_3) = X_2(a_4) = 1, X_2(a_5) = X_2(a_6) = X_2(a_7) = 2\ , X_2(a_8) = 3$

وعلى ذلك X_1,X_2 دالتين حقيقيتين معرفتين على فضاء العينة S حيث يعنيان لكل نقطة فى فضاء العينة نقطة واحد فى الفضاء R حيث :

$$R = \{(x_1,x_2)|(x_1,x_2) = \{\{0,0\},\{0,1\},\{1,1\},\{1,2\},\{2,2\},\{2,3\}\},$$

حيث X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين معرفين على الفضاء R وفى هذا المثال فضاء المتغيرين العشوائيين في البعد الثاني R . الأن سوف نضع تعريف لفضاء متغيرين عشوائيين.

تعريف: اعتبر تجربة عشوائية بفضاء S وبفرض X_2 , X_1 متغيرين عشوائيين واللذين يعينان لكل عنصر a فى S زوج مرتب واحد فقط من الأعداد $X_1(a)=x_1$ و $X_2(a)=x_2$. فضاء X_2,X_1 هو الفئة من الأزواج المرتبة أى أن :

$a \in S$ و

$$R = \{(x_1,x_2) | \, x_1 = X_1(a) \, , \, x_2 = X_2(a)\}.$$

بفرض أن R هو الفضاء المرتبط بالمتغيرين X_1 , X_2 وإذا كانت B فئة جزئيـــة مــن R ، وكما هو الحال فى متغير عشوائى واحد سوف يكون اهتمامنا بالحادثـــة B. ســوف تعـرف احتمال الحادثة B ، والتى ترمز لها بالرمز $P[(X_1 \, , X_2) \in B]$. وإذا كانت الفئة A علـــى الشكل :

$$A = \{a | a \in S \, , [X_1(a), X_2(a)] \in B\},$$

حيث R هو فضاء المتغير العشوائى وعلى ذلك:

$$P[(X_1 \, , X_2) \in B] = P(A),$$

حيث P دالة الفئة الاحتمالية المعرفة للفئة A و $A \subset S$ ، مرة أخرى سوف تعين $P[(X_2 \, , X_1) \in B]$ بدالة الفئة الاحتمالية $P_{X_1,X_2}(B)$ ولكن للتسهيل سوف نكتب :

$$P(B) = P[(X_1 \, , X_2) \in B].$$

مرة أخرى يكون من الضرورى التحقق من أن هذه الدالة تمثل دالة فئة احتمالية معرفة علـــى الفئة B حيث $B \subset R$.

بالعـــودة إلى مثالنا الخاص بمتغيرين عشوائيين وبفرض أن الفئة الجزئية B حيث $B \subset R$ هي : $B = \{(x_1,x_2) | (x_1,x_2) = (1,1),(1,2)\}$ لحساب $P\{(X_1,X_2) \in B\} = P(B)$ نجـد أن $X_1(a_3)=1$ و $X_1(a_4)=1$ و $X_1(a_5)=1$ و $X_1(a_6)=1$. أيضــــا $X_2(a_3)=1$ و $X_2(a_4)=1$ و $X_2(a_5)=2$ و $X_2(a_6)=2$ وعلى ذلك :

$$P(B) = P[(X_1,X_2) \in B] = P(A).$$

حيث :

$$A = \{a | a = a_3, a_4, a_5, a_6\}.$$

وبفرض أن دالة الفئة الاحتمالية $P(A)$ عينت الاحتمال $\frac{1}{8}$ لكل عنصر من العناصر الثمانيـــة فى فضاء العينة S فإن $P(B)$ والتى يمكن كتابتها على الشكل($P(X_1=1, X_2=1 \text{ or } 2)$ تساوى

$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$. وبنفس الطريقة يمكن تعيين الاحتمال لكل عنصر فى الفضاء R . يعطى الجدول التالي الاحتمالات المختلفة لقيم المتغيرين X_1 , X_2 :

(x_1,x_2)	(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(2,3)
$P[(X_1,X_2)=(x_1,x_2)]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

هذا الجدول يوضح لنا كيفية توزيع الاحتمالات المختلفة على عناصر الفضاء R والمرتبط بالمتغيرين X_1 , X_2 وبنفس الشكل يمكن تعميم الصيغ السابقة لعدد k من المتغيرات العشوائية.

تعريف: اعتبر تجربة عشوائية بفضاء S . إذا كان المتغير العشوائى X_i يعين لكل عنصر $a \in S$ عدد حقيقى واحد فقط $X_i(a)=x_i$ حيث $i=1,2,\ldots,k$ فإن فضاء المتغيرات العشوائية هو الفئة من الترتيبات التى عددها k أي أن :

$$R=\{(x_1,x_2,\ldots,x_k)|x_1=X_1(a),\ldots,x_k=X_k(a),\ a\in S\}.$$

وإذا كانت B فئة جزئية من R فإن :

$$P[(X_1,\ldots,X_k)\in B]=P(A),$$

حيث :

$$A=\{a|a\in S\ ,[X_1(a),\ldots,X_k(a)]\in B\},$$

مرة أخرى فإن $P[(X_1,\ldots,X_k)\in B]$ تقدر بدالة الفئة الاحتمالية $P_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(B)$ ولكن للتسهيل سوف نكتبها $P(B)$.

عادة فى الإحصاء يكون اهتمامنا بدالة الفئة الاحتمالية لمتغيرات العشوائية اكثر من اهتمامنا بدالة الفئة الاحتمالية $P(A)$ وفضاء العينة S. وعلى ذلك نبدأ بتعريف توزيع احتمالى للمتغيرات العشوائية تحت الدراسة كما يتضح من المثال التالى.

مثال (٧-١): إذا كان فضاء متغيرين عشوائيين X_1 , X_2 على الشكل:

$$R = \{(x_1,x_2) | 0 < x_1 < x_2 < 1\}$$

وإذا كانت دالة الفئة الاحتمالية على الشكل:

$$P(B) = \iint_B 2\, dx_1\, dx_2.$$

وإذا كانت B على الشكل :

$$B_1 = \{x_1, x_2 \mid \frac{1}{2} < x_1 < x_2 < 1\},$$

فإن :

$$P(B_1) = P[(X_2\ , X_1) \in B_1]$$

$$= \int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{x_2} 2\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{4},$$

وإذا كانت B على الشكل :

$$B_2 = \{(x_1,x_2) | x_1 < x_2 < 1\ ,\ 0 < x_1 \le \frac{1}{2}\}$$

فإن :

$$P(B_2) = P[(X_2\ , X_1) \in B_2] = P(B_1^c)$$
$$= 1 - P(B_1) = \frac{3}{4}.$$

(٧-٢) التوزيعات المتقطعة المشتركة

Joint Discrete Distributions

يمكن تعميم الصيغة المستخدمة لدالة كثافة الاحتمال في حالة متغير عشوائي واحد إلى الصيغة لدالة كثافة الاحتمال لمتغيرين أو أكثر .

تعريف: دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتجه عشوائي من النوع المتقطع $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ تعرف كالتالي :

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k)$$

وذلك لكل القيم الممكنة من $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$.

نظرية (٧-١): يقال للدالة $f(x_1,x_2,...,x_k)$ أنها دالة كثافة احتمال مشتركة للمتجه العشوائي $X=(X_1,X_2,...,X_k)$ من النوع المتقطع إذا وفقط إذا حققت الشروط التالية:

(أ) $f(x_1,x_2,...,x_k) \geq 0$ لجميع القيم الممكنة $(x_1,x_2,...,x_k)$.

(أ) $\sum\limits_{x_1}...\sum\limits_{x_2} f(x_1,x_2,...,x_k)=1.$

وعلى ذلك دالة الفئة الاحتمالية $P(B)$ حيث $B \subset R$ يمكن التعبير عنها على الشكل:

$$P(B)=P[(X_1,...,X_k)\in B]$$

$$=\sum_B ... \sum f(x_1,x_2,...,x_k) \ .$$

لمتغيرين عشوائيين من النوع المتقطع يمكن وضع دالة كثافة الاحتمال المشتركة في جدول مزدوج يبين قيم كل المتغيرين X_1,X_2 مع الاحتمالات المقابلة لهما وخصوصا إذا كانت الصيغة لدالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين X_1,X_2 غير معروفة.

مثال (٧-٢): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك لمتغيرين X_1,X_2 معطاة فى الجدول التالى :

x_1 \ x_2	0	1	2	3	
0	.008	.048	.096	.064	.216
1	.048	.192	0.192	.000	.432
2	.096	.192	.000	.000	.288
3	.064	.000	.000	.000	.064
	.216	.432	.288	.064	1

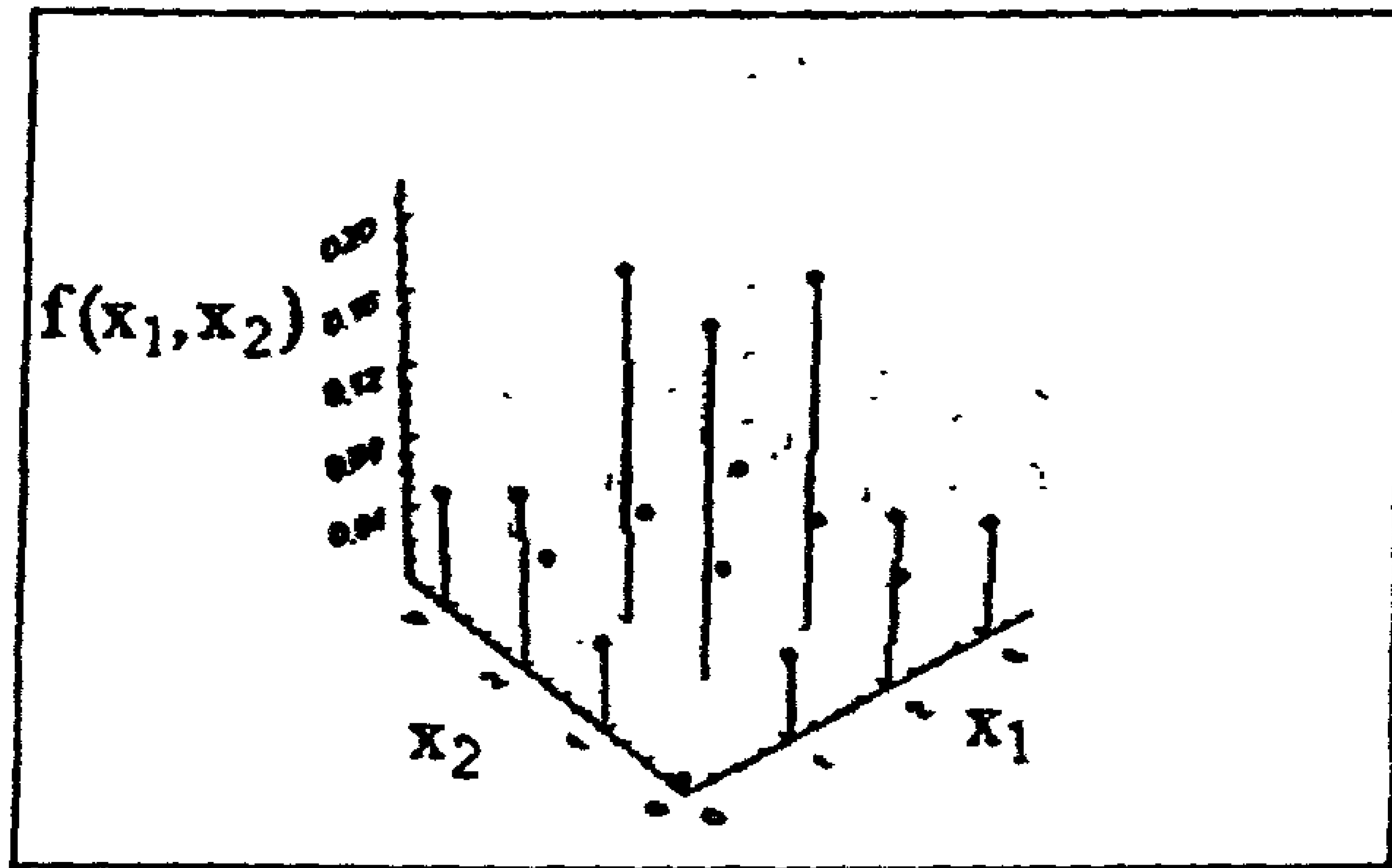
يتضح من الجدول أن :

$$\sum_{x_1=0}^{3} \sum_{x_2=0}^{3} f(x_1,x_2)=1.$$

كما أن هناك بعض النتائج المستحيلة الحدوث مثل (3,3) أو (1,3) والتى يعين لكل منهما الاحتمال صفر. كما أن على سبيل المثال :

$$f(0,0) = P(X_1=0, X_2=0) = .008,\ f(1,2) = P(X_1=1, X_2=2) = 0.192.$$

بيان $f(x_1,x_2)$ موضح فى شكل (٧-١)



شكل (٧-١)

مثال (٧-٣) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة والمعطاة فى الجدول التالى :

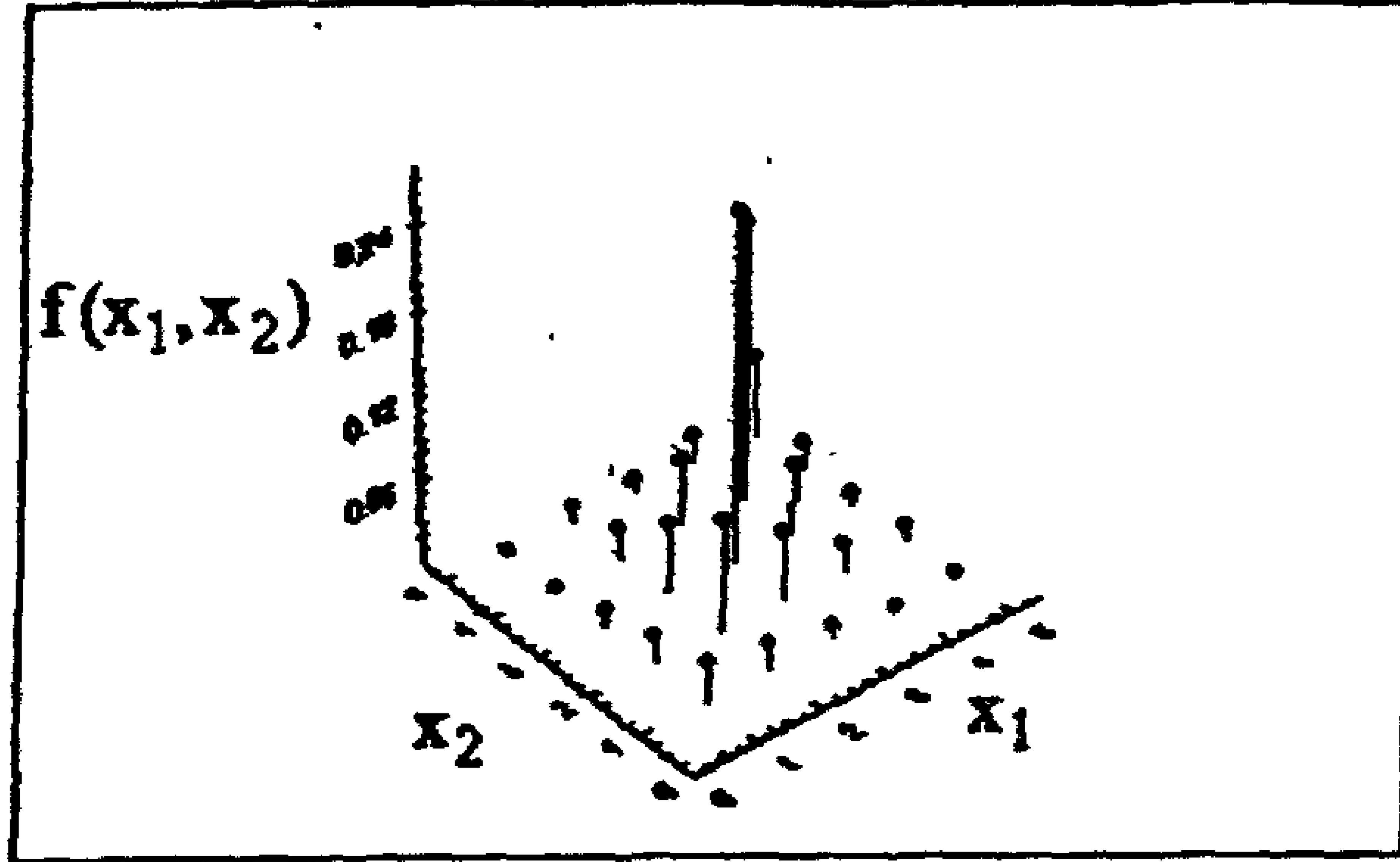
x_1 \ x_2	1	2	3	4	5	المجموع
1	.03	.02	.01	.00	.00	.06
2	.02	.08	.05	.02	.01	.18
3	.01	.05	.25	.05	.01	.37
4	.00	.02	.05	.20	.02	.29
5	.00	.01	.01	.02	.06	.10
المجموع	.06	.18	.37	.29	.10	1.00

(أ) وضح الدالة $f(x_1,x_2)$ بيانيا

(ب) أوجد $P(X_1=X_2)$

الحل :

(أ) بيان $f(x_1,x_2)$ موضح فى شكل (٧-٢)



شكل (٧-٢)

(ب) $P(X_1=X_2) = f(1,1) + f(2,2) + f(3,3) + f(4,4) + f(5,5)$

$= .03 + .08 + .25 + .20 + .06 = .62.$

مثال (٧-٤) وعاء يحتوى على ثلاث كرات مرقمة من 1 إلى 3 . اختيرت كرتين عشـــوائيا من الوعاء واحدة تلو الأخرى بدون إرجاع فإن كان X_1 يمثل رقم الكرة الأولى و X_2 يمثـــل رقم الكرة الثانية. دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1,X_2 معطاة فى الجدول التالى:

x_2 \ x_1	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

أوجد : $P(X_1 < X_2)$.

الحـــل :

$$P(X_1 < X_2) = f(1,2) + f(1,3) + f(2,3)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0.5 .$$

مثال (٧-٥) إذا كان X_2 و X_1 متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمال مشتركة معطـــاة فـــى الجدول التالى:

x_1 \ x_2	0	100	200
100	.2	.10	.2
250	.05	.15	.3

أوجد : $P(X_2 \geq 100)$.

الحـــــل :

$$P(X_2 \geq 100) = f(100,100) + f(250,100) + f(100,200) + f(250,200)$$
$$= .1 + .15 + .2 + .3 = .75.$$

تعريـــف: إذا كـــان للمتجـــه العشـــوائي $X = (X_1, X_2)$ دالـــــة كثافـــة الاحتمـــــال المشتركة $f(x_1, x_2)$ فإن الدالة الهامشية للمتغير X_1 والتي يرمز لـــــها بـــالرمز $f_1(x_1)$ والدالة الهامشية للمتغير X_2 والتي يرمز لها بالرمز $f_2(x_2)$ يمكن الحصـــــول عليـــهما كالتالي :

$$f_1(x_1) = \sum_{x_2} f(x_1, x_2),$$

$$f_2(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2).$$

مثال (٧-٦) أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغيرين X_1 و X_2 من البيانات فـــى مثـــال (٧-٥) .

الحـــــل: القيم الممكنة للمتغير X_1 هى $x_1=100$ و $x_1=250$ وعلى ذلك :

$$f_1(100) = f(100,0) + f(100,100) + f(100,200) = .5 \;,$$

$$f_1(250) = f(250,0) + f(250,100) + f(250,200) = .5.$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 هى :

$$f_1(x_1) = .5 \quad , x_1 = 100 , 250$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

بنفس الشكل ، دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_2 يمكن الحصول عليها كالتالي:

$$f_2(0) = f(100,0) + f(250,0)$$
$$= .2 + .05 = .25,$$

$$f_2(100) = f(100,100) + f(250,100)$$
$$= .10 + .15 = 0.25,$$

$$f_2(200) = f(100,200) + f(250,200)$$
$$= .2 + .3 = .5 .$$

أى أن :

$$f_2(x_2) = .25 \quad x_2 = 0,100$$
$$= .5 \quad x_2 = 200$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

وعلى ذلك :

$$P(X_2 \geq 100) = f(100) + f(200)$$
$$= .25 + .5 = .75.$$

كما حصلنا عليها من المثال (٧-٥).

مثال : (٧-٧) إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المعطـــاة فـــى الجدول التالى:

x_2 \ x_1	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من المتغير X_1 و X_2 .

الحـــل :

$$P(X_1=1) = f_1(1) = \sum_{x_2=1}^{3} f(1,x_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

$$P(X_1=2) = f_1(2) = \sum_{x_2=1}^{3} f(2,x_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

$$P(X_1=3) = f_1(3) = \sum_{x_2=1}^{3} f(3, x_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

أى أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 هى :

$$f_1(x_1) = \frac{1}{3}, \quad x_1 = 1,2,3$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

وبنفس الشكل فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_2 هي :

$$f_2(x_2) == \frac{1}{3} \quad , \quad x_2 = 1,2,3$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

مثال (٧-٨) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين عشـــوائيين X_1 و X_2 علـــى الشكل :

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1 + x_2}{21} \qquad , x_1 = 1,2,3, \; ; \; x_2 = 1,2$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من X_1 و X_2 .

الحـــل :

دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 هي :

$$f_1(x_1) = \sum_{x_2=1}^{2} f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + 3}{21}.$$

أي أن :

$$f_1(x_1) = \frac{2x_1 + 3}{21} \quad , x_1 = 1,2,3$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

وبنفس الشكل فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_2 هي :

$$f(x_2)=\frac{6+3x_2}{21} \quad , x_2=1,2$$
$$=0 \text{ elsewhere}$$

إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين ولهما دالة الفئة الاحتمالية $P(B)$ حيث B فئـــة في البعد الثاني .إذا كانت B غير محدودة وعلى الشكل $B = \{(u,v)|u \le x_1, v \le x_2\}$ حيث x_1 , x_2 أعدادا حقيقية فإن :

$$P(B) = P[(X_1,X_2) \in B]$$
$$= P(X_1 \le x_1,X_2 \le x_2)$$

هذه الدالة للنقطة (x_1,x_2) تسمى دالة التوزيع للمتغـيرين X_1 , X_2 ويرمـز لـها بـالرمز $F(x_1,x_2)$ حيث :

$$F(x_1,x_2) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$$
$$= \sum_{t_1 \le x_1} \sum_{t_2 \le x_2} f(t_1,t_2).$$

وبصورة عامة دالة التوزيع للمتجه العشوائي $X = (X_1, X_2,...X_k)$ هـــي دالــة النقطة :

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_k) = P(X_1 \le x_1,X_2 \le x_2,\ldots,X_k\le x_k)$$
$$= \sum_{t_1 \le x_1} \sum_{t_2 \le x_2} \sum_{t_k \le x_k} f(t_1,t_2,\ldots,t_k).$$

نظرية (٧-٢) الدالة $F(x_1,x_2)$ هي دالة التوزيع إذا وفقط إذا :

$$\lim_{x_1 \to -\infty} F(x_1,x_2) = F(-\infty,x_2) = 0$$

لجميع قيم x_2

$$\lim_{x_2 \to -\infty} F(x_1,x_2) = F(x_1,-\infty) = 0$$

لجميع قيم x_1

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty}} F(x_1,x_2) = F(\infty,\infty) = 1$$

$$F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \geq 0 \qquad (٧-١)$$

لجميع قيم $c < d$, $a < b$.

$$\lim_{h \to 0^+} F(x_1 + h, x_2) = \lim_{h \to 0^+} F(x_1, x_2 + h) = F(x_1, x_2)$$

لجميع قيم x_1, x_2 .

مثال (٧-٩): هل الدالة التالية تحقق شروط دالة التوزيع :

$$F(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 + x_2 < -1 \\ \\ 1 & x_1 + x_2 \geq -1 \end{cases}$$

إذا كان $a = c = -1$ و $b=d=1$ في (٧-١) فإن :

$$F(1,1) - F(1,-1) - F(-1,1) + F(-1,-1)$$
$$= 1 - 1 - 1 + 0 = -1$$

أى لا تحقق الشرط (٧-١) وعلى ذلك $F(x_1,x_2)$ لا تمثل دالـــة كثافـــة احتمـــال مشـــتركة للمتغيرين X_1,X_2

<u>التوزيع متعدد الحدود</u> **<u>Multinomial Distribution</u>**

تجربة ذى الحدين تسمى تجربة متعددة الحـــدود multinomial experiment إذا كانت كل محاولة لها k من النواتج حيث $k > 2$. عموما إذا كانت لمحاولة معطـــاة k مـــن النواتج الممكنة $E_1,E_2,\ldots,E_k$ باحتمالات $p_1,p_1,\ldots,p_k$ ، فإن التوزيع المتعدد الحدود ســـوف يعطى الاحتمالات أن E_1 تحدث x_1 من المرات وأن E_2 تحدث x_2 مـــن المـــرات و...و E_k تحدث x_k من المرات فى n من المحاولات المستقلة ، حيث $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$. ســـوف نرمـــز للتوزيـــع المتعـــدد بـــالرمز $f(x_1,x_2,\ldots,x_k;p_1,p_2,\ldots,p_k,n)$. مـــن الواضـــح أن $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$ لأن نتيجة كل محاولة لابد أن تكون واحدة من النواتج الممكنة. لاشتقاق الصيغة العامة سوف نتبع نفس الأسلوب المستخدم في توزيع ذي الحدين وحيث أن المحـــولات مستقلة وأنه فى ترتيب معين نحصل على x_1 نواتج من E_1 و x_2 من E_2 و...و x_k مـــن E_k باحتمال $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \quad p_k^{x_k}$. العدد الكلى من الترتيبات والذى يؤدى إلى نفس النتائج فى n مـــن

المحاولات المستقلة يساوى عدد الطرق لتبديل n من العناصر حيث x_1 منها تنتمى إلـــى E_1 و x_2 تنتمى إلى E_2 و ...و x_k تنتمى إلى E_k والذى يحــدث بطـــرق عددهـــا $\frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!}$.

وحيث أن الترتيبات (نقاط العينة) التى عددها $\frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!}$ متنافية فـــى إمكانيـــة الحـــدوث وتحدث باحتمال متساوى. فإنه يمكن الحصول على التوزيع المتعدد الحدود بضرب الاحتمـــال لترتيب معين فى $\frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!}$. وعلى ذلك فإن التوزيع متعدد الحدود يكون على الصورة :

$$f(x_1,x_2,\dots,x_k;\, p_1,p_2,\dots,p_k,n) = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!}\; p_1^{x_1}p_2^{x_2} \quad p_k^{x_k} ,$$

حيث $\sum_{i=1}^{k}x_i = n$, $\sum_{i=1}^{k}p_i = 1$ وقد اشتق التوزيع المتعدد الحدود اسمه مـــن أن الحـــدود فـــى المفكوك $(p_1+p_2+\dots+p_k)^n$ تقابل كل القيم الممكنة للدالة $f(x_1,x_2,\dots,x_k;p_1,p_2,\dots,p_k,n)$.

كثير من المراجع تضع دالة كثافة الاحتمال $f(x_1,x_2,\dots,x_k;p_1,p_2,\dots,p_k,n)$ على الصورة :

$$f(x_1,x_2,\dots,x_{k-1};p_1,p_2,\dots,p_{k-1}) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!...x_{k-1}!\,x_k!}\; p_1^{x_1}p_2^{x_2} \cdot p_{k-1}^{x_{k-1}}p_k^{x_k} ,$$

لجميع قيم $0 \le x_i \le n$ و $x_k = n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i$ $p_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i$

حيث يختزل عدد المتغيرات العشوائية إلى (k-1) من المتغيرات .

سوف نكتب $X \sim MULT(n,p_1,p_2,\dots,p_{k-1})$ للدلالة على ان $X = (X_1,X_2,\dots,X_{k-1})$ يتبع التوزيع متعدد الحدود بمعالم n , p_1 , p_2 ,..., p_{k-1} .

مثال (٧-١٠) إذا ألقيت زهرة نرد متزنة لها أربعة اوجه 20 مرة وتم تسجيل الرقـــم الـــذى يظهر في كل مرة . أوجد احتمال الحصول على الرقم 1 أربع مرات والرقم 2 ســـتة مـــرات والرقم 3 خمس مرات والرقم خمسة خمس مرات.

الحـــل :

$p_i = .25$ حيث $i = 1,2,3,4$ بفرض X_1 يمثل ظهور الرقم 1 و X_2 يمثل ظهور الرقم 2 وX_3 يمثل ظهور الرقم 3 وعلى ذلك :

$$P(X_1 = 4, X_2 = 6\ , X_3 = 5)$$
$$= \frac{20!}{(4!)(6!)(5!)(5!)}(.25)^{20} = .0089.$$

إذا كان $X_1,X_2 \sim MULT(n,p_1,p_2)$ فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 ســـوف يتبع توزيع ذي الحدين بمعلمة n,p أى أن $X_1 \sim BIN(n,p_1)$ حيث :

$$f_1(x_1) = \sum_{x_2} f(x_1,x_2)$$
$$= \sum_{x_2=0}^{n-x_1} f(x_1,x_2)$$
$$= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} p_1^{x_1} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)p_2^{x_2}[(1-p_1)-p_2]^{(n-x_1)-x_2}}{x_2![(n-x_1)-x_2]!}$$
$$= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} p_1^{x_1} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \binom{n-x_1}{x_2} p_2^{x_2} [(1-p_1)-p_2]^{(n-x_1)-x_2}$$
$$= \binom{n}{x_1} p_1^{x_1} [p_2 + (1-p_1) - p_2]^{n-x_1}$$
$$= \binom{n}{x_1} p_1^{x_1} (1-p_1)^{n-x_1}$$

وبنفس الشكل يمكن إثبات أن $X_2 \sim BIN(n,p_2)$.

مثال (٧-١١) بفرض أنه تم اختيار 10 سمكات من بحيرة كبيرة وتصنيفها على حسب نوعها إلى النوع A أو B أو C . فإذا كان X_1 يمثل عدد السمكات فى العينة من النـــوع A و X_2 يمثل عدد السمكات من النوع B و X_3 يمثل عدد السمكات من النوع C . وبفرض أن نســبة الأسماك من النوع A فى البحيرة هو $p_1=.25$ والنوع B هو $p_2=.3$ وعلى ذلك : $p_3=1-.25-.3=.45$.

أوجد :

$$P(X_1=3, X_2=4, X_3=3)$$

$$= \frac{10!}{3!\,4!\,3!}(.25)^3(.3)^4(.45)^3$$
$$= .0484$$

مثال (٧-١٢) إذا كان

$$(X_1,X_2) \sim MULT(10,.25,.5)$$

أوجد :

$$P(X_1 = 2, X_2 = 5)$$

الحـــل :

$$P(X_1 = 2, X_2 = 5) = \frac{10!}{2!\,5!\,3!}(.25)^2(.5)^5(.25)^3$$
$$= 0.0769.$$

<u>تعميم للتوزيع الهندسى الزائدى</u>

<u>Extended Hypergeometric Distribution</u>

يمكن تعميم التوزيع الهندسى الزائدى ليعامل للحالة التى يكون فيها المجتمع مقسم إلـى k من الخلايا $A_1,A_2,\ldots,A_k$ حيث a_1 وحدة فى الخلية A_1 و a_2 وحدة فى الخلية A_2 و...و a_k وحدة فى الخلية A_k . الآن سوف يكون اهتمامنا فى إيجـاد صيغـة لاحتمـال أن العينـة العشوائية من الحجم n سوف تعطى x_1 عنصر مـن A_1 وx_2 عنصـر مـن A_2 و...و x_k عنصر من A_k والتى سوف تمثل الاحتمال بالصيغة :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k;\, a_1,a_2,\ldots,a_k,N,n).$$

لإيجاد صيغة عامة فإننا نعرف أن العدد الكلى من العينات من الحجم n التى يمكـن اختيارهـا من مجتمع حجمه N هو $\binom{N}{n}$. وعلى ذلك هناك $\binom{a_1}{x_1}$ طريقة لاختيار x_1 مـن الوحـدات الموجودة فى A_1 ولكل واحدة من هذه الطرق فإننا يمكن اختيار x_2 من الوحدات الموجودة فى A_2 بطرق عددها $\binom{a_2}{x_2}$. وعلى ذلك يمكن اختيار x_1 من الوحدات الموجـودة فـى A_1 و

اختيار x_2 من الوحدات الموجودة فى A_2 بطرق عددها $\binom{a_2}{x_2}$ $\binom{a_1}{x_1}$. وبالاستمرار فى هـذا الأسلوب يمكن اختيار كل الوحدات التى عددها n والتى تحتوى على x_1 من الوحدات الموجودة فى A_1 و x_2 من الوحدات الموجودة فى A_2 و... و x_k من الوحدات الموجودة فى A_k بطرق عددها $\binom{a_k}{x_k} \cdots \binom{a_2}{x_2}\binom{a_1}{x_1}$ وعلى ذلك فإن التوزيع الاحتمالى المطلوب سوف يكون :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k;\ a_1,a_2,\ldots,a_k,N,n) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\cdots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

حيث $\sum_{i=1}^{k} x_i = n, \sum_{i=1}^{k} a_i = N$

كثير من المراجع يضع دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k;\ a_1,a_2,\ldots,a_k,N,n)$$

على الصورة :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1};\ a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},N,n)$$
$$= \binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\cdots\binom{a_k}{x_{k-1}}\binom{a_k}{x_k}\Big/\binom{N}{n}$$

حيث $a_k = N - \sum_{i=1}^{k-1} a_i$ و $x_k = n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i$ و $0 \le x_i \le n$

سوف نكتب $X \sim HYP(n,a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},N)$ للدلالة على أن $X=(X_1,X_2,\ldots,X_{k-1})$ يتبع التوزيع الهندسى المعمم.

مثال (٧-١٣) يحتوى وعاء على 1000 بذرة زهور حيث 400 بذرة لزهور لونها احمر و400 بذرة لزهور لونها أبيض و200 بذرة لزهور لونها زرقاء . فإذا اختيرت 10 بذور عشوائيا بدون إرجاع فإن X_1 يمثل عدد البذور التى لونها أحمر في العينة و X_2 يمثل عدد البذور التى لونها أبيض فى العينة و X_3 يمثل عدد البذور التى لونها أزرق فى العينة . دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات X_1,X_2,X_3 تكون على الشكل :

$$f(x_1,x_2;400,400,1000,10)$$

$$=\frac{\binom{400}{x_1}\binom{400}{x_2}\binom{1000-400-400}{10-x_1-x_2}}{\binom{1000}{10}}$$

حيث :

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 10 = n,$$
$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 400+400+200=1000=N.$$

احتمال الحصول على بذرتين لزهور لونهم أحمر بالضبط و 5 بذور لزهور لونهم أبيض وثلاثة بذور لونهم أزرق هو $f(2,5) = .0331$. هنا قيم x_2,x_1 تم تحديدهم أيضا وعـــدد البـــذور الزرقاء تم تحديده عن طريق $10-x_1-x_2$.

مثال (٧-١٤) إذا كان :

$$(X_1,X_2,X_3,X_4)\sim HYP(40,60,70,20,200,25)$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات X_1,X_2,X_3,X_4 وأوجد دالة كثافـــة الاحتمـــال الهامشى للمتغير X_3 ودالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1,X_2

الحل :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4;40,60,70,20,200,25)$$

$$=\frac{\binom{40}{x_1}\binom{60}{x_2}\binom{70}{x_3}\binom{20}{x_4}\binom{10}{25-x_1-x_2-x_3-x_4}}{\binom{200}{25}}$$

حيث $x_1+x_2+x_3+x_4 \le 25$

وعلى ذلك بدون تجميع فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_3 هي :

$$f_3(x_3) = \frac{\binom{70}{x_3}\binom{130}{25-x_3}}{\binom{200}{25}}, x_3 = 0,1,2,\ldots,25.$$

و دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغيرين X_1, X_2 هي :

$$f_{12}(x_1,x_2) = \frac{\binom{40}{x_1}\binom{60}{x_2}\binom{100}{25-x_1-x_2}}{\binom{200}{25}}, 0 \le x_1, 0 \le x_2, x_1 + x_2 \le 25.$$

<u>(٧-٣) : التوزيعات المتصلة المشتركة</u>

<u>**Joint Continuous Distributions**</u>

تعريف: يقال للمتجه العشوائي $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ أنه من النوع المتصل إذا كان لـه الدالة $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ والمسماة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتجه X بحيـث أن دالـة التوزيع المشتركة لهم يمكن كتابتها على الشكل :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, t_2, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k$$

لكل قيم $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

وكما في حالة المتغير العشوائى فى البعد الواحد ، فإن دالة كثافة الاحتمال المشـتركة $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ يمكن الحصول عليها من دالة التوزيع المشتركة كالتالي:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \frac{\partial^k F(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k}$$

حيث التفاضلات الجزئية موجودة.

نظرية (٧-٣): يقال للدالة $f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ أنها دالة كثافة احتمال مشتركة للمتجه العشوائي $X=(X_1,X_2,\dots X_k)$ إذا وفقط إذا حققت الشروط التالية:

(أ) $f(x_1,x_2,\dots,x_k)\ge 0$ لجميع قيم $x_1,x_2,\dots,x_k$

(ب) $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\dots,x_k)dx_1\dots dx_k=1$

مثال (٧-١٥) إذا كان X_2,X_1 متغيرين عشوائيين بدالة كثافة مشتركة على الشكل :

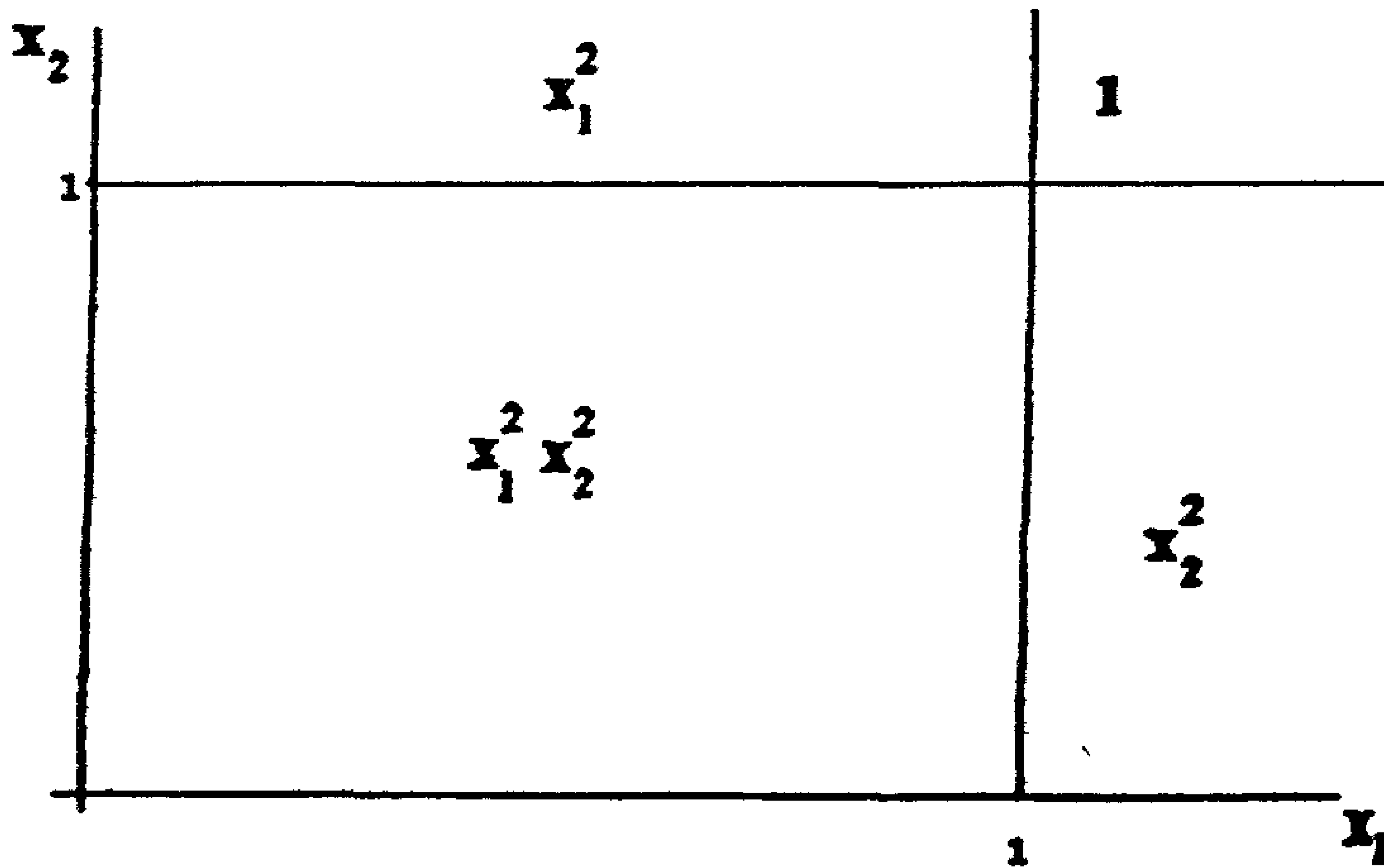
$$f(x_1,x_2)=4\,x_1\,x_2 \qquad 0<x_1<1,\ 0<x_2<1$$
$$=0 \quad \text{elsehwere}.$$

أوجد دالة التوزيع $F(x_1,x_2)$.

الحـــل :

$$F(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(t_1,t_2)dt_1dt_2$$
$$=\int_{0}^{x_2}\cdots\int_{0}^{x_1} 4\,t_1\,t_2\,dt_1dt_2$$
$$=x_1^2x_2^2 \qquad 0<x_1<1,0<x_2<1.$$

هذا التعريف للدالة $F(x_1,x_2)$ فى الفترة $0<x_1<1$ و $0<x_2<1$ ولكن يوجد فى الحقيقـــة أربعة مناطق أخرى في المستوى للدالة $F(x_1,x_2)$ كما هو موضح فى شكل (٧-٣).



شكل (٧-٣)

مثال (٧-١٦): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات X_1,X_2,X_3 على الشكل :

$$f(x_1,x_2,x_3) = e^{-(x_1+x_2+x_3)} \qquad 0 < x_1 , x_2, x_3 < \infty$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere} .$$

أوجد دالة التوزيع $F(x_1,x_2,x_3)$ وأوجد منها $f(x_1,x_2,x_3)$

الحـــل :

$$F(x_1,x_2,x_3) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2 , X_3 \le x_3)$$
$$= \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} e^{-u-v-w} du\, dv\, dw$$
$$= (1-e^{-x_1})(1-e^{-x_2})(1-e^{-x_3}), 0 \le x_1, x_2, x_3 < \infty$$
$$= 0 \qquad \text{elsewhere}.$$

أيضا :

$$\frac{\partial^3 F(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = f(x_1,x_2,x_3).$$

وأخيرا دالة الفئة الاحتمالية $P(B)$ حيث $B \subset R$ يمكن التعبير عنها على الشكل:

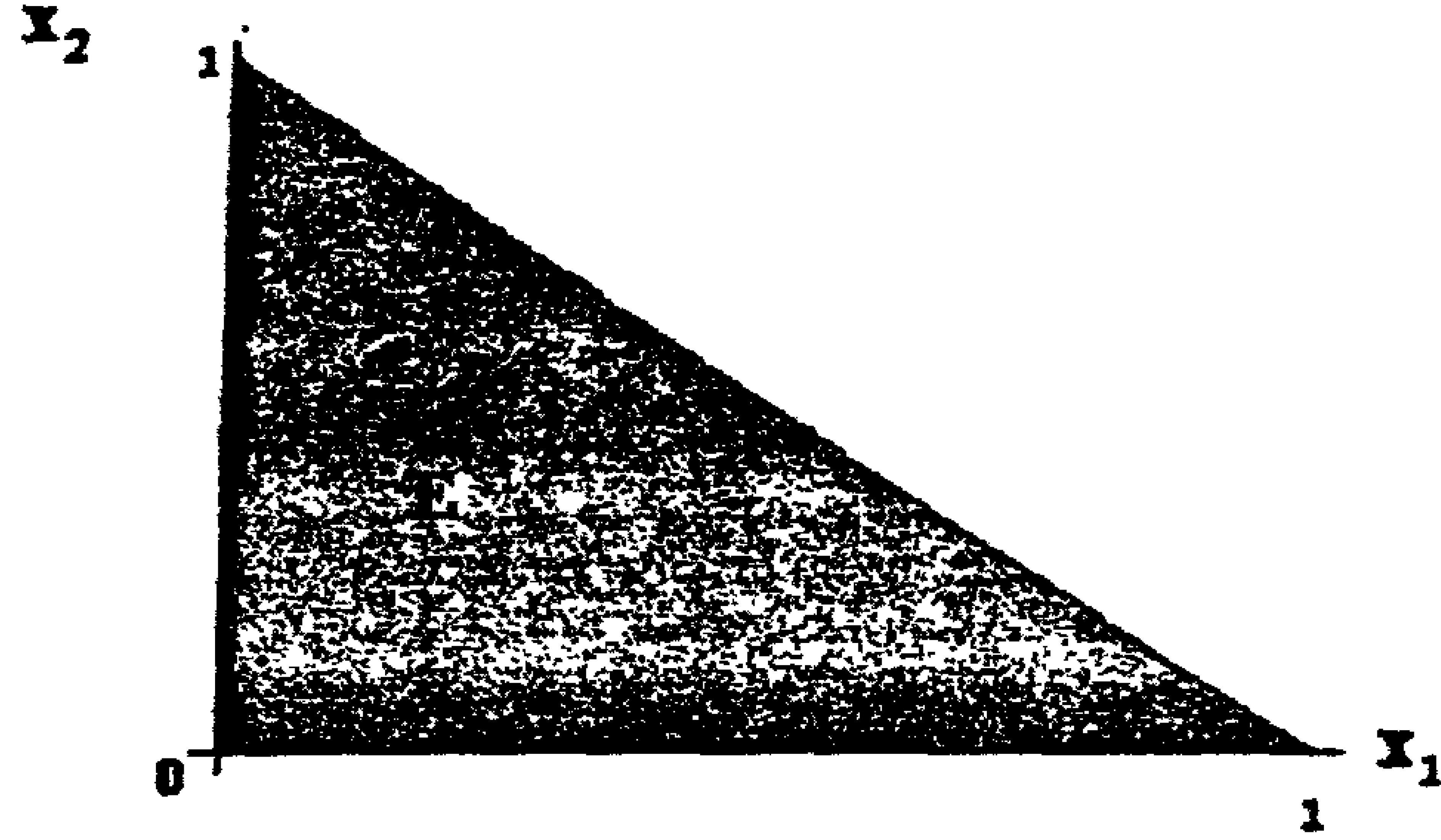
$$P(B) = P[(X_1,\ldots,X_k) \in B]$$
$$= \int \underset{B}{\cdots} \int f(x_1, x_2,\ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_k$$

مثـــــال (٧-١٧) للمثـــــال (٧-١٥) أوجـــــــد $P[(X_1, X_2) \in E]$ حيـــــث $E = \{x_1+x_2 \mid (x_1, x_2)/2 < 0.5\}$.

الحـــل :

$$P(E) = \int_0^1 \int_0^{1-x_2} 4\, x_1\, x_2\, dx_1 dx_2$$
$$\int_0^1 2x_2(1-x_2)^2\, dx_2$$
$$\frac{1}{6}.$$

الحادثة E موضحة في شكل (٧-٤)



شكل (٧-٤)

مثال (٧-١٨) إذا كان X_1,X_2 متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة على الشكل:

$$f(x_1,x_2) = 1 \quad 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

أوجد $P(0 \le X_1 \le 1/4\ ,\ 1/2 \le X_2 \le 3/4)$

الحـــل :

$$P(0 \le X_1 \le 1/4\ ,\ 1/2 \le X_2 \le 3/4)$$
$$\int_{1/2}^{3/4} \int_{0}^{1/4} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$
$$\int_{1/2}^{3/4} \int_{0}^{1/4} 1\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{16}.$$

مثال (٧-١٩) إذا كان X_1,X_2 متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة على الشكل :

$$f(x_1, x_2) = \frac{6}{5}(x_1 + x_2^2) \quad 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

تحقق من أن $f(x_1,x_2)$ دالة كثافة احتمال وأوجد :

$$P(0 \le X_1 \le \frac{1}{4},\ 0 \le X_2 \le \frac{1}{4})$$

الحـــل :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}(x_1+x_2^2)dx_1dx_2$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}x_1\, dx_1dx_2$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}x_2^2\, dx_1\ dx_2$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}x_1\, dx_1 + \int_0^1 \frac{6}{5}x_2^2\, dx_2$$

$$= \frac{6}{10}+\frac{6}{15} = 1.$$

$$P(0 \le X_1 \le \frac{1}{4},\ 0 \le X_2 \le \frac{1}{4})$$

$$= \int_0^{1/4}\int_0^{1/4} \frac{6}{5}(x_1+x_2^2)dx_1dx_2$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\int_0^{1/4} x_1\, dx\, dx_2 + \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\int_0^{1/4} x_2^2\, dx_1dx_2$$

$$= \frac{6}{20}\cdot\frac{x^2}{3}\Big|_0^{1/4} + \frac{6}{20}\cdot\frac{x_2^3}{3}\Big|_0^{1/4} = \frac{7}{640}.$$

في البند (٧-٢) تم مناقشة التوزيعات الهامشية لمتغيرات عشوائية من النوع المتقطع. مفـاهيم مشابهة يمكن الحصول عليها فى حالة المتغيرات العشوائية من النوع المتصل ولكــن بمدخــل مختلف قليلا. على سبيل المثال إذا كانت دالة التوزيع لمتغيرين عشوائيين X_1, X_2 من النــوع المتصل بدالة توزيع مشتركة $F(x_1,x_2)$ فإن دالة التوزيع للمتغير العشوائى X_1 هي :

$$F_1(x_1) = P[X_1 \le x_1]$$

$$= P[X_1 \le x_1, X_2 < \infty]$$
$$= F(x_1, \infty)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(t_1, t_2) dt_2 \right) dt_1$$
$$= \int_{-\infty}^{x_1} f_1(t_1) dt_1.$$

وعلى ذلك فى الحالة المتصلة يمكن الحصول على دالة التوزيع الهامشية للمتغير X_1 من $F(x_1,\infty)$. أيضا دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 والمرتبطة بدالة التوزيع $F_1(x_1)$ هي الكمية داخل الأقواس في الصيغة السابقة. أي أن :

$$f_1(x_1) = \frac{dF(x_1)}{dx_1}$$
$$= \frac{d}{dx_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, x_2) dt_1 dx_2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2.$$

نتائج مشابهة يمكن الحصول عليها للمتغير العشوائى X_2.

تعريف: إذا كان للمتجه العشوائي $X = (X_1, X_2)$ له دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1, x_2)$ فإن الدالة الهامشية للمتغير X_1 والتي يرمز لها بالرمز $f_1(x_1)$ والدالة الهامشية للمتغير X_2 والتي يرمز لها بالرمز $f_2(x_2)$ يمكن الحصول عليهما كالتالي :

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2,$$
$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1.$$

مثال (٧-٢٠) للمتغيرين العشوائيين X_1, X_2 في مثال (٧-١٩) فإن:

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_2=\int_0^1 \frac{6}{5}(x_1+x_2^2)dx_2$$

$$=\frac{6}{5}\ x_1+\frac{2}{5} \qquad 0<x_1\le 1$$

$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

وبنفس الشكل :

$$f_2(x_2)=\frac{6}{5}\ x_2^2+\frac{3}{5} \qquad 0<x_2\le 1$$

$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

وعلى ذلك :

$$P(\frac{1}{4}\le X_2\le \frac{3}{4})=\int_{1/4}^{3/4} f(x_2)dx_2$$

$$\frac{37}{80}=.4625.$$

مثال (٧-٢١) : إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين عشوائيين X_2 , X_1 علـــى الشكل :

$$f(x_1,x_2)=x_1+x_2 \qquad 0<x_1<1\ ,\ \ 0<x_2<1$$

$$=\ 0 \quad \text{elsewhere}.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من X_2,X_1

الحـــــل : دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 هي :

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_2$$

$$=\int_0^1 f(x_1,x_2)dx_2=x_1+\frac{1}{2},\ 0<x_1<1$$

$$=0\,\text{elsewhere}$$

وبنفس الشكل فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشى للمتغير X_2 هى:

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$
$$= \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 = x_2 + \frac{1}{2}.$$

أي أن :

$$f_2(x_2) = x_2 + \frac{1}{2} \qquad 0 < x_2 < 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

مثال (٧-٢٢) إذا كانت X_2,X_1 لهما دالة كثافة احتمال المشتركة التالية:

$$f(x_1,x_2) = 24x_1x_2 \qquad 0 \le x_1 \le 1 \ , 0 \le x_2 \le 1, \ x_1+x_2 \le 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

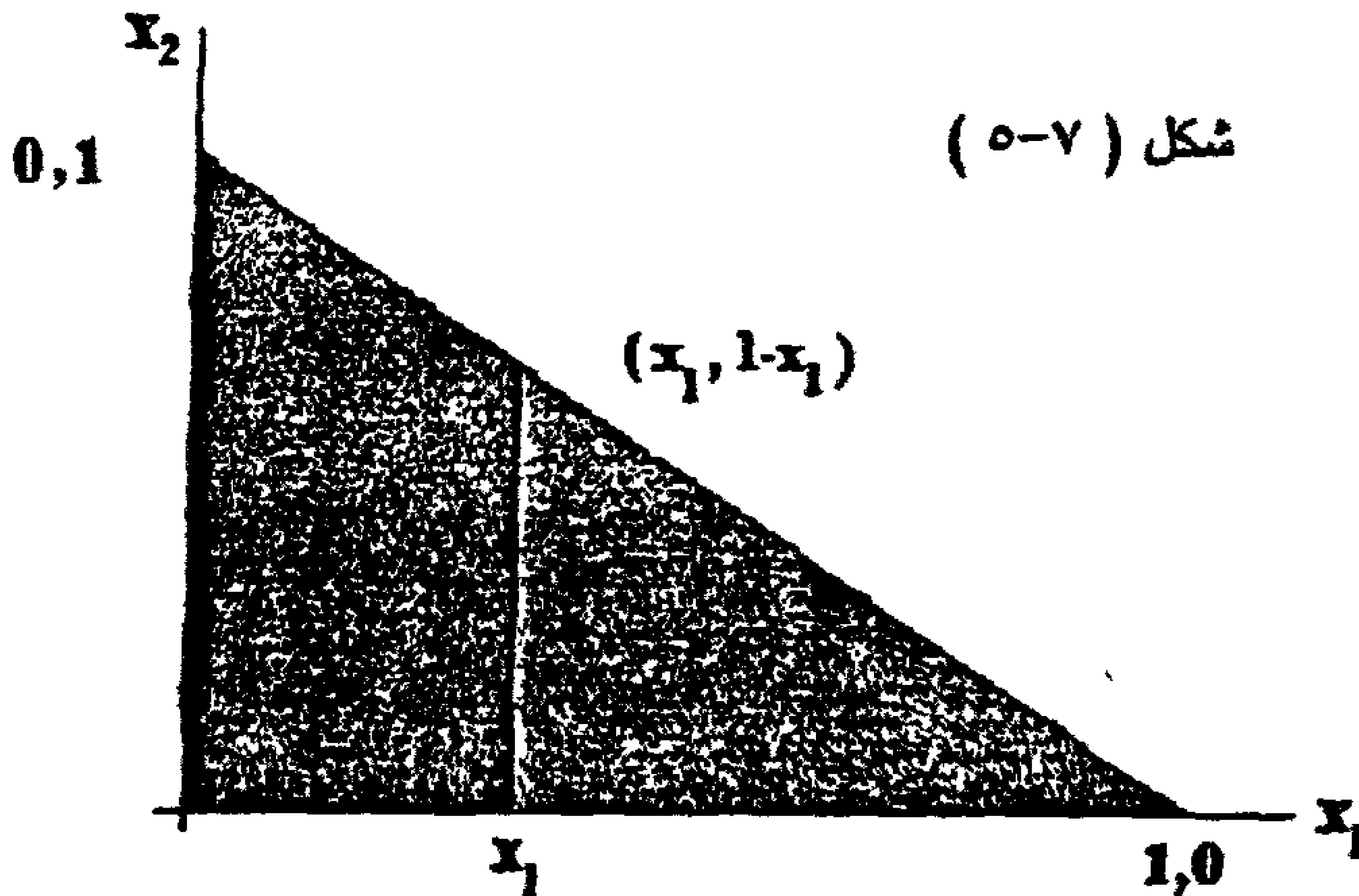
أ- تحقق من أن $f(x_1,x_2)$ دالة كثافة احتمال

ب- اوجد : $P(0 \le X_1 \le 1, 0 \le X_2 \le 1, \text{ and } x_1+x_2 \le .5)$

ج- أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من X_1 , X_2

الحـــل : (أ)

الفضاء R للمتغيرين X_1,X_2 موضح في شكل (٧-٥) .



شكل (٧-٥)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x_1} 24x_1x_2dx_2dx_1\right\}$$

$$= \int_0^1 24x_1\left\{\frac{x_2^2}{2}\Big|_0^{1-x_1}\right\}dx_1$$

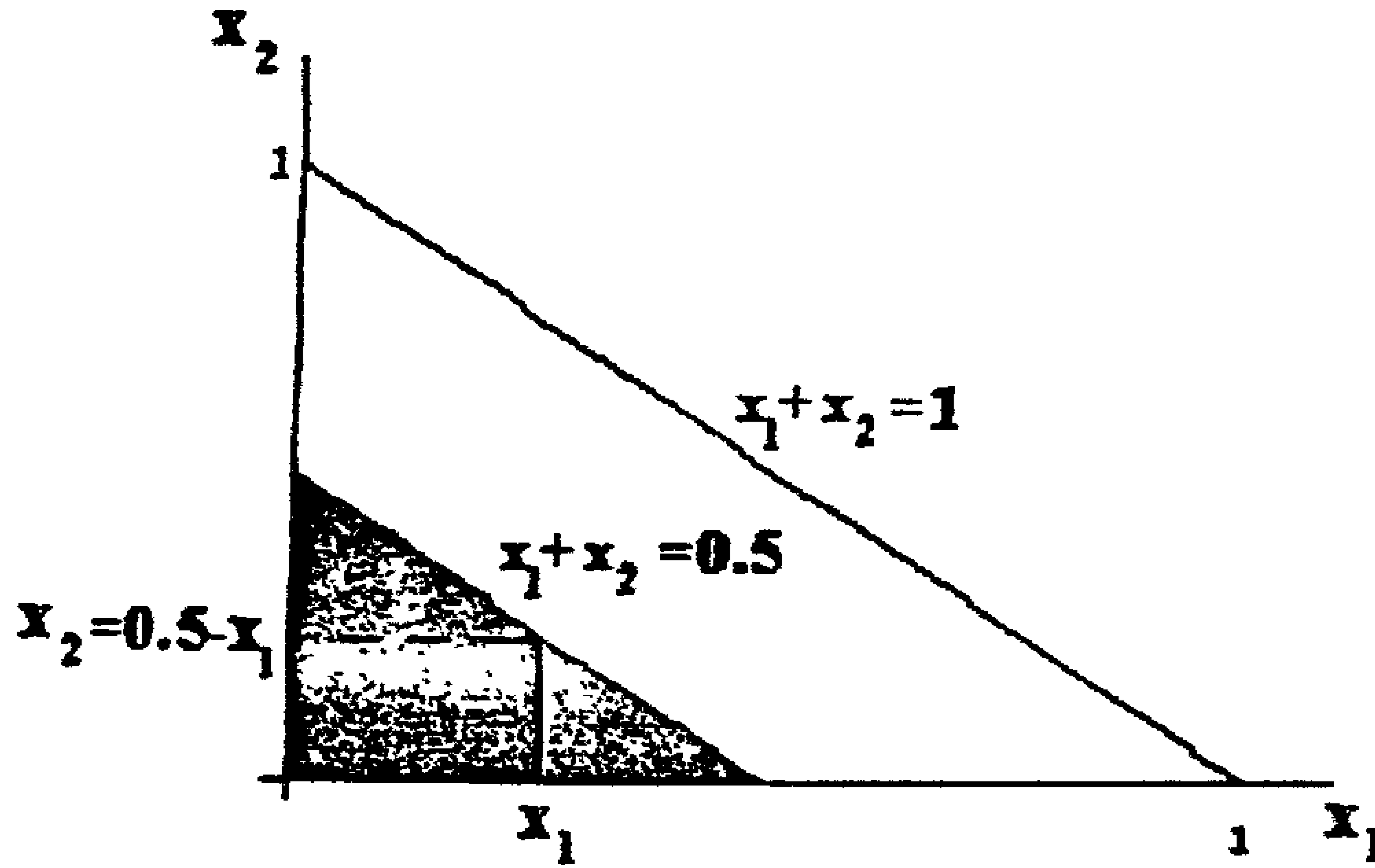
$$= \int_0^1 12x_1(1-x_1)^2dx_1 = 1.$$

(ب)

$$P(0 \le X_1 \le 1, 0 \le X_2 \le 1,\ X_1+X_2 \le .5)$$

$$= \int_0^{.5}\int_0^{.5-x_1} 24x_1x_2dx_2dx_1 = .0625.$$

الاحتمال المطلوب موضح فى شكل (٧-٦) بالمنطقة المظللة.



شكل (٧-٦)

(ج) دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 هى :

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = \int_{0}^{1-x_1} 24x_1x_2\, dx_2$$
$$= 12x_1(1-x_1)^2.$$

أي أن:

$$f_1(x_1) = 12\, x_1\, (1-x_1)^2 \quad 0 \le x_1 \le 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

يمكن إيجاد $f_2(x_2)$ بنفس الطريقة.

تعريف : إذا كان $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ متجه من النوع المتصل بدالة التوزيع المشتركة $F(x_1, x_2, ..., x_k)$ فإن دالة التوزيع الهامشي للمتغير X_j يمكن الحصول عليها كالتالي :

$$F_j(x_j) = \lim_{\substack{x_i \to \infty \\ \text{all } i \ne j}} F(x_1, ..., x_j, ..., x_k)$$

وأكثر من ذلك إذا كان X متغيرا عشوائيا من النوع المتقطع فإن :

$$f_j(x_j) = \sum_{\text{all } i \ne j} \cdots \sum f(x_1, ..., x_j, ..., x_k).$$

وإذا كان X متغيرا عشوائيا من النوع المتصل فإن :

$$f_j(x_j) = \int_{\text{all } i \ne j} \cdots \int f(x_1, ..., x_j, ..., x_k) dx_1 dx_2 \ldots dx_k.$$

مثال (٧-٢٣) إذا كان X_1, X_2, X_3 متغيرات عشوائية لها دالة كثافة احتمال مشتركة على الشكل :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6 \qquad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$$
$$= 0 \qquad \text{elsewhere}.$$

أوجد (أ) دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_3 أي الدالة $f_3(x_3)$.

(ب) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1, X_2.

الحل: (أ)

$$f_3(x_3) = \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} 6dx_1dx_2$$

$$= 6\int_0^{x_3} x_2dx_2 = 3x_3^2 \qquad 0 < x_3 \le 1$$

$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

(ب)

$$f_{12}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

$$= \int_{x_2}^{1} 6\ dx_3 = 6(1 - x_2) \qquad 0 < x_1 < x_2 < 1$$

$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

مثال (٧-٢٤) عندما تستخدم طريقة ما لتجميع حجم ثابت من عينات الصخور في منطقة مـــا يوجد أربعة أنواع من الصخور . إذا كان X_1,X_2,X_3 ترمز لنسبة الحجم للنـــوع 1,2,3 فـــي عينة عشوائية مختارة (نسبة الصخور من النوع الرابع هي $1\text{-}X_1\text{-}X_2\text{-}X_3$) وعلى ذلك يمكـــن إهمال المتغير الرابع. فإذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات X_1,X_2,X_3 هي :

$$f(x_1,x_2,x_3) = k\ x_1\ x_2(1\text{-}x_3) \quad 0 \le x_1 \le 1,$$
$$0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

أوجد الثابت k و أوجد $P(X_1+X_2 \le .5)$

الحــــل :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)dx_3\ dx_2dx_1$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x_1} \left[\int_0^{1-x_1-x_2} k\ x_1x_2(1 - x_3)dx_3 \right] dx_2 \right\} dx_1$$

التكامل السابق يساوى *k/144* وعلى ذلك *k=144*

$$P(X_1+X_2 \le .5) = \int_0^{.5} \int_0^{.5-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} f(x_1,x_2,x_3)dx_3dx_2dx_1$$

$$0 \le x_i \le 1, i = 1,2,3$$

$$x_1+x_2+x_3 \le 1, x_1+x_2 \le .5$$

$$= \int_0^{.5} \left\{ \int_0^{.5-x_1} \left[\int_0^{1-x_1-x_2} 144x_1x_2(1-x_3) \right] dx_2 \right\} dx_1$$

$$= .6066.$$

مثال (٧-٢٥): إذا كان X_1,X_2 لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

$$f(x_1,x_2) = 1 \qquad 0 \le x_1 \le 1 \;,\; 0 \le x_2 \le 1$$
$$= 0 \qquad \text{elsewhere}.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من X_1 , X_2 .

الحــــل:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1x_2)dx = \int_0^1 (1)\,dx_2 = 1$$

أي أن :

$$f_1(x_1) = 1 \qquad 0 \le x_1 \le 1$$
$$= 0 \qquad \text{elsewhere}.$$

أي أن $X_1 \sim UNIF(0,1)$. وبنفس الشكل فإن $X_2 \sim UNIF(0,1)$.

مثال (٧-٢٦) إذا كان X_1,X_2 لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية (توزيع Dirichlet):

$$f(x_1,x_2) = \frac{\Gamma(a_1+a_2+a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)} x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} (1-x_1-x_2)^{a_3-1}$$
$$0 \le x_1 , x_2, x_1+x_2 \le 1$$
$$= 0 \qquad \text{elsewhere}.$$

أوجد $f_1(x_1)$ و $f_2(x_2)$

حيث $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$.

تذكر أن :

$$\frac{\Gamma(a_1+a_2+a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)}=\left(\frac{\Gamma(a_1+a_2+a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2+a_3)}\right)\left(\frac{\Gamma(a_2+a_3)}{\Gamma(a_2)(a_3)}\right)$$

$$=\frac{1}{B(a_1,a_2+a_3)B(a_2,a_3)}.$$

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1x_2)dx_2=\frac{x_1^{a_1-1}}{B(a_1,a_2+a_3)}\int_0^{1-x_1}\frac{x_2^{a_2-1}(1-x_1-x_2)^{a_3-1}}{B(a_2,a_3)}dx_2$$

$$=\frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{a_2+a_3-1}}{B(a_1,a_2+a_3)}\int_0^1\frac{u^{a_2-1}(1-u_2)^{a_3-1}}{B(a_2,a_3)}du$$

$$=\frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{a_2+a_3-1}}{B(a_1,a_2+a_3)}.$$

وقد أستخدمنا في التكامل $u=x_2/(1-x_1)$ وعلى ذلك :

$$f_1(x)=\frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{a_2+a_3-1}}{B(a_1,a_2+a_3)}\quad 0\le x_1\le 1$$

$$=0 \quad \text{elsewhere.}$$

حيث $f_1(x_1)$ هي دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائى يتبع بيتا بمعلمتيـــن $a=a_1,\ b=a_2+a_3$.
بنفس الشكل يمكن الحصول على $f_2(x_2)$ حيث :

$$f_2(x_2)=\frac{x_2^{a_2-1}(1-x_2)^{a_1+a_3-1}}{B(a_2,a_1+a_3)}\quad 0\le x_2\le 1$$

$$=0 \quad \text{elsewhere.}$$

حيث X_2 يتبع توزيعا بيتا بمعلمتين $a=a_3, b=a_1+a_3$.

وعلى الرغم من أن توزيع كل من X_1,X_2 على حدة يمكن الحصول عليه فى شـــكل التوزيعات الهامشية من المعلومات لدالة التوزيع المشتركة للمتغيرين X_1,X_2 فإن العكس غـير صحيح. أي أن التوزيعات الهامشية لمتغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة احتمال مشـــتركة، لا يمكن أن يقدران دالة التوزيع المشتركة لهذين المتغيرين. لإثبات ذلك فإننا نحتاج إلى أن نثبـت

أن دالتين مشتركتان مختلفان يعطيان نفس الدوال الهامشية ولكن العكس غــير صحيــح كمــا يتضح من الجدول التالى:

(أ)

x_2 / x_1	1	0	المجموع
1	.4	.2	.6
0	.3	.1	.4
المجموع	.7	.3	1

(ب)

x_2 / x_1	1	0	المجموع
1	.42	.18	.6
0	.28	.12	.4
المجموع	.7	.3	1

ففى الجدولين السابقين يلاحظ أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة فى (أ) مختلفة عن (ب) بينمــا الدالتين المشتركتين لهما نفس دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من X_1, X_2 .

مثال (٧-٢٧) إذا كان X_1,X_2 لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{a_2+a_3-1}x_2^{a_2-1}(1-x_2)^{a_1+a_3-1}}{B(a_1,a_2+a_3)B(a_2,a_1+a_3)}$$

$$0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 1$$

$$a_1>0, b>0, c>0$$

$$=0 \quad \text{elsewhere,}$$

أوجد $f_1(x_1)$ و $f_2(x_2)$

الحـــل :

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1x_2)dx_2=\frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{a_2+a_3-1}}{B(a_1,a_2+a_3)}\int_0^1 \frac{x_2^{a_2-1}(1-x_2)^{a_1+a_3-1}}{B(a_2,a_1+a_3)}dx_2$$

$$=\frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{a_2+a_3-1}}{B(a_1,a_2+a_3)}. \qquad 0\le x_1\le 1$$

يلاحظ أن $f_1(x_1)$ فى هذا المثال نفس دالة كثافة الاحتمال الهامشية فى المثال (٧-٢٦) بالرغم من أن $f(x_1,x_2)$ لهذا المثال تختلف عن $f(x_1,x_2)$ للمثال (٧-٢٧).

(٧-٤) المتغيرات العشوائية المستقلة

Independent Random Variables

في الفصل الأول تناولنا استقلال حادثتين A , B والتي تعني أن $P(A \cap B)=P(A).P(B)$. في هذا البند سوف نعرف استقلال المتغيرات العشوائية بأسلوب مشابه.فعلى سبيل المثال إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين عشوائيين X_1, X_2 هي $f(x_1, x_2)$ وإذا كانت دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 هي $f_1(x)$، و دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_2 هي $f_2(x)$ ،وإذا كانت :

$$f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) \, . \, f_{X_2}(x_2)$$

فإننا نقول أن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين.ويمكن تعميم الصيغة لأكثر من متغيرين عشوائيين.

تعريف: استقلال المتغيرات العشوائية : يقال للمتغيرات العشوائية $X_1, X_2,..., X_k$, أنهم مستقلين إذا كان لكل $a_i < b_i$ فإن

$$P(a_1 \le X \le b_1 ,..., a_k \le X_k \le b_k)$$
$$= \prod_{i=1}^{k} P(a_i \le X_k \le b_i).$$

فعلى سبيل لمثال لمتغيرين عشوائيين مستقلين من النوع المتصل وبفرض أن :

$$f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) \, . \, f_{X_2}(x_2)$$

لجميع قيم x_1,x_2 وإذا كان $a < b$ و $c < d$ فإن :

$$P(a \le X_1 \le b, c \le X_2 \le d) = P(a \le X_1 \le b)\, P(c \le X_2 \le d)$$
$$= \int_c^d \int_a^b f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$
$$= \int_c^d \int_a^b f_1(x) f_2(x_2) dx_1 dx_2$$
$$= \int_a^b f_1(x) dx_1 \int_c^d f_2(x_2) dx_2$$
$$= P(a \le X_1 \le b) P(c \le X_2 \le d).$$

نظرية (٧-٤) يقال للمتغيرات العشوائية $X_1, X_2,..., X_k$ أنهم مستقلين إذا تحقق واحد من الخصائص التالية:

$$F(x_1,x_2,...,x_k) = F_1(x_1),...,F_k(x_k)$$
$$f(x_1,x_2,...,x_k) = f_1(x_1),...,f_k(x_k).$$

عندما لا يتحقق الشرط السابق فإنه يقال أن $X_1,X_2,...,X_k$ غير مستقلون.
ففي المثال (٧-٥) $f(100,100)=.1$ بينما $f_1(100) = .5$ و $.25 = f_2(100)$
وبما أن $f(100,100)\neq f_1(100)f_2(100)$ فإن X_2,X_1 غير مستقلين .

يفيد الاستقلال لمتغيرات عشوائية في وصف التجربة تحت الدراسة حيث يدل على عدم وجود تأثير أي متغير على الأخر. وعلى ذلك بمجرد معرفة الدالة الهامشية لكل من $X_1,X_2,...,X_k$ يمكننا معرفة الدالة الاحتمالية المشتركة $f(x_1,x_2,...,x_k)$ حيث:

$$f(x_1,x_2,...,x_k) = f_1(x_1),...,f_k(x_k).$$

مثال (٧-٢٨) إذا كان X_1,X_2 يمثلان زمن الحياة لمكونين مستقلين عن بعضهما البعض وإذا كان

$$X_2 \sim EXP(1/\lambda_2)\ ,\ X_1 \sim (Exp(1/\lambda_1)$$

فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1,X_2 هي

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= f_1(x_1)f_2(x_2) \\ &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} \quad x_1 > 0, x_2 > 0 \\ &= 0 \ \text{elsewhere,} \end{aligned}$$

وإذا كان $\lambda_1 = 1/1000$ و $\lambda_2 = 1/1200$ فإن زمن الحياة المتوقع للمتغيرين X_1,X_2 هما 1000 و 1200 ساعة على التوالي . أيضا :

$$\begin{aligned} &P(1500 \leq X_1,\ 1500 \leq X_2) \\ &= P(1500 \leq X_1).\ P(1500 \leq X_2) \\ &e^{-\lambda_1(1500)} \cdot e^{-\lambda_2(1500)} \\ &= (.2231)(.2865) = .0639. \end{aligned}$$

مثال (٧-٢٩) يحتوى وعاء على ثلاث كرات حمراء وكرتين لونهما أخضر . سحبت كرتين من الوعاء مع الإرجاع من الوعاء وإذا كان :

$X_1 = 0$ إذا كانت الكرة الأولى خضراء
$= 1$ إذا كانت الكرة الأولى حمراء

و

إذا كانت الكرة الثانية خضراء $X_2 = 0$

إذا كانت الكرة الثانية حمراء $= 1$

X_2, X_1 مستقلين وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 هي :

x_1	0	1
$f_1(x_1)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

وبنفس الشكل دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_2. أيضا دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_2, X_1 سوف تكون على الشكل :

x_1 \ x_2	0	1	$f_1(x_1)$
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{10}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{15}{25}$
$f_2(x_2)$	$\frac{10}{25}$	$\frac{15}{25}$	1

المتغيرين X_1, X_2 مستقلين وذلك لان $f(x_1,x_2)=f_1(x_1).f_2(x_2)$ حيث $x_1=0,1$ و $x_2=0,1$ فعلى سبيل المثال :

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$$
$$= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25}.$$

مثال (٧-٣٠): المتغيران X_1, X_2 فى المثال (٧-٢١) غير مستقلين لان :

$$f(x_1,x_2) \neq f_{X_1}(x_1) \,.\, f_{X_2}(x_2)$$
$$x_1+x_2 \neq (x_1+ \tfrac{1}{2}).(x_2+ \tfrac{1}{2}).$$

مثال (٧-٣١): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1, X_2 على الشكل :

$$f(x_1x_2) = e^{-(x_1+x_2)} \quad x_1 > 0, x_2 > 0$$

$= 0$ elsewhere .

هل X_1, X_2 مستقلين ؟

الحــــل :

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(x_1+x_2)} dx_2 = e^{-x_1} \int_{0}^{\infty} e^{-x_2} dx_2 = e^{-x_1},$$

$f_1(x) = e^{-x_1}$ $\quad x_1 > 0$

$= 0$ $\quad$ elsewhere,

وبنفس الشكل :

$f_2(x_2) = e^{-x_2}$ $\quad x_2 > 0$

$= 0$ $\quad$ elsewhere.

أي أن X_2, X_1 مستقلين لأن :

$f(x_1 x_2) = f_1(x_1) \,.\, f_2(x_2)$.

تذكر أن: إذا كان X_1, X_2, X_3 متغيرات عشوائية وإذا كـــان $i \neq j$ و X_i, X_j حيــث $i=1,2,3$ مستقلين فإن استقلال الأزواج لا يعنى أن X_1, X_2, X_3 مستقلين.

مثال (٧-٣٢): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات X_1, X_2, X_3 على الشكل :

$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4}$, $\quad (x_1, x_2, x_3) = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)$

$= 0$ elsewhere .

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_i, X_j و $i \neq j$ تكون على الشكل :

$f_{ij}(x_i, x_j) = \frac{1}{4}$, $\quad (x_i, x_j) = (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$

$= 0$ elsewhere .

دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_i هي :

$$f_i(x_i) = \frac{1}{2} \quad , x_i = 0,1$$

0 elsewhere

من الواضح أنه ، عندما $i \neq j$ فإن :

$$f_{ij}(x_i, x_j) \neq f_i(x_i) f_j(x_j).$$

أي أن X_i, X_j $i \neq j$ مستقلين بينما $f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3)$
أي أن X_1, X_2, X_3 غير مستقلين.

(٧-٥) التوزيعات الشرطية

Conditional Distributions

بفرض أن X_1 تمثل عدد العيوب الرئيسية فى سيارة منتجة حديثا و X_2 تمثـــل عـــدد العيوب الصغيرة على نفس السيارة . السؤال الآن إذا علم أن عدد العيوب الرئيسية فى ســيارة حديثـــة اختيرت عشوائيا تساوى 1 فما هو قيمة $P(X_2 \geq 3 | X_1 = 1)$. بنفس الشكل ، إذا كـــان X_1, X_2 يمثـــلان أزمنة الحياة لمكونـــــين فى نظام ما وإذا كان $X_1 = 100$ ما هو الاحتمال أن $X_2 \geq 200$ وما هو زمن الحياة المتوقع للمكون الثاني إذا علـــم أن $X_1 = 100$؟ الإجابـــات على هذا النوع من الأسئلة يمكن الإجابة عليها بدراسة التوزيعات الاحتمالية الشرطية.

تعريف : إذا كان X_1, X_2 متغيران عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمــــال المشـــتركة $f(x_1, x_2)$ وإذا كانت دالة كثافة الاحتمال الهامشى للمتغير X_1 هي $f_1(x_1)$ ، فإن دالة كثافـــة الاحتمــــال الشرطى للمتغير X_2 إذا علم أن $X_1 = x_1$ هي :

$$f(x_2 | x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}$$

وذلك لأي قيمة x_1 للمتغير X_1 حيث $f_1(x_1) > 0$.

الدالة $f(x_2 | x_1)$ تحقـــق شرطي دالة كثافة الاحتمال . من الواضح أن $f(x_1, x_2) \geq 0$ مـــن التعريف أيضا :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_2 | x_1) dx_2 = \frac{1}{f_1(x_1)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 = \frac{f_1(x_1)}{f_1(x_1)} = 1.$$

وبنفس الشكل يمكن إثبات أن $f(x_1 | x_2)$ دالة كثافة احتمال.

في الحقيقة ، للمتغيرات العشوائية من النوع المتقطع فإن دالة كثافة الاحتمال الشـرطية هي الاحتمال الشرطي . فعلى سبيل المثال إذا كان X_1, X_2 متغيران عشوائيين من النـوع المتقطع فإن $f(x_1|x_2)$ هو الاحتمال الشرطي للحادثة $[X_2 = x_2]$ إذا علـم أن الحادثـة $[X_1 = x_1]$. في حال المتغيرات العشوائية من النوع المتصل فـإن الحالـة تختلـف لأن $P[X_1 = x_1] = 0$. وعلى ذلك في الحالة المتصلة فإن الاحتمال الشرطي لحادثة على الشكل $[a \le X_2 \le b]$ تحسب كالتالي :

$$P(a \le X_2 \le b | X_1 = x_1) = \int_a^b f(x_2 | x_1) dx_2 .$$

فإذا كـان لدينـا متجـه عشـوائي مكوناتـه متغـيرات عشـوائية عددهـا k ، $X=(X_1,X_2,\ldots,X_k)$ بدالة كثافة احتمال مشتركة $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ فإنه يمكن تعميـم مفـهوم التوزيعات الشرطية لمتجهات من المتغيرات العشـوائية . علـى سـبيل المثـال إذا كـانت X_1, X_2, X_3 متغيرات عشوائية لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1,x_2,x_3)$ فـإن دالـة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير X_1 إذا علم أن $X_2 = x_2 , X_3 = x_3$ هي :

$$f(x_1 | x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f_{12}(x_2, x_3)} .$$

أيضا دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير X_1 إذا علم أن $X_2 = x_2$ هي :

$$f(x_1 | x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} .$$

وبالمثل :

$$f(x_1, x_2 | x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f_3(x_3)} .$$

نظرية (٧-٥) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمال مشتركة $f(x_1, x_2)$ وإذا كانت دالة كثافة الاحتمال الهامشى لكل من X_1 , X_2 هما على التوالـــي $f_1(x), f_2(x)$ فإن :

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1)\ f\ (x_2|x_1)$$
$$= f_2(x_2)\ f\ (x_1 \mid x_2).$$

وإذا كان X_1 , X_2 مستقلين فإن :

$$f(x_2|x_1) = f_2(x_2),$$
$$f(x_1|x_2) = f_1(x_1).$$

مثال (٧-٣٣) في دراسة عن عادة التدخين وإذا كان $X_1=1$ إذا كان الشخص الـــذى اختـــير عشوائيا يدخن و$X_1=0$ إذا كان الشخص لا يدخن .أيضا إذا $X_2=1$ كان الشـــخص مصـــاب بالسرطان و$X_2=0$ إذا كان الشخص غير مصاب بالسرطان. يعطى الجدول التالى:
دالة كثافة الاحتمال المفترضة للمتغيرين X_1 , X_2 .

x_1 \ x_2	0	1	$f_1(x_1)$
0	.001	.002	.003
1	.010	.987	.997
$f_2(x_2)$	.011	.989	1.000

أوجد $f(x_1|1)$, $f(x_1|0)$
$f(x_2|0)$, $f(x_2|1)$

الحــــل :

$$f(0|0)=\frac{f(0,0)}{f_2(0)}=\frac{.001}{.011}=\frac{1}{11}$$

$$f(1|0)=\frac{f(1,0)}{f_2(0)}=\frac{.010}{.011}=\frac{10}{11},$$

$$f(0|1)=\frac{f(0,1)}{f_2(1)}=\frac{.002}{.989}=\frac{2}{989}$$

$$f(1|1)=\frac{f(1,1)}{f_2(1)}=\frac{.987}{.989}=\frac{987}{989},$$

$$f(0|0)=\frac{f(0,0)}{f_1(0)}=\frac{.001}{.003}=\frac{1}{3}$$

$$f(1|0)=\frac{f(0,1)}{f_1(0)}=\frac{.002}{.003}=\frac{2}{3},$$

$$f(0|1)=\frac{f(1,0)}{f_1(1)}=\frac{.01}{.997}=\frac{10}{997}$$

$$f(1|1)=\frac{f(1,1)}{f_1(1)}=\frac{.987}{.997}=\frac{987}{997}.$$

حيث يمكن تلخيصهم في الجداول التالية :

x_1	0	1
$f(x_1 \mid 1)$	$\frac{2}{989}$	$\frac{987}{989}$

x_1	0	1
$f(x_1 \mid 0)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

x_2	0	1
$f(x_2 \mid 1)$	$\frac{10}{997}$	$\frac{987}{997}$

x_2	0	1
$f(x_2 \mid 0)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

مثال (٧-٣٤) إذا كانت فإن $X_1 , X_2 \sim MULT(n;p_1,p_2)$ دالة كثافة الاحتمال الشرطى للمتغير X_1 إذا علم أن $X_2 = x_2$ يمكن الحصول عليها كالتالى :

$$f(x_1 \mid x_2)=\frac{\dfrac{n!}{x_1!x_2!(n-x_1-x_2)!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}(1-p_1-p_2)^{n-x_1-x_2}}{\dfrac{n!}{x_2!(n-x_2)!}p_2^{x_2}(1-p_2)^{n-x_2}}$$

$$=\binom{n-x_2}{x_1}\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^{x_1}\left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_2}\right)^{n-x_1-x_2}.$$

وبوضع $p=\frac{p_1}{1-p_2}$ فإن :

$$f(x_1 \mid x_2)=\binom{n-x_2}{x_1}p^{x_1}(1-p)^{n-x_1-x_2}.$$

والذي يتبع توزيع ذى الحدين بمعلمتين $n-x_2, p$.

مثال (٧-٣٥) للمثال (٧-٢١) حيث:

$$f(x_1,x_2)=x_1+x_2 \qquad 0<x_1<1,\quad 0<x_2<1$$

نجد أن :

$$f(x_2 \mid x_1)=\frac{f(x_1,x_2)}{f_1(x_1)}=\frac{x_1+x_2}{x_1+.5} \qquad 0<x_1,x_2<1$$

$$P(0< X_2<.5 \mid X_1=.25)$$

$$=\int_0^{.5}\frac{.25+x_2}{.25+.5}dx_2=\frac{1}{3}.$$

مثال (٧-٣٦) للمثال (٧-١٩) فإن الدالة الشرطية للمتغير X_2 إذا علم أن $X_1=.8$ هو:

$$f(x_2 \mid .8)=\frac{f(.8,x_2)}{f_1(.8)}=\frac{1.2(.8+x_2^2)}{1.2(.8)+.4}$$

$$=\frac{1}{34}(24+30x_2^2) \qquad 0<x_2<1$$

أيضا :

$$P(X_2 \le .5 \mid X_1=.8)=\int_{-\infty}^{.5}f(x_2 \mid .8)dx_2$$

$$=\int_0^{.5}\frac{1}{34}(24+30x_2^2)dx_2=.39.$$

باستخدام الدالة الهامشية للمتغير X_2 فإن :

$$P(X_2 \le 0.5) = .350$$

(٧-٦) خواص القيم المتوقعة

Properties of Expected Values

عند دراسة متجه من المتغيرات العشوائية $X=(X_1,X_2,...,X_k)$ بدالة كثافة احتمال مشتركة $f(x_1,x_2,...,x_k)$ يكون من الضروري معرفة القيمة المتوقعة لبعض الدوال ، لتكن $Y = u(X)$. يمكن استخدام الرمز $E(Y)$ أو الرمز $E[u(X)]$ أو الرمز $E_X[u(X)]$ حيث الدليل X يعنى أن المجموع أو التكامل يحسب بالنسبة لدالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتجـــه العشوائي X وهذا ما تنص عليه النظرية التالية:

نظرية (٧-٦) إذا كان $X=(X_1,...,X_k)$ له دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1,x_2,...,x_k)$ وإذا كانت $Y=E[u(X)]$ دالة في X فإن $E(Y)= E[u(X_1,X_2,...,X_k)]$ يكون كالتالي :

$$E[u(X_1,X_2,...,X_k)] = \sum_{x_1} ... \sum_{x_k} u(x_1,x_2,...,x_k) f(x_1,x_2,...,x_k)$$

إذا كان X من النوع المتصل ويكون كالتالي :

$$E[u(X_1,X_2,...,X_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2,...,x_k)$$
$$\times f(x_1,x_2,...,x_k)dx_1dx_2...dx_k.$$

إذا كان X من النوع المتصل.

القيم المتوقعة للدالة $u(X_1,X_2,..,X_k)$ تخضع لخاصتين هامتين :

(أ) لأي دالتين $u_1(x_1,x_2,..,x_k)$ و $u_2(x_1,x_2,..,x_k)$ ولأي ثابتين a , b فإن :

$$E[au_1(X_1,X_2,...,X_k] + bu_2(X_1,X_2,...,X_k)]$$
$$= a\, E[u_1(X_1,X_2,...,X_k] + bE[u_2(X_1,X_2,...,X_k)]$$

(ب) إذا كان $u(x_1,x_2,...,x_k) \ge 0$ فإن $E[u(X_1,X_2,...,X_k)] \ge 0$

مثال (٧-٣٧) : إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة .

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{20} \qquad x_1=1,2,3,4,5\ ;\ x_2=1,2,3,4,5$$

$$,x_1 \neq x_2$$

$$=0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد القيمة المتوقعة للدالة التالية :

$$u(X_1,X_2)=(|X_1-X_2|-1)$$

الحل :

للتسهيل توضع دالة كثافة الاحتمال المشتركة في جدول مزدوج كالتالي :

x_1 \ x_2	1	2	3	4	5
1	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
2	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
3	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{20}$
5	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0

وعلى ذلك :

$$E[u(X_1,X_2)]=\sum_{x_2=1}^{5}\sum_{x_1=1}^{5}(|x_1-x_2|-1).\frac{1}{20}=1, x_1\neq x_2.$$

مثال (٧-٣٨) في المثال (٧-٢٢) حيث دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1, X_2 على الشكل :

$$f(x_1,x_2)=24x_1x_2 \quad 0\le x_1\le 1\ ,\ 0\le x_2\le 1\ ,\ x_1+x_2\le 1$$

$$=0 \text{ elsewhere.}$$

إذا كانت $u(X_1,X_2)=.5+.5X_1+X_2$

أوجد : $E[u(X_1,X_2)]$

الحل :

$$E[u(X_1,X_2)] = E[.5+.5X_1+X_2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2)f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (.5+.5x_1+x_2).24x_1\,x_2\,dx_2\,dx_1 = 1.1.$$

إذا كانت الدالة $u(X_1,X_2,...,X_k)$ معرفة في متغير عشوائي واحد،على سبيل المثـال، ليكن X_1 فإن التوقع الرياضي للدالة $u(X_1)$ يمكن الحصول عليه مباشـرة مـن دالـة كثافـة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 وذلك لان :

$$E[u(x_1)] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1)f(x_1,x_2,...,x_k)dx_1dx_2...dx_k$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f(x_1,x_2,...,x_k)dx_2...dx_k\right]dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1)f(x_1)dx_1.$$

في الحالة المتقطعة يستبدل التكامل بالمجموع.

نظرية (٧-٧) إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمال مشتركة $f(x_1,x_2)$ فإن

$$E(X_1+X_2) = E(X_1)+E(X_2)$$

البرهان : سوف نثبت النظرية في حالة متغيرين عشوائيين من النوع المتصل:

$$E(X_1+X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1+x_2)f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\,f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2\,f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_2dx_1$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1f_1(x_1)dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2f_2(x_2)dx_2$$

$$= E(X_1) + E(X_2).$$

لإثبات النظرية في حالة متغيرين عشوائيين X_1 , X_2 من النوع المتقطع فإننا نستبدل التكـــامل بالمجموع .

من الممكن إثبات أنه إذا كان $a_1,a_2,...,a_k$ ثوابت و $X_1,X_2,...,X_k$ متغيرات لها دالـــة كثافة احتمال مشتركة $f(x_1,x_2,...,x_k)$ فإن :

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i E(X_i).$$

مثال (٧-٣٩) إذا كان $Y \sim BIN (n, p)$ يمكن التعبير عنه كمجموع لمتغيرات عشوائية مستقلة $X_i \sim BIN (1, p)$ حيث $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. أوجد التوقع.

الحل :

التوقع للمتغير Yهو :

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

التوقعات الرياضية التالية تأخذ أسماء خاصة.

(أ) إذا كانت $u_1(X_1,X_2,...,X_k)=X_i$ فإن $E(X_i)=\mu_i$ أو μ_{X_i} ويسمى متوســـط X_i حيــث $i=1,2,...,k$ ويمكن حسابه كالتالي :

$$\mu_i = \sum_{x_1} \sum_{x_2} ... \sum_{x_k} x_i f(x_1, x_2,..., x_k)$$

إذا كانت $X_1,X_2,...,X_k$ تمثل متغيرات عشوائية من النوع المتقطع أو حسابه كالتالي :

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2,..., x_k) dx_1 dx_2 ... dx_k$$

إذا كانت $X_1,X_2,...,X_k$ تمثل متغيرات عشوائية من النوع المتصل.

(ب) إذا كانت $u_2(X_1,X_2,...,X_k)=(X_i-\mu_i)^2$ ، فإن :

$$E[u_2(X_1,X_2,..,X_k)]=E(X_i-\mu_i)^2$$
$$= \sigma_i^2 = Var(\mu_i)$$

والذي تسمى تباين المتغير العشوائي X_i حيث $i=1,2,...,k$.

نظرية (٧-٨) إذا كان X_1, X_2 متغيرين مستقلين وإذا كان $u_1(X_1) , u_2(X_2)$ دالتين فإن :

$$E[u_1(X_1) u_2(X_2)]=E[u_1(X_1)]E[u_2(X_2)]$$

البرهان : في حالة متغيرين عشوائيين متصلين فإن :

$$E[u_1(X_1)u_2(X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x_1)\ u_2(x_2) f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x_1)\ u_2(x_2)\ f_1(x_1) f_2(x_2)\, dx_1\ dx_2$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x_1)\ f(x_1)\ dx_1\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} u_2(x_2)\ f(x_2)\ dx_2\right]$$

$$= E[u_1(x_1)]\,E[u_2(x_2)]\,.$$

ويمكن تعميم النظرية السابقة لأكثر من متغيرين عشوائيين فإذا كان $X_1, X_2, ..., X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة و $u_1(x_1), ..., u_k(x_k)$ دوال فإن :

$$E[u_1(X_1)...u_k(X_k)] = E[u_1(X_1)]...E[u_k(X_k)]$$

إذا كان X_1, X_2 متغيرين غير مستقلين يكون من الضروري قياس مدى قوة الارتباط بينهما .

تعريف : التغاير لمتغيرين عشوائيين X , Y يعرف كالتالي :

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

بعض خصائص التغاير تعطى في النظريات التالية :

نظرية (٧-٩) إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين وإذا كان a , b ثابتان فإن :

$$Cov(aX, bY) = ab\, Cov(X,Y)$$

$$Cov(X+a, Y+b) = Cov(X,Y)$$

$$Cov(X, aX+b) = a\, Var(X)$$

نظرية (٧-١٠) إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين فإن :

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y)$$

و $Cov(X,Y) = 0$ إذا كان X , Y مستقلين .

مثال (٧-٤٠) إذا كان X , Y لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة والمعطاة في الجدول المزدوج التالي :

x \ y	1	2	3	$f_X(x)$
1	.2	.1	.01	.31
2	.15	.3	.06	.51
3	.03	.05	.1	.18
$f_Y(y)$	.38	.45	.17	1

أوجد σ_{XY} .

الحل :

من دالتي كثافة الاحتمال الهامشية $f_X(x), f_Y(y)$ فــإن

$\mu_X = 1.87\ ,\ \ \mu_Y = 1.79$ أيضا .

$$E(XY) = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} xy\, f(x,y)$$
$$= (1)(1)(.2) + (1)(2)(.1) + \ldots$$
$$+ (3)(2)(.05) + (3)(3)(.1)$$
$$= 3.58.$$

ومنها :

$$\sigma_{XY} = E(X\,Y) - \mu_X\, \mu_Y .$$
$$= 3.58 - 1.87\,(1.79) = .2327.$$

مثال (٧-٤١) إذا كان X , Y لهما دالة كثافة الاحتمال المشترك المعطـــاة فـــي مثـــال (٧-٢٦) أوجد التغاير بين X,Y أي σ_{XY} .

الحل :

أثبتنا من قبـــل أن X , Y لـــهما دالـــة بيتـــا بمعلمتيـــن $a = a_1\ ,\ b = a_2 + a_3$, $a = a_2\ ,\ b = a_1 + a_3$ على التوالي . وبما أن متوسط بيتا بمعلمتين a , b هـــو $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$

فإن :

$$\mu_X = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3}\ ,\ \mu_Y = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3}$$

لكن :

$$K = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a_1)\ \Gamma(a_2)\ \Gamma(a_3)}$$ فإن :

$$E(XY)=K\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ f\ (x\,y)\,dx\,dy$$

$$=K\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1-x} x^{a_1}\ y^{a_2}\ .(1-x-y)^{a_3-1}\ \ dy\right]dx$$

$$=K\left[\int_{0}^{1} x^{a_1}(1-x)^{a_2+a_3}\ dx\right]\left[\int_{0}^{1} u^{a_2}(1-u)^{a_3-1}du\right]$$

$$=K\,B(a_1+1,\ a_2+a_3+1)B(a_2+1,a_3)$$

$$=\frac{\Gamma(a_1+a_2+a_3)\Gamma(a_1+1)\Gamma(a_2+a_3+1)\Gamma(a_2+1)\Gamma(a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)\ \Gamma(a_1+a_2+a_3+2)\Gamma(a_2+a_3+1)}$$

$$=\frac{a_1\,a_2}{(a_1+a_2+a_3+1)(a_1+a_2+a_3)}.$$

وعلى ذلك :

$$\sigma_{XY}=E(X\,Y)-\mu_X\,\mu_Y.$$

$$=\frac{a_1\,a_2}{(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2+a_3+1)}-\frac{a_1\,a_2}{(a_1+a_2+a_3)^2}$$

$$=\frac{-a_1\,a_2}{(a_1+a_2+a_3)^2\,(a_1+a_2+a_3+1)}.$$

مثال (٧-٢٤) لدالة كثافة الاحتمال المشترك في مثال (٧-٢٢) أوجد التغاير.

الحل :

$$f(x,y)=24\,xy \qquad 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\ ,\ x+y\le 1$$

$$=0\ \text{elsewhere}.$$

$$f_1(x)=12\,x\ \ (1-x)^2 \qquad 0\le x\ \le 1$$

$$=0\ \text{elsewhere}.$$

بنفس الشكل يمكن إيجاد $f_Y(y)$ وذلك بإحلال y بدلا من x في $f_X(x)$. يمكن إثبات أن

$\mu_X=\mu_Y=\frac{2}{5}$ و

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ f\ (x\,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} xy.\ 24\,xy\ dy\ dx$$

$$=8\int_{0}^{1} x^2\ (1-x)^3\,dx\ =\ \frac{2}{15}.$$

$$\sigma_{XY}\ =Cov\,(X,Y)=\frac{2}{15}-\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{15}-\frac{4}{25}=-\frac{2}{75}.$$

نظرية (٧-١١) : إذا كان $X_1\ ,\ X_2,\ \ldots\ ,X_K$ متغيرات عشوائية فإن :

$$Var\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\ Var[X_i]+2\sum_{i<j}\sum\ Cov[X_i,X_j]$$

البرهان :

$$Var\left[\sum_{i=1}^{k}\ X_i\right]=E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\ X_i\ -E[\sum_{i=1}^{k}\ X_i]\ \right)^2\right]$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{k}\ (X_i\ -E[X_i\,])(X_j-E[X_j])\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{k}\ E\,[(X_i\ -E[X_i\,])(X_j-E[X_j])\,]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\ Var[X_i\,]+2\sum_{i<j}\ \sum\ Cov[X_i,X_j].$$

نتيجة (٧-١) إذا كانت $X_1\ ,\ X_2,\ \ldots\ ,X_K$ متغيرات عشوائية غير مرتبطة فإن :

$$Var(\sum_{i=1}^{k}X_i\,)=\sum_{i=1}^{k}Var(X_i\,)$$

مثال (٧-٤٣) أوجد التباين للمتغير Y لمثال (٣٩).

الحل : التباين للمتغير Y هو :

$$Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} pq = n\,p\,q.$$

نظرية (٧-١٢) إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ فئتين مـــن المتغــيرات العشوائية وإذا كانت $a_1 \ldots a_n$ و $b_1 \ldots b_m$ فئتين من الثوابت فإن :

$$Cov\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov[X_i, Y_j].$$

نتيجة (٧-٢)إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_k$ متغيرات عشوائية و $a_1, a_2, \ldots a_k$ ثوابت ، فإن:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i a_j Cov[X_i, X_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i^2\, Var[X_i] + \sum_{i \neq j} \sum a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

تعريف : إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين بتبايني σ_X^2, σ_Y^2 على التوالي وتغاير $Cov(X, Y) = \sigma_{XY}$ فإن معامل الارتباط correlation coefficient للمتغيرين X, Y هو :

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\, \sigma_Y}.$$

عموما إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_K$ متغيرات عشوائية عددها k بدالة كثافة احتمال مشـتركة $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ وإذا كان الانحراف المعيارى σ_i, σ_j موجبان فإن :

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sigma_i\ \sigma_j} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\ \sigma_j}.$$

يقال للمتغيرين X, Y أنهما غير مرتبطين uncorrected إذا كان $\rho = 0$ وغير ذلك يقـال أنهما مرتبطين .

مثال (٧-٤٤) إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين يتبعان التوزيع الثلاثى الحدود بدالــــة كثافة احتمال مشتركة على الشكل :

$$f(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,(n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 x_2}$$

حيث $0 \le x_1 + x_2 \le n$, x_1, x_2 قيم صحيحة موجبة . أوجد معامل الارتباط ρ بيــن المتغيرين X_1, X_2 .

الحل :

$$E(X_1 X_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2)$$

$$= \sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} x_1 x_2 \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} \times p_1^{x_1} \; p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2}.$$

$$= \sum_{x_1=1}^{n-1} \sum_{x_2=1}^{n-x_1} \frac{n!}{(x_1 - 1)!(x_2 - 1)!(n - x_1 - x_2)!} \times p_1^{x_1} \; p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2}$$

$$= n(n-1) p_1 \, p_2 \left[\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-2-i} \frac{(n-2)!}{i! j! (n - 2 - i - j)!} \times p_1^i \; p_2^j \; (1 - p_1 - p_2)^{n-2-i-j} \right]$$

$$= n\,(n-1)\, p_1 \; p_2 .$$

التغاير بين المتغيرين X_2 , X_1 هو :

$$\sigma_{12} = E[X_1 X_2] - \mu_1 \mu_2$$

$$= n(n-1) p_1 p_2 - n^2 p_1 p_2 = -n p_1 p_2,$$

وعلى ذلك معامل الارتباط بين المتغيرين X_2 , X_1 هو :

$$\rho_{12} = \frac{-n \, p_1 \, p_2}{\sqrt{n \, p_1 (1 - p_1) n \, p_2 (1 - p_2)}}$$

$$= -\sqrt{\frac{p_1 \; p_2}{(1 - p_1)(1 - p_2)}}.$$

مثال (٧-٥٤) للمثال (٧-٥) أوجد معامل الارتباط .

الحل :

من السهل إثبات أن :

$$\mu_X = 175, \; \mu_Y = 125,$$

$$\sigma_X^2 = 36250 - (175)^2 = 5625,\ E(X^2) = 36250\ ,\ E(Y^2) = 22500$$

$$\sigma_X = 75\ ,\quad \sigma_Y^2 = 6875\ ,\ \sigma_Y = 82.92\ ,Cov(X,Y) = 1875,$$

$$\rho = \frac{1875}{(75)(82.92)} = .301.$$

مثال (٧-٤٦) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X, Y على الشكل :

$$f(x,y) = x + y \qquad 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد معامل الارتباط .

الحل :

$$\mu_X = E(X) = \int_0^1\int_0^1 x(x+y)\,dx\ dy = \frac{7}{12},$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \int_0^1\int_0^1 x^2(x+y)dx\,dy$$

$$-\left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144},$$

وبنفس الشكل :

$$\mu_Y = E(Y) = \frac{7}{12}, \sigma_Y^2 = E(Y^2) - \mu_2^2 = \frac{11}{144},$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\,\mu_Y$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy\,(x+y)dx\,dy - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144}.$$

وعلى ذلك معامل الارتباط للمتغيرين X , Y هو :

$$\rho = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\left(\frac{11}{144}\right)\left(\frac{11}{144}\right)}} = -\frac{1}{11}.$$

نظرية (٧-١٣) إذا كان ρ هو معامل الارتباط بين X , Y فإن :

(أ) $-1 \le \rho \le 1$

(ب) $\rho = \pm 1$ وإذا كان فقط $Y = aX + b$ باحتمال 1 لقيم $a \ne 0, b$

البرهان : التسهيل سوف نضع :

$$\rho_{XY} = \rho, \sigma_{12} = \sigma_{XY}, \sigma_2 = \sigma_Y, \sigma_1 = \sigma_X, \mu_2 = \mu_Y, \mu_1 = \mu_X,$$

حتى نثبت أن (أ) $-1 \le \rho \le 1$ و بفرض أن

$$W = \frac{Y}{\sigma_2} - \rho\frac{X}{\sigma_1}$$

وعلى ذلك :

$$\text{Var}(W) = \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^2 \sigma_1^2 - 2\rho\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$
$$= 1 + \rho^2 - 2\rho$$
$$= 1 - \rho^2 \ge 0$$

وذلك لأن $\text{Var}(W) \ge 0$.

إثبات (ب) إن : $\rho = \pm 1$ تعني أن $\text{Var}(W) = 0$ والتي تعني أن $P[W = \mu_W] = 1$ و على ذلك باحتمال واحد فإن :

$$\frac{Y}{\sigma} - \frac{X\rho}{\sigma_1} = \frac{\mu_2}{\sigma_2} - \frac{\mu_1\rho}{\sigma_1}$$ أو $Y = aX + b$ حيث $a = \rho\sigma_2/\sigma_1$ و $b = \mu_2 - \mu_1\rho\sigma_2/\sigma_1$. ومن ناحية أخرى إذا كانت $Y = aX + b$ ومن تعريف التباين ومن نظرية (٧ - ٩) فإن : $\sigma_2^2 = a^2\sigma_1^2$, $\sigma_{12} = a\sigma_1^2$ وفي هذه الحالة فإن $\rho = a/|a|$ ومنها $\rho = 1$ إذا كانت $a > 0$, $\rho = -1$ إذا كانت $a < 0$.

نظرية (٧-١٤) إذا كان X, Y مستقلان فإن $\rho = 0$ ولكن $\rho = 0$ لا تعني أن X , Y مستقلان .

مثال (٧-٤٧) إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين متقطعين بدالة كثافة احتمال مشتركة على الشكل :

$$f(x;y) = \frac{1}{4} \quad (x,y) = (-4,1),(4,-1),(2,2),(-2,-2)$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد معامل الارتباط ρ وهل المتغيران مستقلان .

الحل :

$$\mu_X = \mu_Y = 0 \quad ,$$

$$E(XY) = (-4)\left(\frac{1}{4}\right) + (-4)\left(\frac{1}{4}\right) + (4)\left(\frac{1}{4}\right) + (4)\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

وعلى ذلك :

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)\ E(Y) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

وعلى ذلك $\rho = 0$ بالرغم من أن X, Y غير مستقلين وذلك لأن :

$$f(-4,1) = \frac{1}{4},$$

$$f_X(-4) = \frac{1}{4}, f_Y(1) = \frac{1}{4},$$

$$f(-4,1) \neq f_X(-4)\ f_Y(1).$$

مثال (٧-٤٨) إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة على الشكل :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{3} \qquad (x,y) = (-1,1), (1,1) \\ &= \frac{1}{6} \qquad (x,y) = (-2,4), (2,4) \\ &= 0 \ \text{elsewhere}. \end{aligned}$$

تذكر أن $P(Y = x^2) = 1$ ، وعلى ذلك لهذا التوزيع X, Y غير مستقلين ويمكن إثبات ذلك كالتالي :

$$f_X(-1) = \frac{1}{3}\ ,\ f_Y(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$f(-1,1) = \frac{1}{3} \neq \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right).$$

أيضا من السهل إثبات أن $E(XY) = 0$, $\mu_X = 0$ وعلى ذلك فإن :

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$= \frac{0}{\sigma_X \sigma_Y} = 0.$$

يتضح من ذلك أن عدم الارتباط بين X, Y لا يعنى بالضرورة أنهما مستقلان .

(٧-٧) التوقع الشرطي Conditional Expectation

بفرض أن $u(Y|x)$ أي دالة في Y . وإذا كانت الدال الشرطية للمتغير Y هي $f(y \mid x)$ فإنه يمكننا تعريف القيمة المتوقعة للدالة $u(Y|x)$ كالتالي.

تعريف : إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x,y)$ ، فإن التوقع الشرطى للمتغير Y إذا علم أن $X = x$ يعطى كالتالى :

$$\mu_{Y|x} = E(Y \mid x) = \sum_y y\, f(y \mid x).$$

عندما X , Y من النوع المتقطع ويعطى كالتالي :

$$\mu_{Y|x} = E(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y \mid x)\, dy.$$

عندما كان X , Y من النوع المتصل .

مثال (٧-٤٩) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y إذا علم أن $X = x$ هى :

$$f(y \mid x) = \frac{2}{x}, \quad 0 < y < \frac{x}{2} \quad , \ 0 < x < 2 \ , \ 0 < y < 1$$

أوجد $\mu_{Y|x}$.

الحل :

$$\mu_{Y|x} = E(Y \mid x) = \int_0^{x/2} y\left(\frac{2}{x}\right) dy = \frac{(2/x)(x/2)^2}{2}$$

$$= \frac{x}{4} \qquad 0 < x < 2.$$

مثال (٧-٥٠) إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة على الشكل :

$$f(x,y) = 2 \qquad 0 < x \le y \le 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

أوجد $E(Y|x)$ و $E(X|y)$

الحل :

دالة كثافة الاحتمال الهامشي لكل من X , Y على التوالي هما :

$$f_X(x) = \int_x^1 2\,dy = 2(1-x) \qquad 0 \le x \le 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2\,dx = 2y \qquad 0 \le y \le 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

دالة كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير Y إذا علم أن $X = x$ هي :

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2(1-x)} = \frac{1}{(1-x)},$$

$$x \le y \le 1 \;,\; 0 \le x \le 1.$$

المتوسط الشرطي للمتغير Y إذا علم أن $X = x$ هو :

$$E(Y|x) = \int_x^1 y \frac{1}{1-x} dy = \left[\frac{y^2}{2(1-x)}\right]_x^1$$

$$= \frac{1+x}{2} \quad , \qquad 0 \le x \le 1.$$

يلاحظ أن $\mu_{Y|x}$ دالة خطية في x تسمى دالة الانحدار.

أيضا دالة كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير X إذا علم أن $Y = y$ هي :

$$f(x|y) = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y} \qquad 0 < x < y \;,\; 0 < y < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

بنفس الشكل يمكن إثبات أن :

$$E(X\,|\,y)=\frac{y}{2}\quad,\quad 0\le y\le 1$$

مثال (٧-١٥) إذا كان إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين وإذا كانت دالة كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير Y إذا علم أن $X = x$ موضحة في الجدول التالي : أوجد $\mu_{Y|x}$ لجميع قيم X .

y	1	2	3	4	5
f(y|1)	0.5	0.333	0.167	0.000	0.000
f(y|2)	0.111	0.444	0.278	0.111	0.056
f(y|3)	0.027	0.135	0.676	0.135	0.027
f(y|4)	0.000	0.069	0.172	0.690	0.069
f(y|5)	0.000	0.100	0.100	0.200	0.600

الحل :

$\mu_{Y|x}$ (دالة الانحدار) يمكن التعبير عنها كالآتي :

$$\begin{aligned}\mu_{Y|x} &= 1.667 && x=1\\ &= 2.557 && x=2\\ &= 3.0 && x=3\\ &= 3.759 && x=4\\ &= 4.3 && x=5\end{aligned}$$

فعلى سبيل المثال $\mu_{Y|3}$ يمكن الحصول عليها من الجدول السابق كالآتي :

$$\begin{aligned}\mu_{Y|3} &= \sum_{y=1}^{5} y\ f(y\,|\,3)\\ &= (1)(0.027)+(2)(.135)+(3)(.676)\\ &\quad +(4)(.135)+(5)(.027)=3.0\,.\end{aligned}$$

يجب أن نعلم أن التوقع الشرطي للمتغير Y إذا علم أن $X=x$ دالة في x ، لتكن $u(x)=E(Y|x)$. النظرية التالية تنص على ،عموما، أن المتغير العشوائي $u(X)=E(Y|x)$ له التوقع الهامشي للمتغير Y، أي $E(Y)$.

نظرية (٧-١٥) إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمـــال المشـتركة f (x,y) فإن :

$$E[E(Y|x)] = E(Y)$$

البرهان : بفرض أن حالة متغيرين عشوائيين من النوع المتصل .

$$E[E(Y|x)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|x) f_1(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) f_1(x)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_2(x)\, dy$$

$$= E(Y).$$

مثال (٧-٥٢) للمثال (٧-٤٩) وإذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير X هي :

$$f_1(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2.$$

أوجد E (Y)

الحل :

$$E(Y) = E[E(Y|x)] = \int_0^2 \left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{3}.$$

نظرية (٧-١٦) إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن :

$$E[X|y] = E(X), \quad E(Y|x) = E(Y).$$

البرهان : إذا كان X, Y مستقلين فإن :

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y).$$

وعلى ذلك $f(x|y) = f_1(x), f(y|x) = f_2(y)$. في حالة متغيرين عشوائيين من النوع المتصل فإن :

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\, dy$$

$$= E(Y).$$

في حالة متغيرين عشوائيين مستقلين من النوع المتقطع يستبدل التكامل بالمجموع .

أيضا يكون من المفيد دراسة التباين للتوزيعات الشرطية والتى يشار إليها بالتباين الشرطى.

تعريف : التباين الشرطى للمتغير Y إذا علم $X = x$ ، هو :

$$Var(Y|x) = E\{ [Y - E(Y|x)]^2 | x \}$$

هناك صيغة مكافئه للصيغة السابقة هى :

$$Var(Y|x) = E(Y^2 | x) - [E(Y|x)]^2$$

مثال (٧-٥٣) للمثال (٧-٥٢) أوجد (أ) التباين الشرطي $\sigma^2_{X|y}$ (ب)

$$P(0 < X < \frac{1}{2} | \frac{3}{4})$$

(أ)

$$E\{[X - E(X|y)]^2 | y\} = \int_0^y (x - \frac{y}{2})^2 \left(\frac{1}{y}\right) dx$$

$$= \frac{y^2}{12} \qquad 0 < y < 1 .$$

(ب)

$$P(0 < X < \frac{1}{2} | \frac{3}{4})$$

$$\int_0^{1/2} f(x | \frac{3}{4}) dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{4}{3}\right) dx = \frac{2}{3}.$$

مثال (٧-٥٤) إذا كان X, Y لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة f (x,y) التي تتبع توزيع Dirichlet وإذا كانت f(y|x) على الشكل :

$$f(y|x) = \frac{y^{a_2 - 1}(1 - x - y)^{a_3 - 1}}{(1 - x)^{a_2 + a_3 - 1} B(a_2, a_3)} \quad 0 \le y \le 1 - x$$

$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد : $\mu_{Y|x}$ ، $\sigma^2_{Y|x}$.

الحل :

$$\mu_{Y|x} = \int_{-\infty}^{\infty} y f\ (y\,|\,x)\ dy$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{a_2+a_3-1} B(a_2,a_3)} \int_0^{1-x} y\left[y^{a_2-1}(1-x-y)^{a_3-1}\right]dy$$

$$= (1-x)\int_0^1 \frac{u^{a_2-1}(1-u)^{a_3-1}du}{B(a_2,a_3)}$$

$$= (1-x)\frac{B(a_2+1,a_3)}{B(a_2,a_3)}$$

$$= (1-x)\left(\frac{a_2}{b_2+a_3}\right)$$

وبوضع $u = y\,/\,(1\text{-}x)$ فإن :

$$\sigma^2_{Y|x} = \frac{1}{(1-x)^{a_2+a_3-1} B(a_2,a_3)} \int_0^1 \left[y\ \ -(1-x)\frac{a_2}{a_2+a_3}\right]^2$$

$$\times(\,y^{a_2-1}(1-x-y)^{a_3-1}\ dy$$

$$= (1-x)^2 \int_0^1 \frac{(u-\dfrac{a_2}{a_2+a_3})^2 u^{a_2-1}(1-u)^{a_3-1}}{B(a_2,a_3)}du$$

وعلى ذلك :

$$\sigma^2_{Y|x} = (1-x)^2 \frac{a_2\, a_3}{(a_2+a_3)^2(a_2+a_3+1)}$$

$$= (1-x)^2\ \sigma^2_U.$$

حيث U لها دالة بيتا بمعلمتين $a = a_2\ ,\ b = a_3$ ويجب أن نعلم أن التوقع الشرطى للمتغير Y إذا علم أن $X = x$ يكون دالة فى x .

نظرية (٧-١٧) إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة احتمال مشتركة **f(x,y)** فإن :

$$\text{Var}\ (Y) = E_X\ [\ \text{Var}\ (Y|X)\ ] + \text{Var}_X\ [\ E(Y|X\ )\ ]$$

البرهان :

$$E_X(\text{Var}\ (Y|X)\ ]\ =\ E_X\ \{\ E(Y^2|X) - [\ E(Y|X)\ ]^2\ \}$$

$$=\ \{\ E(Y^2) - E_X\ [\ E(Y|X)\ ]^2\ \}$$

$$- [E(Y)]^2 \}$$
$$= Var(Y) - Var_X [E(Y|X)].$$

يمكن تعميم صيغة التوقع الشرطي لمتغيرين عشوائيين Y, X وذلك لمتغيرات عشوائية $X_1, X_2, ..., X_k$. فعلى سبيل المثال التوقع الشرطي للدالة $u(X_2, ..., X_k)$ إذا علم أن $X_1 = x_1$ وذلك لمتغير عشوائي متصل تعطى كالتالي :

$$E[u(X_2,...,X_n)|\ x_1] = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} u(x_2,...,x_k)$$
$$\times f(x_2,...,x_k \mid x_1) dx_2 ... dx_k .$$

بشرط أن $f_1(x_1) > 0$ وأن التكامل موجود . إذا كانت المتغيرات العشوائية من النوع المتقطع فإن التوقعات الشرطية تحسب بنفس الطريقة مع استبدال التكامل بالمجموع .

نظرية (٧-١٨) إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x,y)$ وإذا كانت $h(x,y)$ دالة فإن :

$$E[h(X,Y)] = E_X \{ E[h(X, Y) \mid X] \}.$$

نظرية (٧-١٩) إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x,y)$ وإذا كانت $g(x)$ دالة فإن :

$$E[g(X)\, Y | x] = g(x)\ E(Y|x).$$

مثال (٧-٥٥) إذا كان $(X, Y) \sim MULT(n, p_1\ p_2)$ فإنه يمكن استخدام نظرية (٧-١٨) في إيجاد التغاير بين X, Y كما يلي :

$$E(XY) = E[E(XY|X)]$$
$$= E[X\ E(Y|X)]$$
$$= E\left(\frac{X(n-X)p_2}{1-p_1}\right) = \left[\frac{p_2}{1-p_1}\right]\left[n\,E(X) - E(X^2)\right].$$

وبما أن $X \sim BIN(n, p_1)$, $Y \sim BIN(n, p_2)$ و $Y|x \sim BIN(n-x, p)$ حيث $p = p_2/(1-p_1)$ ، فإن $E(X) = n\,p_1$ و

$$E(X^2) = Var(X) + (n\,p_1)^2 = n\,p_1 [1 + (n-1)p_1]$$

وعلى ذلك :

$$E(X\,Y) = n(n-1)\,p_1\ p_2 .$$

وبالتالي فإن :

$$Cov(X, Y) = n(n-1)p_1 p_2 - (np_1)(np_2) = -np_1 p_2 .$$

بما أن المتوسط الشرطي للمتغير Y إذ اعلم أن $X = x$ دالة فـــي x فقــط ، لتكــن $\varphi(x)$. وبنفس الشكل فإن المتوسط الشرطي للمتغير X إذا علم أن $Y = y$ دالة فى Y فقط ، لتكن $\Psi(y)$. إذا كانت $\varphi(x)$ دالة خطية فى x على الشكل $\varphi(x)= a + bx$ فإننا نقـول أن المتوسط الشرطي للمتغير Y دالة خطية في x حيث a, b ثابتان والمطلوب تقديرهما كما يأتى تحت شرط أن $0 < \sigma_2^2 > 0 , \sigma_1^2$ حيث σ_1^2, σ_2^2 هما تبايني X , Y على التوالي :

$$E(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \; f(y \mid x)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \; \frac{f(x,y)}{f_1(x)}\, dy$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y \; f(x,y)\, dy}{f_1(x)} = a + bx,$$

أي أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \; f(x,y)\; dy = (a + bx) f_1(x) \qquad (٧-٢)$$

إذا كان طرفى المعادلة السابقة قابلين للتكامل فى x فإن :

$$E(Y) = a + b\; E(X)$$

أو

$$\mu_2 = a + b\mu_1 \qquad (٧-٣)$$

حيث $\mu_1 = E(X)$, $\mu_2 = E(Y)$. إذا ضربنا طرفى المعادلة (٧-٢) أولاً فى x ثـــم التكامل بالنسبة لــ x فإن :

$$E(X\,Y) = a\; E(X) + b\, E(X^2),$$

أو :

$$\rho\, \sigma_1\, \sigma_2 + \mu_1 \mu_2 = a\mu_1 + b(\sigma_1^2 + \mu_1^2) \qquad (٧-٤)$$

حيث $\rho\, \sigma_1\, \sigma_2$ هو التغاير للمتغيرين X , Y حيث ρ هو معامل الارتباط بين X,Y .

بحل المعادلتين (٧-٣) و (٧-٤) آنيا فإن :

$$a = \mu_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mu_1 \quad , \quad b = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

أي أن :

$$\varphi(x) = E(Y \mid x) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1).$$

هو المتوسط الشرطي للمتغير Y إذا علم أن X = x عندما يكون المتوسط الشرطي للمتغير Y دالة خطية في x . إذا كان المتوسط الشرطي للمتغير X إذا علم أن Y = y خطى في y فإن المتوسط الشرطي يعطى بالمعادلة :

$$\Psi(y) = E(X \mid y) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2).$$

في الجزء التالي ، تحت فرض أن المتوسط خطى ، سوف نثبت أن التباين الشرطي للمتغير Y إذا علم أن X = x ، يساوى $\sigma_2^2(1-\rho^2)$. التباين الشرطي للمتغير Y إذا علم أن X = x هو :

$$E\{[Y - E(Y \mid x)]^2 \mid x\} = \int_{-\infty}^{\infty} [y - \mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)]^2 f(y \mid x)\, dy$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [(y - \mu_2) - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)]^2 f(x, y)\, dy}{f_1(x)}.$$

(٧-٥)

وذلك عندما يكون X , Y من النوع المتصل . وبضرب طرفى المعادلة السابقة فى $f_1(x)$ والتكامل بالنسبة لـ x نحصل على :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[(y-\mu_2)-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)]^2 f(x,y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[(y-\mu_2)^2-2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(y-\mu_2)(x-\mu_1)$$

$$+\rho^2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2]\ f(x,y)\,dy\ dx$$

$$=E[(Y-\mu_2)^2]-2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}E[(X-\mu_1)\ (Y-\mu_2)]$$

$$+\ \rho^2\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}E[(X-\mu_1)^2]$$

$$=\sigma_2^2-2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho\sigma_1\sigma_2+\rho^2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\ \sigma_1^2$$

$$=\ \sigma_2^2-2\rho^2\ \sigma_2^2+\rho^2\ \sigma_2^2=\sigma_2^2(1-\rho^2)\geq 0\ .$$

وبفرض أن التباين في المعادلة (٧-٥) موجب وليس دالة في x .أي أن التباين ثابت ويساوى k حيث k>0 . الآن وبضرب الثابت k في $f_1(x)$ والتكامل بالنسبة إلى x فإن النتيجة سوف تكون k أي أن $k=\sigma_2^2(1-\rho^2)$. في هذه الحالة فإن تباين التوزيع الشرطي للمتغير Y إذا علم أن X=x هو $k=\sigma_2^2(1-\rho^2)$. إذا كان $\rho=0$ فإن التباين لكل توزيع شرطي للمتغير Y إذا علم أن X=x هو σ_2^2.

مثال (٨-٥٦) إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين ولهما المتوسط الشرطي الخطى لكل من المتغيرين X, Y حيث $E(Y\,|\,x)=4x+3$, $E(X\,|\,Y)=\frac{1}{16}y-3$ وعلى ذلك $E(Y\,|\,x)=\mu_2$ إذا كانت $x=\mu_1$, $E(X\,|\,Y)=\mu_1$ إذا كانت $y=\mu_2$ وذلك بالتعويض في الصيغة .في هذه الحالة الخاصة فإن $\mu_2=4\mu_1+3$, $\mu_1=\frac{1}{16}\mu_2-3$ وبالتالي فإن $\mu_1=-\frac{15}{4}$, $\mu_2=-12$.ومن الصيغة العامة للمتوسط الشرطي الخطى يمكن إثبات أن ρ^2 تساوى حاصل ضرب معامل x فى معامل y أى أن $\rho^2=4\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{4}$

حيث $\rho=\frac{1}{2}$ (وليس $-\frac{1}{2}$) $\sigma_2^2/\sigma_1^2=64$. وعلى ذلك من صيغة المتوسط الشرطي الخطى فإننا نكون قادرين على إيجاد ρ, μ_1, μ_2 , σ_2/σ_1 وليس σ_2, σ_1 .

(٧-٨) حاصل الضرب والقسمة

Product and Quotient :

تناولنا فى الأجزاء السابقة المتوسط والتباين لمجموع (أو الفرق بين) متغيرات عشوائيين وقد وجدنا أن المتوسط والتباين لمجموع (أو الفرق) بين متغيرين عشوائيين Y , X يمكن التعبير عنها بدلالة متوسطي وتبايني X , Y وأيضا بدلالة التغاير. الآن سوف نناقش مشكلة إيجاد العزمين الأوليين لحاصل ضرب و قسمة متغيرين عشوائيين X, Y .

نظرية (٧-٢٠) ليكن X, Y متغيرين عشوائيين حيث : Var (XY) موجود ، فإن :

$$E(XY]=\mu_X\mu_Y+Cov[X,Y],$$

$$\begin{aligned}Var[X,Y]=\mu_Y^2\ Var[X]+\mu_X^2\ Var[Y]+2\mu_X\,\mu_Y\\ \times Cov[X,Y]-(Cov[X,Y])^2\\ +E[X-\mu_X)^2(Y-\mu_Y)^2]+\\ 2\mu_Y E[(X-\mu_X)^2(Y-\mu_Y)]+2\mu_X\\ E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)^2].\end{aligned}$$

البرهان :

$$\begin{aligned}XY=\mu_X\,\mu_Y+(X-\mu_X)\mu_Y+(Y-\mu_Y)\mu_X\\ +(X-\mu_X)\ (Y-\mu_Y)\end{aligned}$$

بحساب $E[XY]$, $E[(XY)^2]$ يمكن الوصول للنتيجة المطلوبة.

نتيجة (٧-٣) إذا كان X Y مستقلين فإن :

$$E\{XY\}=\mu_X\ \mu_Y\ ,\ \ Var\{XY\}=\mu_Y^2\ Var[X]+\mu_X^2\ Var[Y]+Var[X]\,Var[Y].$$

البرهان :

بما أن X , Y مستقلين فإن :

$$E[(X-\mu_X)^2\ (Y-\mu_Y)^2]=E[(X-\mu_X)^2]\ E[(Y-\mu_Y)^2]$$
$$= Var[X]\ Var[Y],$$
$$E[(X-\mu_X)^2\ (Y-\mu_Y)]=E[(X-\mu_X)^2]$$
$$\times E[(Y-\mu_Y)]=0.$$

و

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)^2]=0.$$

ويجب أن نعلم أن المتوسط لحاصل الضرب يمكن التعبير عنه بدلالة المتوسط والتغاير لكل من X, Y ولكن التباين لحاصل الضرب يتطلب رتبه أعلى من العزوم .

نظرية (٧- ٢١) .

$$E\left[\frac{X}{Y}\right]\approx\frac{\mu_X}{\mu_Y}-\frac{1}{\mu_Y^2}Cov[X,Y]+\frac{\mu_X}{\mu_Y^3}Var[Y],$$
$$Var\left[\frac{X}{Y}\right]\approx\left(\frac{\mu_X}{\mu_Y}\right)^2\left(\frac{Var[X]}{\mu_X^2}+\frac{Var[Y]}{\mu_Y^2}-\frac{2Cov(X,Y)}{\mu_X\ \mu_Y}\right).$$

البرهان :

لإيجاد صيغة تقريبية لـ E [X|Y] يمكن استخدام مسلسلة تيلور للدالة x|y حول (μ_X,μ_Y) ثم حذف كل الحدود التى لها رتبه أعلى من 2 وأخذ التوقع للطرفين .الصيغة التقريبية لـ Var [X| y] يمكن الحصول عليها بنفس الطريقة مع إبقاء فقط الحدود من الرتبة الثانية .

(٧- ٩) الدوال المولدة للعزوم المشتركة

joint Moment Generating function

يمكن تعميم الدالة المولدة وذلك للمتغيرات العشوائية فى البعد k .

تعريف : الدالة المولدة للعزوم لمتجه من المتغيرات العشوائية $X=(X_1,X_2,...,X_k)$ يعرف كالتالي :

$$M_X(t)=E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\ X_i\right)\right]$$

حيث $t=(t_1,\dots,t_k)$, $-h<t_i<h$ و $h>0$.

لكل دالة كثافة احتمال مشتركة دالة مولدة (إذا وجدت) وحيدة أي أن لها خاصية الوحدانيـــة وعلى ذلك تستخدم في تقدير دالة كثافة الاحتمال المشتركة وأيضا كل الدوال الهامشية .فعلـــى سبيل المثال الدالة المولدة للعزوم للمتغير X_i هي :

$$M(0, 0, 0, t_i, 0, \ldots, 0).$$

حيث $i=1,2,\ldots,n$. أيضا الدالة المولدة للعزوم للمتغيرين X_i, X_j هي :

$$M(0, 0, \ldots, t_i, 0, 0, \ldots, t_j, 0, 0, \ldots, 0).$$

نظرية (٧-٢٢) إذا كانت $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ موجودة فإن المتغيرين العشوائيين X, Y يكونان مستقلان إذا وفقط إذا .

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = M_{X,Y}(t_1, 0)\, M_{X,Y}(0, t_2) .$$

البرهان :

إذا كان X, Y متغيرين مستقلين فإن :

$$\begin{aligned}
M_{X,Y}(t_1,t_2) &= E\left(e^{t_1X + t_2Y}\right) \\
&= E\left(e^{t_1X}\, e^{t_2Y}\right) \\
&= E\left(e^{t_1X}\right)E\left(e^{t_2Y}\right) \\
&= M_{X,Y}(t_1,0)\, M_{X,Y}(0,t_2) \\
&= M_X(t_1)M_Y(t_2).
\end{aligned}$$

الآن المتغير X له دالة مولدة للعزوم وحيدة ، حيث X من النوع المتصل ، وتعطى كالتالى :

$$M_{X,Y}(t_1,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x} f_1(x)\, dx .$$

وبنفس الشكل الدالة المولدة للعزوم والوحيدة للمتغير Y ، من النوع المتصل ، هى :

$$M_{X,Y}(0,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2y} f_2(y)\, dy .$$

وعلى ذلك :

$$\begin{aligned}
M_{X,Y}(t_1,0)\, M_{X,Y}(0,t_2) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x} f_1(x)\, dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2y} f_2(y)\, dy\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x+t_2y} f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

وتحت فرض أن $M_{X,Y}(t_1, t_2) = M_{X,Y}(t_1, 0)\, M_{X,Y}(0, t_2)$ فإن :

$$M_{X,Y}(t_1\ t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x+t_2y} f_1(x) f_2(y)\ dx\ dy\ .$$

ولكن $M_{X,Y}(t_1 , t_2)$ هى الدالة المولدة المشتركة للعزوم للمتغيرين X , Y وعلى تلك أيضا :

$$M_{X,Y}(t_1\ t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x+t_2y} f\ (x,y)\ dx\ dy\ .$$

ولخاصية الانفرادية uniqueness للدالة المولدة للعزوم فإن هذا يعنى أن :

$$f(x, y) = f_1(x)\ f_2(y)\ .$$

أي أنه إذا كان $M_{X,Y}(t_1 , t_2) = M_{X,Y}(t_1 ,0)\ M_{X,Y}(0, t_2)$ فإن X, Y مستقلان . عندما X, Y متغيرين عشوائيين من النوع المتقطع فإن الإثبات يمكن الحصول عليه باستبدال التكامل بالمجموع .

يمكن تعميم النظرية السابقة لحالة k من المتغيرات العشوائية $X_1,X_2,...,X_k$ حيث :

$$M_X(t_1,t_2,...,t_k)=\prod_{i=1}^{k} M_X(0,...,0,t_i,0,...,0)$$

إذا وإذا فقط كان $X_1,X_2,...,X_k$ مستقلين .

إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين من النوع المتصل فإن :

$$\frac{\partial^{k+m}M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^k\ \partial t_2^m}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k\ y^m\ e^{t_1x+t_2y}\ f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\left.\frac{\partial^{k+m}M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^k\ \partial t_2^m}\right|_{t_1=t_2=0}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k\ y^m\ f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$=E\left(X^k\ \ Y^m\right).$$

وعلى ذلك :

$$\mu_1 = E(X) = \frac{\partial M_{X,Y}(0,0)}{\partial t_1} ,$$

$$\mu_2 = E(Y) = \frac{\partial M_{X,Y}(0,0)}{\partial t_2} ,$$

$$\sigma_1^2 = E(X^2) - \mu_1^2 = \frac{\partial^2 M_{X,Y}(0,0)}{\partial^2 t_1^2} - \mu_1^2 ,$$

$$\sigma_2^2 = E(Y^2) - \mu_2^2 = \frac{\partial^2 M_{X,Y}(0,0)}{\partial t_2^2} - \mu_2^2 ,$$

$$\sigma_{XY} = \frac{\partial^2 M_{X,Y}(0,0)}{\partial t_1 \, \partial t_2} - \mu_1 \mu_2 .$$

مثال (٧-٥٧) إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين من النوع المتصل بدالـة كثافـة احتمـال مشترك .

$$f(x, y) = e^{-y} \qquad 0 < x < y < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

أوجد $M_{X,Y} \; (t_1 , t_2)$.

الحل :

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \exp(t_1 x + t_2 y - y) \, dy \, dx$$

$$= \frac{1}{(1 - t_1 - t_2)(1 - t_2)}$$

حيث $t_1 + t_2 < 1 \; , \; t_2 < 1$.

لهذا التوزيع فإن :

$$\mu_1 = 1 \; , \; \mu_2 = 2 ,$$
$$\sigma_1^2 = 1 \; , \; \sigma_2^2 = 2 ,$$
$$\sigma_{XY} = 1 .$$

أيضا يمكن الحصول على $M_X(t_1)$ و $M_Y(t_2)$ كالتالى :

$$M(t_1,0)=\frac{1}{1-t_1}\ ,t_1<1,$$

$$M(0,t_2)=\frac{1}{(1-t_2)^2}\ ,t_2<1.$$

والمقابلان لـــ $f_2(x)$, $f_1(y)$ حيث :

$$f_1(x)=\int_x^{\infty} \bar{e}^y\ dy = \bar{e}^x \qquad 0<x<\infty\ ,$$

$$f_2(y)=\bar{e}^y \int_0^y dx = y\,\bar{e}^y \quad 0<y<\infty\ .$$

مثال (٧-٨٥) إذا كان $(X_1, X_2,\dots, X_{k-1}) \sim MULT(n, p_1, p_2,\dots, p_{k-1})$ أوجد الدالة المولدة للعزوم إذا كان عدد المتغيرات العشوائية يساوى k-1 وأثبت أن الدالة الهامشـية والخاصة بمتغير عشوائي X_1 تتبع توزيع ذي الحدين حيث $X_1 \sim BIN\ (n, p_1)$.

الحل :

$$M_X(t)=E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1} t_i X_i\right)\right]$$

$$=\Sigma\ \dots\Sigma\ \ \frac{n}{x_1!\ x_2!\dots x_k}$$

$$\times\ \left((p_1\ e^{t_1}\right)^{x_1}\dots\left(p_{k-1}\ e^{t_{k-1}}\right)^{x_{k-1}}(p_k\ )^{x_k}$$

$$=\ \left((p_1\ e^{t_1}+\dots+p_{k-1}\ e^{t_{k-1}}+p_k\right)^n$$

حيث $p_k=1-\sum_{i=1}^{k-1} p_i$, $x_k=n-\sum_{i=1}^{k-1} x_i$.

بفرض أن $X=(X_1, X_2, X_3) \sim MULT(n, p_1, p_2, p_3)$ فإن :

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2)=M_X(t_1,t_2,0)$$

$$=\left[p_1e^{t_1}+p_2e^{t_2}+p_3+1-p_1-p_2-p_3\right]^n$$

$$=\left[p_1e^{t_1}+p_2e^{t_2}+(1-p_1-p_2)\right]^n.$$

وعلى ذلك : $(X_1\ , X_2) \sim MULT\ (n, p_1\ , p_2)$

و

$$M_{X_1}(t_1,0,0)=\left[p_1 e^{t_1}+(1-p_1)\right]^n$$

هي الدالة المولدة للعزوم للمتغير X_1 .

(٧-١٠) التوزيع الطبيعي الثنائي Bivariate Normal Distribution

يقال للمتغيرين العشوائيين X , Y أن لهما دالة التوزيع الطبيعي الثنائي إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لهما على الشكل :

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

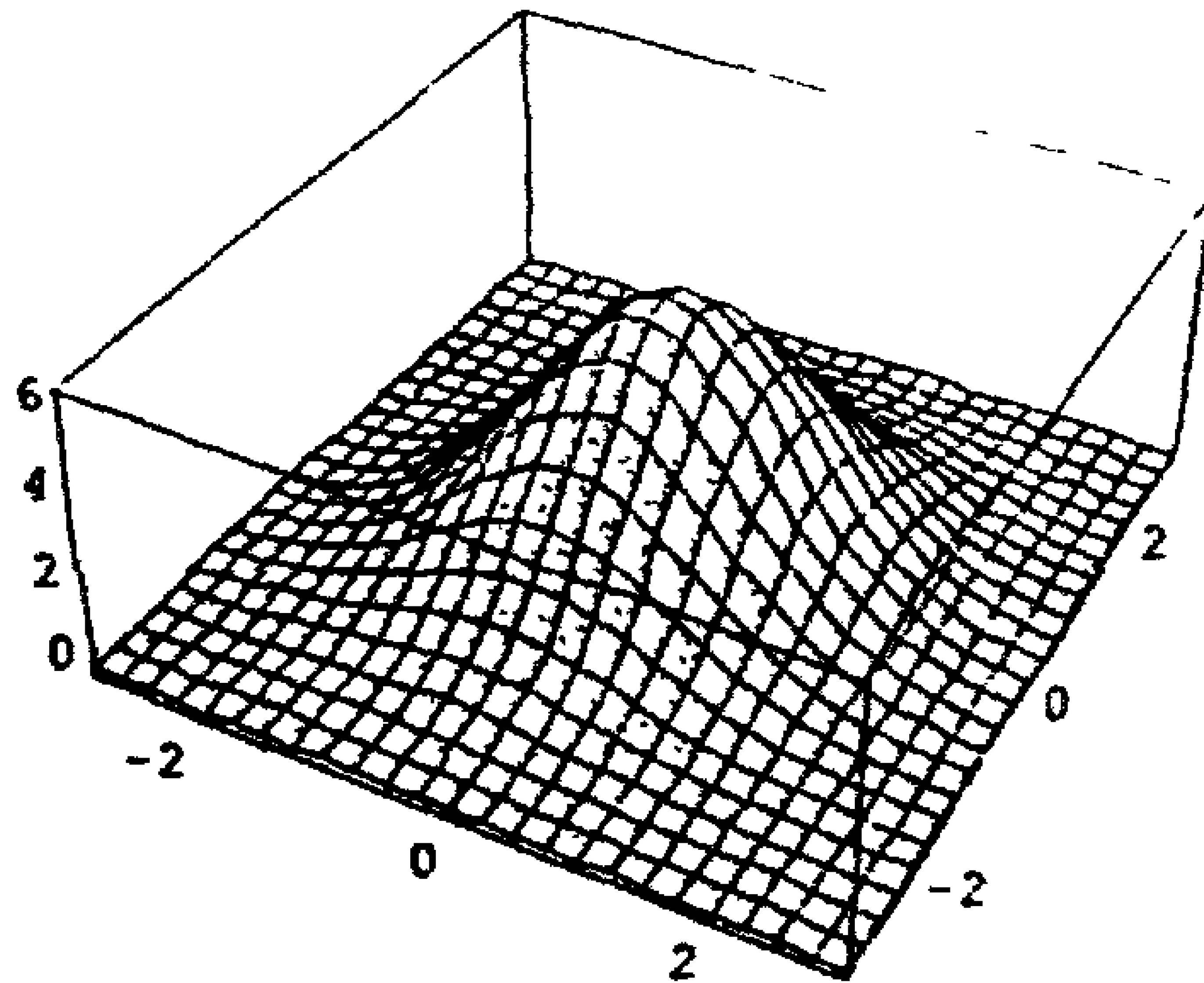
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \qquad (٧-٦)$$

$$-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty$$

سوف نكتب $(X,Y)\sim BVN(\mu_1,\mu_2,(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho))$ للدلالة على أن X , Y متغيرين عشوائيين لهما دالة التوزيع الطبيعي الثنائي بمعالم $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ حيث :

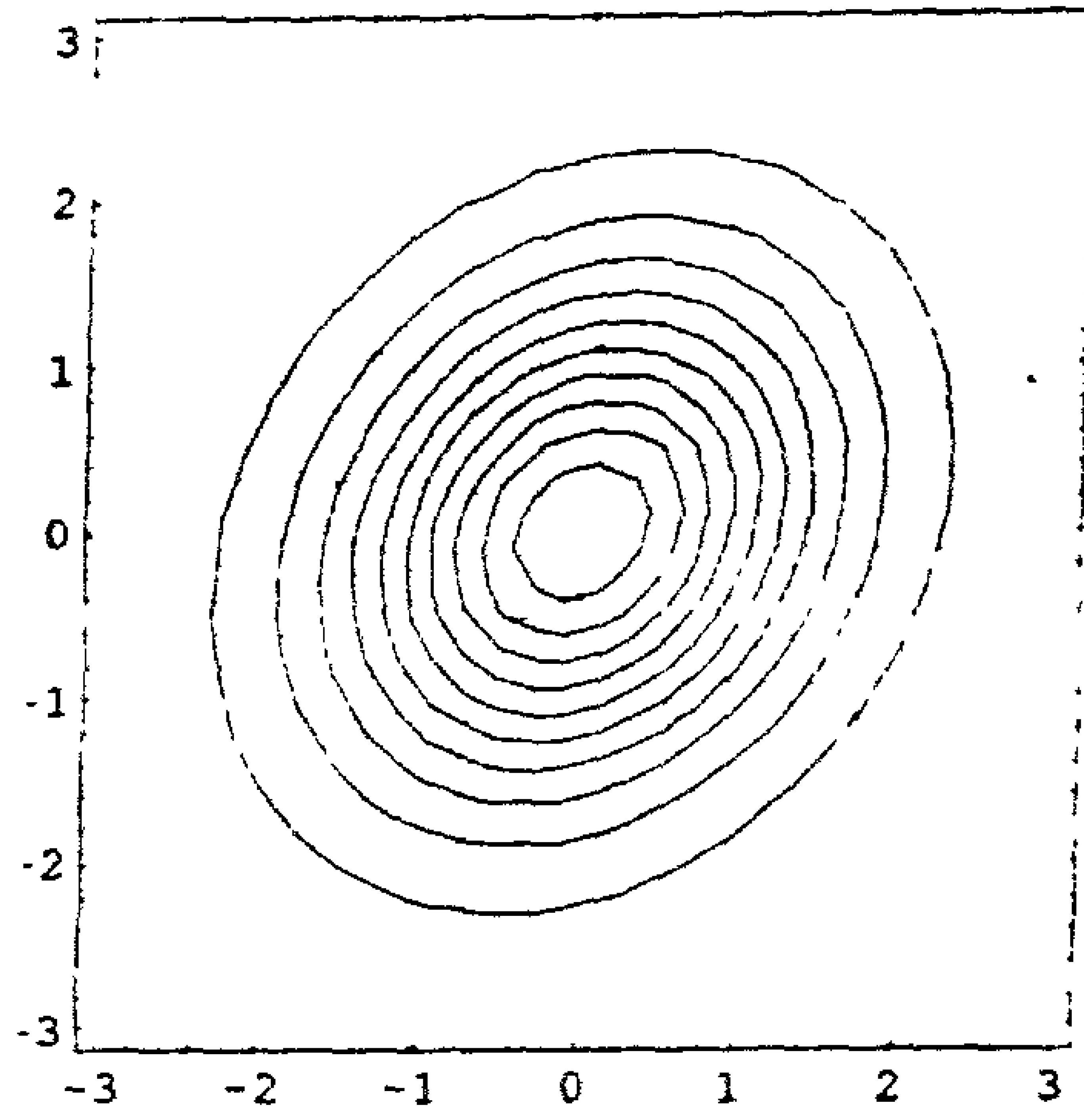
$$-1<\rho<1\ ,\ \sigma_2>0\ ,\ \sigma_1>0\ ,\ -\infty<\mu_2<\infty\ ,\ -\infty<\mu_1<\infty$$

بيان $f(x,y)$ موضح في شكل (٧-٦) والكونتورات الخاصة به موضح في (٧-٧) .



شكل (٧-٦)

شكل (٧-٧)



نظرية (٧-٢٣) إذا كان $(X, Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho))$ فإن :
$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ حيث ρ هو معامل الارتباط بين X, Y .
البرهان : بفرض أن الدالة التربيعية :

$$Q(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\,\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2^2)}{\sigma_2^2}\right] \quad (٧-٧)$$

وعلى ذلك من (٧-٧) فإن :

$$Q(x,y)-\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$=\frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[(y-\mu_2)^2-2(y-\mu_2)(\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1})(x-\mu_1)+\rho^2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(x-\mu_1))^2\right]$$

$$=\frac{[y-\mu_2-(\rho\sigma_2/\sigma_1)(x-\mu_1)]^2}{\sigma_2^2(1-\rho^2)},$$

وبنفس الشكل :

$$Q(x,y)-\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=\left[\frac{[x-\mu_1-(\rho\sigma_1/\sigma_2)(y-\mu_2)]^2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right].$$

(٧-٨)

من (٧-٦) و (٧-٧) و (٧-٨) فإن :

$$f(x,y)=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2/\sigma_1^2\right]}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}$$

$$\times\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}[y-\mu_2-(\rho\sigma_2/\sigma_1)(x-\mu_1)]^2/\sigma_2^2(1-\rho^2)\right]}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(1-\rho^2)}}.$$

(٧-٩)

وعلى ذلك :

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2/\sigma_1^2\right]}{\sqrt{(2\pi)\sigma_1^2}} \qquad (٧-١٠)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}[y-\mu_2-(\rho\sigma_2/\sigma_1)(x-\mu_1)]^2/\sigma_2^2(1-\rho^2)\right]dy}{\sqrt{(2\pi)\ \sigma_2^2\ (1-\rho^2)}},$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2/\sigma_1^2\right]}{\sqrt{(2\pi)\sigma_1^2}}. \qquad (١١-٧)$$

وعلى ذلك ، ومن (٧-١١) فـــإن $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ وبنفـس الشـكل يمكـن إثبـات أن $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. أيضاً أي علاقة خطية على الشكل $a\ X + b\ \ Y + c$ تتبـع التوزيـع الطبيعى حيث :

$$aX+bY+c \sim N(a\mu_1+b\mu_2+c, a^2\sigma_1^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2+b^2\sigma_2^2).$$

(١٢-٧)

يعتبر التوزيع الطبيعي الثنائي هو التوزيع المشترك الوحيد لمتغيرين Y , X لـه الخاصيـة (٧-١٢) لكل الثوابت a, b, c . ومن ناحية أخرى فإن كثير من التوزيعـات الثنائيـة الغـير طبيعية لها دوال هامشية تتبع التوزيع الطبيعى . وعلى ذلك فإن خاصية أن الـدوال الهامشـية طبيعيـة لا تميـز التوزيـع الطبيعـي الثنـائي بمعنـى أنـه إذا كـان $X_1 \sim N(\mu_X,\sigma_1^2)$ و $Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ فهذا لا يعنى أن X, Y لهما توزيع طبيعـي ثنائي .

الآن سوف نثبت أنـه إذا كـان $(X,Y) \sim BVN(\mu_1,\mu_2,(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho))$ فـإن معامل الارتباط ρ_{XY} بين X, Y هو ρ . ولعمل ذلك نوجد أولاً σ_{XY} كالتالي :

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\,dx\ dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)\exp\left[-\frac{1}{2}Q(x,y)\right]}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}dx\ dy.$$

(١٣-٧)

حيث $Q(x,y)$ تم تعريفها من (٧-٧) . وبوضع :

$u=(x-\mu_1)/\sigma_1$ ، $v=(y-\mu_2)/\sigma_2$ في (٧-١٣) فإن :

$$\sigma_{XY}=\sigma_1\sigma_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{uv\exp\left[-\frac{1}{2}(u^2-2\rho uv+v^2)/(1-\rho^2)\right]}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}}du\ dv$$

$$=\sigma_1\sigma_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v\exp\left[-\frac{1}{2}v^2\right]}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u\exp\left[-\frac{1}{2}(u-\rho v)^2/(1-\rho^2)\right]}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}du\right]dv.$$

(٧-١٤)

يمكن اعتبار التكامل الداخلـــى هـــو المتوســط لمتغــير عشـــوائى يتبــع التوزيــع الطبيعـــى $N(\rho v,(1-\rho^2))$. وعلى ذلك (٧-١٤) تصبح :

$$\sigma_{XY}=\sigma_1\sigma_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v\exp\left[-\frac{1}{2}v^2\right]}{\sqrt{2\pi}}(\rho v)\,dv$$

$$=\sigma_1\sigma_2\rho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v^2\exp\left[-\frac{1}{2}v^2\right]}{\sqrt{2\pi}}\,dv$$

$$=\sigma_1\sigma_2\,\rho\,E(V^2),$$

حيث $V\sim N(0,1)$ وحيث :

$$E(V^2)=\sigma_V^2+\mu_V^2=1,$$

$$\sigma_{XY}=\sigma_1\,\sigma_2\,\rho$$

وعلى ذلك :

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\sigma_1\sigma_2}=\rho\ .$$

وعلى ذلك إذا كان $(X,Y)\sim BVN(\mu_1,\mu_2,(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho))$ فإن معامل الارتباط هو ρ :

نظرية (٧- ٢٤) إذا كان $(X,Y)\sim BVN(\mu_1,\mu_2,(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho))$ فإن :

$$Y|\ x \sim N\left[\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right],$$

$$X|\ y \sim N\left[\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right].$$

البرهان :

عندما $(X, Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho))$ فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير Y إذا علم أن $X = x$ ، وذلك بعد عمل بعض الاختصارات ، هي :

$$f(y\,|\,x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}[(y-\mu_2-(\rho\sigma_2/\sigma_1)(x-\mu_1)]^2\right]}{\sqrt{(2\pi)\ \sigma_2^2\ (1-\rho^2)}},$$

(٧-١٥)

أي أن : $Y\,|\,x \sim N(\mu_2 + (\rho\sigma_2/\sigma_1)(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2))$ وذلـــــــــــــــك عندما $(X, Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, (\sigma_1^2, \sigma_2^2\rho))$. وعلى ذلك دالة انحدار Y على X هي

$$\mu_{Y|x} = \mu_2 + \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

$$= \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}x + (\mu_2 - \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1)$$

والتي تعتبر دالة خطية $a\,x + b$ في x وذلك بميل وتقاطع على التوالي يساوى :

$$a = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\ ,\ b = \mu_2 - \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1.$$

أيضا من (٧-١٥) فإن :

$$\sigma_{Y|x}^2 = \sigma_2^2(1-\rho^2).$$

والتي لا تعتمد على قيمة x كما أثبتناها من قبل.

وبنفس الشكل يمكن إثبات أن التوزيع الشرطي للمتغير X إذا علم أن $Y = y$ هو:

$$X\,|\,y \sim N(\mu_1 + (\rho\sigma_1/\sigma_2)(y-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2))$$

مثال (٧-٥٩) إذا كان X_1 , X_2 يمثل الطول لزوج وزوجة على التوالى وإذا كان

$$(X_1, X_2) \sim BVN(5.8, 5.3, ((.2)^2, (.2)^2, .6))$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال الشرطى للمتغير X_2 إذا علم أن $X_1 = 6.3$ وأوجد :

$$P(5.28 < X_2 < 5.92 \mid x = 6.3).$$

الحل :

دالة الاحتمال الشرطى للمتغير X_2 إذا علم أن $X_1 = 6.3$ تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط $5.6 = (6.3 - 5.8)(.6) + 5.3$ وانحراف معياري يساوى $.16 = (.2)\sqrt{1 - .36}$ وتبعا لذلك فإن :

$$P(5.28 < X_2 < 5.92 \mid 6.3)$$
$$\Phi(2) - \Phi(-2) = 2(0.4772) = .9544.$$

وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعى فى الملحق (٧) .

في الحقيقة إذا كان (X, Y) لهما دالة التوزيع الطبيعى الثنائى بمعالم $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ حيث $\rho_{XY} = \rho = 0$ فإن التوزيع الشرطى للمتغير Y إذا علم أن $X = x$ هو $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ لجميع قيم x وبما أن دالة الاحتمال الهامشى للمتغير Y أيضاً $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ فإن $f(y|x) = f_Y(y)$ لجميع قيم x , y وعلى ذلك X , Y مستقلين . ومن ناحية أخرى فإننا نعلم أنه إذا كان X, Y مستقلين فإن $\rho = 0$. وعلى ذلك عندما : $(X, Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho))$ فإن X, Y سوف يكونان مستقلان إذا وفقط إذا كان $\rho = 0$.

وعلى ذلك عندما $(X, Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho))$ و $0 < |\rho| < 1$ فإن التنبؤ بـ Y دائما يكون أكثر دقة عندما نعلم قيمة x للمتغير X عما إذا لم نعلمها حيث $\sigma_{Y|x}^2 = \sigma_2^2(1 - \rho) < \sigma_2^2$. وهذا لا يتحقق في التوزيعات الغير طبيعية . فعلى سبيل المثال عند مقارنة $\sigma_{Y|x}^2 = (1 - x)^2 / 12$ بالتباين $\sigma_Y^2 = 1/18$ لتوزيع Dirichlet الثنائي عندما :

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$.عندما $0 \le x < 1 - \sqrt{2/3}$ فإن $\sigma_{Y|x}^2 > \sigma_Y^2$.

مثال (٧-٦٠) إذا كان $(X, Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho))$ أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغيرين X, Y .

الحل :

إذا كان $(X, Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho))$ فإن الدالة المولدة للعزوم لمتغيرين X, Y حيث هي :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x+t_2y}f(x,y)\,dx\ dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x}f_1(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2y}f(y\,|\,x)\,dy\right]dx$$

لجميع القيم الحقيقية t_1, t_2.

التكامل بين القوسين هو الدالة المولدة للعزوم للدالة $f(y|x)$ وحيث أن $f(y|x)$ لـــها توزيـــع طبيعي بمتوسط $\mu_2+(\sigma_2/\sigma_1)(x-\mu_1)$ وتباين $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ وبالتالي فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2y}f(y\,|\,x)\,dy$$

$$=\exp\left\{t_2\left[\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]+\frac{t_2^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.$$

وتبعاً لذلك فإن $M(t_1, t_2)$ يمكن كتابتها على الشكل :

$$=\exp\left\{t_2\mu_2-t_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1+\frac{t_2^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{2}\right\}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[(t_1+t_2\,\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1})x\right]f_1(x)\,dx.$$

ولكن $E(e^{tx})=\exp[\mu_1t+(\sigma_1^2t^2/2]$ لكل القيم الحقيقية من t . وتبعا لذلك وبوضـــع $t=t_1+t_2\rho(\sigma_2/\sigma_1)$ فإن $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ هي :

$$=\exp\{\quad t_2\mu_2-t_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1+\frac{t_2^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{2}$$

$$+\mu_1\left(t_1+t_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

$$+\sigma_1^2\frac{(t_1+t_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1})^2}{2}\ \}$$

أو تكافئ

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)=\exp\left(\mu_1 t_1+\mu_2 t_2+\frac{\sigma_1^2 t_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2+\sigma_2^2 t_2^2}{2}\right).$$

وبوضع $\rho = 0$ في $M(t_1, t_2)$ فإن :

$$M_{X,Y}(t_1, t_2)=M_{X,Y}(t_1, 0)M_{X,Y}(0, t_2)$$

أي أن X , Y مستقلين عندما $\rho = 0$. وإذا كانت $M_{X,Y}(t_1, t_2)=M_{X,Y}(t_1, 0)$. $M_{X,Y}(0, t_2)$ فإن $e^{\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2}=1$ وحيث أن σ_1,σ_2 موجبين فإن $\rho = 0$.

وعلى ذلك نصل إلى النظرية التالية :

نظريــة (٧-٢٥) إذا كــانت $(X, Y) \sim BVN(\mu_1,\mu_2,(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho))$ فــإن X, Y مستقلين إذا فقط وإذا كان $\rho = 0$.

<u>التوزيع الطبيعي الثنائي القياسي :</u>

للتوزيع الطبيعي وإذا كان $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ فإن :

$$F_X(x)=\Phi[(x-\mu)/\sigma)]$$

حيث $\Phi(.)$ دالة توزيع لمتغير عشوائي $Z \sim N(0, 1)$ له التوزيع الطبيعي القياسي وعلـــى ذلك يمكننا حساب الاحتمالات لأى توزيع طبيعي من جدول واحد ، كما ذكرنـــا فـــي الفصـــل السادس ، أي من دالة التوزيع لمتغير عشوائي Z حيث $Z \sim N(0, 1)$.

إذا كان $(X, Y) \sim BVN(\mu_1,\mu_2,(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho))$ فإن :

$$F_{X,Y}(x,y)=F_{Z_1,Z_2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

حيث $(Z_1, Z_2) \sim BVN(0, 0, 1, 1, \rho)$ أيضا فإن أى زوج مـــن المتغـــيرات X, Y يمكن تحويلها إلى متغيرات تتبع التوزيع الطبيعي الثنائى القياسى من الصيغتين التاليين :

$$Z_1=\frac{X-\mu_1}{\sigma_1} \quad , \quad Z_2=\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$$

وعلى ذلك :

$$\mu_{Z_1}=0 \;,\; \mu_{Z_2}=0 \;,\; \sigma_{Z_1}=1 \;,\; \sigma_{Z_2}=1 \;,\; \rho_{Z_1Z_2}=\rho_{XY}=\rho$$

على الرغم من وجود توزيع طبيعى قياسي واحد في حالة متغير عشوائى X فى البعـد الأول فإنه يوجد توزيعات طبيعية قياسية كثيرة وكل توزيع له القيمة ρ. يوجـــد جـــداول خاصـــة لحساب $F_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)$.

(٧-١١) توزيع Dirichlet المتعدد

The Multivariate Dirichlet Distribution

يعتبر توزيع Dirichlet المتعدد تعميم من توزيع Dirichlet والذى تم مناقشته في مثال (٧-٢٦) وله تطبيقات واسعة فى الإحصاء الاستدلالى . يقال للمتجه من المتغيرات العشوائية $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ أنه يتبع توزيع Dirichlet إذا كان دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتجه X على الشكل :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_k)\Gamma a_{k+1}} \prod_{i=1}^{k} x_i^{a_i - 1}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^{a_{k+1}-1},$$

$$0 \le x_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, k, \ \sum_{i=1}^{k} x_i \le 1$$

حيث $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ تمثل معالم توزيع Dirichlet . للتسهيل بفرض أن $A = \sum_{i=1}^{k+1} a_i$

. إذا كان $X = (X_1, X_2, X_3)$ له دالة توزيع Dirichlet فإن :

$$f_X(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)\Gamma(a_4)} x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} x_3^{a_3-1} \times (1 - x_1 - x_2 - x_3)^{a_4-1}.$$

حيث :

$$0 \le x_1, x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \qquad (٧-١٦)$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1, X_2 الحصول عليها كما يلى :

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)\Gamma(a_4)} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} \times x^{a_3-1}(1 - x_1 - x_2 - x_3)^{a_4-1} dx_3$$

$$= \frac{\Gamma(A) x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} (1 - x_1 - x_2 - x_3)^{a_3+a_4-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)\Gamma(a_4)}$$

$$\times\int_{0}^{1} u^{a_3-1}(1-u)^{a_4-1}du$$

$$=\frac{\Gamma(a_1+a_2+a_3+a_4)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3+a_4)}x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1}(1-x_1-x_2)^{a_3+a_4-1}$$

(١٧-٧)

وذلك بوضع $u=x_3/(1-x_1-x_2)$ واستخدام الحقيقة أن :

$$\int_{0}^{1} u^{a_3-1}(1-u)^{a_4-1}du = B(a_3,a_4)$$

$$=\frac{\Gamma(a_3)\Gamma(a_4)}{\Gamma(a_3+a_4)}.$$

وعلى ذلك يمكن اعتبار (٧-١٧) دالة كثافة الاحتمال الثنائى لتوزيع Dirichlet بمعالم $a=a_1 , b=a_2 , c=a_3+a_4$ وعلى ذلك فإن كل من X_1 , X_2 له دالة بيتا- على سبيل المثال X_1 له دالة بيتا بمعالم $a=a_1$, $b=a_2+a_3+a_4$.

أيضا :

$$\mu_{X_1}=\frac{a_1}{A},\ \sigma^2_{X_1}=\frac{a_1(A-a_1)}{A^2(A+1)}\ ,$$

$$\sigma_{XY}=\frac{-a_1a_2}{A^2(A+1)}\ ,\ A=\sum_{i=1}^{4}a_i$$

هذه النتائج يمكن تعميمها لتوزيع Dirichlet المتعدد كما يأتي :

(أ) كل X_i لها دالة بيتا بمعلمة $a=a_i$, $b=A-a_i$, $\mu_{X_i}=a_i/A_i$ وتباين

$$\sigma^2_{X_i}=a_i(A_i-a_i)/A^2(A+1).$$

(ب) X_i , X_j , $i\neq j$ لــهما توزيــع Dirichlet الثــائى بمعــالم $a=a_i,b=a_j,c=A-a_i-a_j$. أيضا :

$$\sigma_{ij}=\frac{-a_ia_j}{A^2(A+1)}\ ,\ \rho_{ij}=\frac{-a_ia_j}{\sqrt{a_i(A-a_i)a_j(A-a_j)}}.$$

وبمــا أن $\sigma_{ij}<0$ فــإن X_i,X_j لا يمكــن أن يكونــان مســتقلان وبالتــالي فــإن $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ غير مستقلين . عندما (X_1, X_2, X_3) لهم دالة Dirichlet فإن دالــة الاحتمال الشرطى للمتغير X_3 إذا علم أن $X_1=x$ و $X_2=x_2$ يمكن الحصول عليها بقسمة (٧-١٦) بـــ (٧-١٧) وعلى ذلك :

$$f\ (x_3 \mid x_1,x_2)=\frac{\Gamma(a_3+a_4)\,x_3^{a_3-1}(1-x_1-x_2-x_3)^{a_4-1}}{\Gamma(a_3)\Gamma(a_4)\ \ (1-x_1-x_2)^{a_3+a_4-1}}.$$

حيث :

$$0 \le x_3 \le 1-x_1-x_2$$
$$=0 \text{ elsewhere}.$$

دالة الانحدار للمتغير X_3 إذا علم أن $X_1 = x$ و $X_2 = x_2$ هى :

$$\mu_{X_3|x_1,x_2} = \int_0^{1-x_1-x_2} x_3 f\ (x_3 \mid x_1,x_2)\ dx_3=(1-x_1-x_2)\frac{a_3}{a_3+a_4}.$$

والتي تكون خطية فى x_1 , x_2 .

أيضا يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال الشرطى للمتغيرين X_1 , X_2 إذا علـم أن $X_3 = x_3$.

وحيث أن X_3 لها دالة بيتا بمعلمتين $a=a_3$, $b= A- a_3$ كالتالي :

$$f_{X_3}(x_3)=\frac{\Gamma(A)}{\Gamma(a_3)\Gamma(A-a_3)}x_3^{a_3-1}(1-x_3)^{A-a_3-1}\ 0 \le x_3 \le 1$$
$$=0 \text{ elsewhere}.$$

(١٨-٧)

وعلى ذلك وبقسمة (٧-١٦) بـ (٧-١٨) نحصل على :

$$f\ (x_1,x_2 \mid x_3)=\frac{\Gamma(A-a_3)x_1^{a_1-1}\ x_2^{a_2-1}(1-x_3-x_1-x_2)^{a_4-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_4)\ \ (1-x_3)^{\ A-a_3-1}}$$

حيث :

$$0 \le x_1,x_2,x_1+x_2 \le 1$$
$$=0 \text{ elsewhere}.$$

ولقيم $r_1, r_2 \ge 0$ فإن :

$$E[X_1^{r_1}X_2^{r_2} \mid X_3 = x_3]$$
$$=\frac{\Gamma(A-a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_4)}$$
$$\times \int_0^{1-x_3}\int_0^{1-x_3-x_2} \frac{x_1^{r_1}x_2^{r_2}x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1}(1-x_3-x_1-x_2)^{a_4-1}dx_1\,dx_2}{(1-x_3)^{A-a_3-1}},$$

$$=(1-x_3)^{r_1+r_2}\frac{\Gamma(A-a_3)\ \Gamma(a_1+r_1)\ \Gamma(a_2+r_2)}{\Gamma(A-a_3+r_1+r_2)\Gamma(a_1)\ \Gamma(a_2)}$$

$$\times \int_0^1 \int_0^v \frac{\Gamma(A-a_3+r_1+r_2)\, u^{a_1+r_1-1} v^{a_2+r_2-1} (1-u-v)^{a_4-1}}{\Gamma(a_1+r_1)\Gamma(a_2+r_2)\Gamma(a_4)} du\ dv$$

$$=(1-x_3)^{r_1+r_2} \frac{\Gamma(A-a_3)\ \Gamma(a_1+r_1)\ \Gamma(a_2+r_2)}{\Gamma(A-a_3+r_1+r_2)\Gamma(a_1)\ \Gamma(a_2)}.$$

وذلك بوضع $u = x_1 / (1-x_3)$, $v = x_2/(1-x_3)$ وباستخدام الحقيقة أن التكامل على u , v هو الاحتمال على توزيع Dirichlet الثنائى بمعالم :
$a= a_1 + r_1$, $b = a_2 + r_2$, $c = A - a_3 - a_1 - a_2 = a_4$ والذى لا بد أن يساوى واحد على ذلك :

$$\mu_{X_1|x_3} = E[X_1\ X_2^0 \mid x_3]$$
$$=(1-x_3)\frac{a_1}{A-a_3}\ .$$

وبنفس الشكل :

$$\mu_{X_2|x_3} = (1-x_3)a_2/(A-a_3)$$

أيضاً :

$$\sigma^2 X_{1|x_3} = E[X_1^2\ X_2^0 \mid x_3] - (\mu_{X_1|x_3})^2$$
$$=(1-x_3)^2 \frac{a_1(A-a_3-a_1)}{(A-a_3)^2(A-a_3+1)}\ ,$$

$$\sigma^2 X_{2|x_3} = (1-x_3)^2 \frac{a_2(A-a_3-a_2)}{(A-a_3)^2(A-a_3+1)}.$$

وأخيراً :

$$\sigma^2_{x_1x_2|x_3} = E[X_1\ X_2 \mid x_3] - [(\mu_{X_1|x_3})(\mu_{X_2|x_3})]$$
$$=(1-x_3)^2 \frac{-a_1\ a_2}{(A-a_3)^2(A-a_3+1)}\ .$$

وعلى ذلك معامل الارتباط الجزئى بين X_1 , X_2 إذا علم أن $X_3 = x_3$ هو :

$$\rho_{X_1X_2|x_3} = \frac{\sigma_{X_1X_2|x_3}}{(\sigma_{X_1|x_3})(\sigma_{X_2|x_3})}$$

$$= \frac{-a_1\ a_2}{\sqrt{a_1(A-a_3-a_1)a_2(A-a_3-a_2)}}.$$

تمـــاريـــــن :

١- يوجد فى وعاء 12 كرة متشابهة منها 3 حمراء و 4 بيضاء و 5 زرقاء . سحبت ثلاث كرات من الوعاء بدون إرجاع . بفرض أن Y , X تمثل عدد الكرات الحمراء والبيضاء المختارة على التوالى أوجد :

(أ) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y .

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من X , Y .

٢- إذا كان X عدد حالات النجاح فى 4 محاولات مستقلة تتبع بر نولـــى باحتمـــال نجـــاح p = .6 وإذا كان Y يمثل الطول لأكبر دورة (run) فى 4 محاولات . الـــدورة هـــى متتابعة من 1 أو اكثر من النتائج المتماثلة على سبيل المثـــال الـــدورة FSSF لـــها 3 دورات وأطول دورة هى 2 .

(أ) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x, y)$ للمتغيرين X, Y .

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من X, Y أى $f_1(x)$, $f_2(y)$.

٣- إذا كان X , Y لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

$$f(x, y) = p^2\,(1-p)^y \qquad x, y = 0, 1, 2, \ldots, x \le y$$

(أ) أثبت أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X تتبع توزيع ذى الحدين السالب . بمعلمتين p , r = 1 بينما دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y تتبـــع توزيـــع ذى الحدين السالب بمعلمتين r = 2 .

(ت) أوجد σ , $\rho_{X,Y}$ هل X , Y مستقلين أم لا ؟

(ج) أوجد $f(x\,|\,y)$, $\mu_{X|y}$, $\sigma_{X|y}$

٤- إذا كان X , Y , Z ثلاثة متغيرات عشوائية بدالة كثافة احتمال :

(x, y, z)	(1, 1, 1)	(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(0, 1, 1)
f(x,y,z)	.25	.25	.25	.25

أوجد :

(أ) $P(X \geq Y)$ (ب) $P(X \geq Z)$, $P(Y \geq Z)$.

٥- إذا كان X, Y , Z ثلاثة متغيرات عشوائية لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

x, y, z	(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)	(1, 1, 1)
f(x,y,z)	.25	.25	.25	.25

(أ) أوجـــد $f(x,y)$, $f(x,z)$, $f(y,z)$ وأثبـــت أن الأزواج (X, Y) , (X, Z) , (Y, Z) غير مستقلة .

(ب) أوجد $f_Y(y|1)$, $P(x,y|1)$.

(ج) أوجـد $f_Z(z)$.

(ح) أوجد $f(x, y|z)$ وأثبت أن :

$$f(x,y|z) = f(x|z)\, f(y|z)$$

٦- إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين من النوع المتقطع بدالة كثافة الاحتمال المشـــتركة التالية :

$$f(x, y) = 4/5\,(xy) \quad x = 1, 2 \quad , y = 2, 3$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

(أ) أوجد $E(Y)$ (ب) $E(X)$

(ج) $E(XY)$ (هـ) $Cov(X, Y)$.

٧- إذا كان X, Y , Z ثلاثة متغيرات عشوائية أثبت أن :

(أ) $Cov(X \pm Y, Z) = Cov(X, Z) \pm Cov(Y, Z)$.

(ب) $Cov(X+Y, Z+W) = Cov(X, Z) + Cov(X, W) + Cov(Y, Z) + Cov(Y, W)$

(ج) $Cov(X, Y, X - Y) = Var(X) - Var(Y)$

٨- إذا كان X , Y متغيرين مستقلين حيث :

$$E(X) = 2 \;,\; E(Y) = 3 \;,\; Var(X) = 4 \;,\; Var(Y) = 16$$

أوجد : (أ) $E(5X-Y)$ (ب) $Var(5X-Y)$

(ج) $Cov(3Y+Y, Y)$ (د) $Cov(X, 5X-Y)$

٩- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين وكل منهما يتبع جاما بمعلمتيـــن θ, r . إذا كان $V=\min(X,Y)$, $W=\max(X,Y)$.

(أ) أوجد $f(v,w)$, $f_V(v)$, $f(v|w)$.

(ت) أوجد ρ وهل X, Y مستقلان ؟

١٠- إذا كان X, Y لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة على الشكل :

$$f(x,y)=\left[\pi\sqrt{1-\rho^2}\right]^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{1-\rho^2}\right)\right] \quad , xy \ge 0$$

$$=0 \text{ elsewhere.}$$

(أ) أثبت أن كل من X, Y يتبع $N(0,1)$ ولكن $f(x, y)$ ليســت دالــة كثافــة الاحتمال الطبيعى الثنائى .

(ب) أوجد ρ .

(ت) أوجد $f_X(x|y)$, $\mu_{Y|x}$

(ث) أوجد $f_X(x|y)$, $\mu_{X|y}$

١١- إذا كانت X, Y, Z ثلاثة متغيرات عشوائية لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة :

$$f(x,y,z)=Z^2\,\bar{e}^{z(1+x+y)} \quad x,y,z>0$$

$$=0 \text{ elsewhere.}$$

(أ) أثبت أن $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=1$

(ب) أوجد ρ .

(ج) أوجد $f_{X,Z}(x,z)$, $f(x|z)$, $f_{Y,Z}(y,z)$, $f(y|z)$.

١٢- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

$$f(x,y)=y\,\bar{e}^{x-y} \qquad x>0 \;,\; y>0$$

$$=0 \text{ elsewhere.}$$

(أ) أوجد $\sigma_Y^2, \sigma_X^2, \mu_Y, \mu_X, f_Y(y), f_X(x)$

(ب) أوجد $f(x|y), f(y|x)$.

(ج) أوجد $\sigma_{X,Y}$, $\rho_{X,Y}$ وهل X, Y مستقلين أم لا ؟

(د) إذا كان معلوماً أن $X = 3$ ما هى القيم المتنبأ بها لـ Y .

-١٣- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير X , Y على الشكل :

$$f(x,y) = 2\,\bar{e}^{x-y} \qquad 0 \le x \le y < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد $P(X = Y)$, $P(XY = 1)$, $P(X > 2y)$ هل X , Y مستقلين ؟

-١٤- إذا كان Y لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة :

$$f(x,y) = c \qquad x^2 + y^2 \le 1$$
$$= 0 \qquad \text{elsewhere.}$$

(أ) أوجد قيمة c .

(ب) أثبت أن $\mu_X = \mu_Y = \rho_{XY} = 0$

(ج) أثبت أن X , Y غير مستقلين .

-١٥- إذا كان X, Y يتبعان توزيع Dirichlet أثبت أن $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

-١٦- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

$$f(x,y) = xy \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] \qquad x > 0,\ y > 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد : $f_1(x)$, $f_2(y)$

-١٧- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة بين المتغيرين X, Y على الشكل :

$$f(x,y) = 2\,\bar{e}^{x}\,\bar{e}^{2y} \qquad x > \infty,\ y > 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد : $P(X > 1,\ Y > 1)$, $P(X < a)$, $P(X < Y)$

-١٨- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين عشوائيين على الشكل :

$$f(x,y)=6x\ y^2 \qquad 0<x<y<1$$
$$=0 \text{ elsewhere}.$$

(أ) أوجد $f_1(x)$, $f_2(y)$ وهل X, Y مستقلين أم لا ولماذا ؟

(ب) أوجد $p(\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2})$, $p(\frac{1}{2}<Y<1)$.

-١٩- إذا كان $Y = X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4$ حيث X_1 X_2 , X_3 ثلاثة متغيرات عشـــوائية وكل متغير يتبع نفس التوزيع بمتوسط 5 و انحراف معيارى 3 .

(أ) أوجد $E(Y)$ (ب) $Var(Y)$

-٢٠- إذا كان دالة كثافة الاحتمال المشترك لمتغيرين عشوائيين X, Y على الشكل :

$$f(x,y)=6x \qquad 0<x<y<1$$
$$=0 \text{ elsewhere}.$$

(أ) أوجد $f_1(x)$, $f_2(y)$

(ب) أوجد $Cov(X, Y)$.

(ج) أوجد ρ (د) $f(y|x)$, $E(Y|X)$.

-٢١- إذا كان X, Y لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

$$f(x,y) = 4(x-xy) \qquad 0<x<1\ ,\ 0<y<1\ ,$$

أوجد (أ) $E(X^2Y)$ (ب) $E(X\text{-}Y)$

(ج) $Var(X\text{-}Y)$ (د) ρ

-٢٢- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة :

$$f(x,y) = 1 \qquad 0<y<2x\ ,\ 0<x<1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد (أ) $f(x,y)$ (ب) $E(Y+X)$

(ج) ρ

-٢٣- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة :

$$f(x,y)=\bar{e}^{y} \qquad 0<x<y<\infty$$
$$=0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد $E(X|y)$.

-٢٤- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال الشرطى لمتغير y إذا علـم أن $X = x$ يتبـع توزيـع بواسون بمتوسط $E(Y|x)$ و $Y|x \sim POI(x)$, $X \sim EXP(1)$.

(أ) أوجد $E(Y)$ (ب) $Var(Y)$

-٢٥- إذا كان X, Y متغيرين لهما الدوال التالية :

$$f_{X/Y}(x,y) = c_1 \; x/y \qquad 0<x<y \;, 0<y1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$
$$f_y(y) = c_2 \; y^4 \qquad 0<y<1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

(أ) أوجد الثابتين c_1 , c_2 .

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y .

-٢٦- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغيرين X, Y على الشكل :

$$f(x,y) = 21 \; x_1^2 \; y^3 \qquad 0<x<y<1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد المتوسط الشرطى والتباين الشرطى إذا علم أن $Y = y$, $0<y<1$.

-٢٧- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين من النوع المتقطع بدالة كثافة احتمال مشتركة

$$f(x,y) = (x+2y)/18 \;, (x,y) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد المتوسط والتباين الشرطى للمتغير Y إذا علم أن $X = x$ و $x = 1, 2$.

-٢٨- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين X, Y معطاة فى الجدول التالي :

x, y	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2,1)
f(x,y)	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

$f(x,y) = 0$ elsewhere أوجد المتوسط الشرطى لكل من X , Y .

-٢٩- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة :

(أ)

$$f(x,y)=\frac{1}{3},(x,y)=(0,0),(1,1),(1,2)$$
$$=0 \text{ elsewhere} .$$

(ب)

$$f(x,y)=\frac{1}{3},(x,y)=(0,2),(1,1),(2,0)$$
$$=0 \text{ elsewhere} .$$

(ج)

$$f(x,y)=\frac{1}{3},(x,y)=(0,0),(1,1),(2,0)$$
$$=0 \text{ elsewhere} .$$

أوجد معامل الارتباط بين X , Y فى كل حالة .

-٣٠- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة بين المتغيرين X , Y على الشكل :

$$f(x,y)=2 , \quad 0<x<y , 0<y<1$$
$$=0 \text{ elsewhere} .$$

أثبت أن المتوسط على التوالى

$$(1+x)/2 \quad 0<x<1 ,$$
$$y/2 \quad , \quad 0<y<1$$

وأثبت أن معامل الارتباط Y, X هو $\rho=\frac{1}{2}$.

-٣١- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة :

$$f(x,y)=1 , \quad x<y<x , 0<x<1$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

أثبت أنه فى فئة الاحتمال الموجبة فإن بيان E (Y|x) خط مستقيم بينما E (X|y) ليست خطية .

-٣٢- إذا كان المتغيرين X, Y مستقلين وإذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير x , y على الشكل :

$$f(x,y)=12xy(1-y) \quad 0<x<1 , 0<y<1$$
$$=0 \text{ elsewhere} .$$

هل X, Y مستقلين أم لا ؟

-٣٣- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة على الشكل :

$$f(x,y)=2\bar{e}^{x-y} \quad 0<x<y , 0<y<\infty$$
$$=0 \text{ elsewhere} .$$

أثبت أن X, Y مستقلين .

-٣٤- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين X , Y على الشكل :

$$f(x,y)=\frac{1}{10}, \quad x=1,2,3,4, \quad y=1,2,3,4$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أثبت أن X, Y مستقلين .

-٣٥- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين X , Y على الشكل :

$$f(x,y) = 4x(1-x) \quad 0<x<1 \quad , 0<y<1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد $P(0<X<\frac{1}{3}, 0<y<\frac{1}{3})$.

-٣٦- إذا كان $(X,Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, (\sigma_1^2, \sigma_2^3, p))$ حيث

$p=\frac{3}{5}, \mu_1=3, \mu_2=1, \sigma_1^2=16, \sigma_2^2=25$ أحسب الاحتمالات التالية :

(أ) $P(3<Y<8)$

(ب) $P(3<Y<8|7)$

(ج) $P(-3<X<3)$

(د) $P(-3<X<3|-4)$

الفصل الثامن

توزيعات دوال في متغيرات عشوائية

Distributions Functions of Random Variables

(٨-١) مقدمـــة Introduction

في كثير من الأبحاث نجد أن المتغيرات العشوائية التي نستخدمها في خلاصة نتائج التجربـــة ليس دائما هي القياسات التي نحصل عليها بحد ذاتها ولكن تكون دوال من هذه القياسات . فمثلا قد يكون المطلوب تحويل قراءات درجات الحرارة X المقاسه بالفهر نهيت إلى قراءات بالدرجات المئوية $Y = \frac{5}{9}X - \frac{160}{9}$. أيضا ، في أبحاث أخرى قد يمثل X العمر بالأسابيع لمكون مــا بينما في تجربة أخري قد يمثل العمر W بالأيام وعلي ذلك $W = 7X$. بنفس الشكل : $Z = \ln X$ أو دوال أخرى في X قد تكون موضع الاهتمام . أي داله في متغير عشـــوائي X نفسها متغير عشوائي ويمكن تقدير دالة كثافتها الاحتمالية بدلالة دالة كثافة الاحتمال للمتغير X. علي سبيل المثال للمتغير W المذكور أعلاه فــإن $P[14 \le W \le 21] = P[2 \le X \le 3]$.مــن الواضح أن الاحتمالات التى تخص دوال فى متغيرات عشوائية تكون موضع الاهتمام ويكون مــن المفيد التعبير عنها بدلالة دالة كثافة الاحتمال ، أو دالة التوزيع التجميعي ، للمتغير الأصلي .

أيضا في التجارب المركبة قد يكون الاهتمام في تحويل المتغيرات العشوائية الأصلية المقاسة $X_1, X_2, ..., X_k$ إلي متغيرات جديدة ($Y_i = u_i(X_1, X_2, ..., X_k)$ حيــــث $i = 1,2,...,k$ فعلي علي سبيل المثال ، قد نلاحظ الأوزان $X_1, X_2, ..., X_k$ لكائن ما عند الأزمة : $t_1, t_2, ..., t_K$ ولكن قد يكون الاهتمام في تعريف $Y_1 = X_1$ (الوزن المبدئي) وأيضا الزيــادة في الوزن $X_i - X_{i-1}$ حيث $i = 2,...,k$ وذلك في فترات زمنية مختلفة . في هذا الفصــــل سوف نناقش طرق مختلفة لاشتقاق دالة كثافة الاحتمال لدالة في متغير عشوائى أو أكثر

(٨-٢) طرق إيجاد توزيع دوال فى متغير عشوائي واحد :

ليكن X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمال $f_X(x)$ وإذا كان $Y = u(X)$ دالة في المتغــــير العشوائي X حيث X , Y متغيرين عشوائيين من النوع المتقطع أو المتصل والمطلوب إيجاد دالـــة كثافة الاحتمال للمتغير Y . كلا الرمزين $y = u(x)$, $Y = u(X)$ سوف يستخدمان في هذا البند حيــث تمثــل $y = u(x)$ الصيغــة العاديــة للدالــه أو التحويلــة والمعرفــة بـــالرمز $u(.)$ و $Y = u(X)$ تعرف المتغير العشوائي Y كدالة $u(.)$في المتغير العشوائي X .

(٨-٢-١) الحالة المتقطعة Discrete Case

لتكن $u(x)$ دالة ذات قيمة حقيقية في متغير حقيقي x . إذا أمكن حل المعادلـة $y = u(x)$ بطريقة وحيدة لتكن $x = w(y)$ ، فإننا نقول أن التحويلة تبادلية وحيدة أو تناظرية one – to – one transformation وغير ذلك نقول أن التحويلة غير تناظرية .

نظرية (٨-١) : إذا كان X متغيراً عشوائياً من النوع المتقطع بدالة كثافة احتمال $f_X(x)$ وإذا كان $Y = u(X)$ تعرف تحويلة تناظرية ، بمعني آخر المعادلة $y = u(x)$ يمكن حلـــها بطريقـــة وحيدة ، لتكن $x = w(y)$. وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \qquad y \in \varphi \qquad (٨-١)$$

$$\varphi = \{y \mid f_Y(y) > 0\}.$$

البرهان :

$$f_Y(y) = P[\,Y = y\,] = P[\,u(X) = y\,] = P[X = w(y)\,] = f_X(w(y)).$$

مثال (٨-١) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim GEO(p)$ فـــإن دالـــة كثافـــة الاحتمال للمتغير X تكون علي الشكل :

$$f_X(x;p) = p\,q^{x-1} \qquad x = 1,2,\ldots.$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

وإذا كان $Y = X - 1$ حيث Y يتبع شكل آخر للتوزيع الهندســـي ، أوجـــد دالـــة كثافـــة الاحتمال للمتغير Y.

الحل :

إذا كان $y = u(x) = x-1$ فإن $x = w(y) = y + 1$ وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمـــــال للمتغير Y يمكن إيجادها على النحو التالى :

$$f_Y(y) = f_X(y+1) = pq^y\,,\ y = 0,1,2,\ldots$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

والتي تمثل دالة كثافة الاحتمال لعدد حالات الفشل قبل الحصول علي أول نجاح .

مثال (٨-٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim POI(\mu)$ فإن دالة كثافـــة الاحتمـــال للمتغير X تكون على الشكل :

$$f_X(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,...$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

وإذا كان $Y = 4X$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

إذا كان $y = u(x) = 4x$ فإن $x = w(y) = \frac{1}{4}y$ وعليه فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = f_X(\tfrac{1}{4}y) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^{y/4}}{(y/4)!} \qquad y = 0,4,8,....$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

مثال (٨-٣) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f_X(x) = \frac{64}{85}\left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad x = 0,1,2,3$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

وإذا كان $Y = 2X + 3$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

عندما $y = u(x) = 2x + 3$ فإن $x = w(y) = \frac{y-3}{2}$ وعلي ذلك :

$$f_X(x) = f_X\left(\frac{y-3}{2}\right) = \frac{64}{85}\left(\frac{1}{4}\right)^{(y-3)/2} \qquad \frac{y-3}{2} = 0,1,2,3$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أي أن :

$$f_Y(y) = \frac{512}{85}\left(\frac{1}{2}\right)^y \qquad y = 3,5,7,9$$

$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

مثال (٨-٤) إذا كان متغيراً عشوائياً حيث $X \sim BIN\left(3, \frac{2}{3}\right)$ فإن :

$$f_X(x;3,\frac{2}{3}) = \frac{3!}{x!(3-x)!}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} \qquad x = 0,1,2,3$$

$$= 0 \ \text{elsewhere}$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^2$.

الحل :

إذا كان $y = u(x) = x^2$ فإن $x = w(y) = \sqrt{y}$ لأنها دالة تناظرية وعلي ذلك :

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) = \frac{3!}{(\sqrt{y})!(3-\sqrt{y})!}\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3}\right)^{3-\sqrt{y}} \qquad y = 0,1,4,9$$

$$= 0 \ \text{elsewhere}$$

مثال (٨-٥) إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمال معرفة كما يلي :

$$f_X(x) = \frac{1}{n} \qquad x = 1,2,\ldots,n$$

$$= 0 \ \text{elsewhere}$$

وإذا كان $Y = X^2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

عندما $y = u(x) = x^2$ فإن $x = w(y) = \sqrt{y}$ وعلي ذلك :

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{n} \qquad y = 1,4,\ldots,n^2$$

$$= 0 \ \text{elsewhere}$$

مثال (٨-٦) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال التالية

x	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

وإذا كان $Y = 3X$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y يمكن الحصول عليها كالتالي :

y	0	3	6
$f_Y(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

بفرض أن الدالة $u(x)$ ليست دالة تناظرية علي الفضاء $R = \{x \mid f_X(x) > 0\}$ وهذا يعني عدم وجود حل وحيد للدالة $y = u(x)$. عادة يكون من الممكن تجزئه الفضاء R إلي فئات جزئيه متنافية ...., A_1, A_2 بحيث تكون $u(x)$ تناظرية علي كل A_j . وعلي ذلك لكل y في المدى للدالة $u(x)$، فإن المعادلة $y = u(x)$ يكون لها حل وحيد $x_j = w_j(y)$ علي الفئة A_j وبالتالي يمكن تعميم نظرية (٨-١) للدوال الغير تناظرية وذلك باستبدال المعادلة (٨-١) بالمعادلة :

$$f_Y(y) = \sum_j f_X(w_j(y)) \qquad (٨-٢)$$

أي أن $f_Y(y) = \sum_j f_X(x_j)$ حيث المجموع علي كل قيم x_j بحيث أن $u(x_j) = y$.

مثال (٨-٧) إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمال معرفة كما يلي :

$$f_X(x) = \left(\frac{4}{31}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad x = -2,-1,0,1,2$$

$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

وإذا كان $Y = X^2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

من الواضح أن :

$$\varphi = \{y \mid y = 0,1,4\},$$

$$f_Y(0) = f_X(0) = \frac{4}{31},$$

$$f_Y(1) = f_X(-1) + f_X(1) = \frac{8}{31} + \frac{2}{31} = \frac{10}{31},$$

$$f_Y(4) = f_X(-2) + f_X(2)$$

$$= \frac{16}{31} + \frac{1}{31} = \frac{17}{31}.$$

مثال (٨-٨) للمثال (٨-٧) أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = |X|$.

الحل :

من الواضح أن $\varphi = \{y \mid y = 0,1,2\}$, وعلي ذلك :

$$f_Y(0) = f_X(0) = \frac{4}{31},$$

$$f_Y(1) = f_X(-1) + f_X(1) = \frac{8}{31} + \frac{2}{31} = \frac{10}{31},$$

$$f_Y(2) = f_X(-2) + f_X(2) = \frac{17}{31}.$$

ويمكن التعبير عن الدالة $f_Y(y)$ كالتالي :

$$f_Y(y) = \frac{4}{31} \qquad y = 0$$

$$= \frac{4}{31}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-y} + \left(\frac{1}{2}\right)^{y}\right] \qquad y = 1,2$$

$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

مثال (٨-٩) إذا كان X متغيراً عشوائياً يأخذ القيم 0, 1, 2, 3, 4, 5 باحتمالات $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ وإذا كان $Y = (X-2)^2$ ما هو توزيع Y ؟

$$f_Y(0) = f_X(2) = p_2,$$
$$f_Y(1) = f_X(1) + f_X(3) = p_1 + p_3,$$
$$f_Y(4) = f_X(0) + f_X(4) = p_0 + p_4,$$
$$f_Y(9) = f_X(5) = p_5 .$$

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= p_2 & y &= 0 \\ &= p_1 + p_3 & y &= 1 \\ &= p_0 + p_4 & y &= 4 \\ &= p_5 & y &= 9 \\ &= 0 \quad \text{elsewhere.} \end{aligned}$$

مثال (٨-١٠) إذا كان X متغيراً عشـوائياً يـأخذ القيـم 0, 1, 2, 3, 4 باحتمـالات $f_X(0), f_X(1), f_X(2), f_X(3), f_X(4)$، وإذا كان $Y = u(X) = (X-2)^2$ أوجـد دالـة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل:

من الواضح أن :

$$\varphi = \{y \mid y = 0,1,4\}$$

وعلي ذلك :

$$f_Y(0) = f_X(2),$$
$$f_Y(1) = f_X(1) + f_X(3),$$
$$f_Y(4) = f_X(0) + f_X(4).$$

(٨-٢-٢) الحالة المتصلة Continuous Case

في هذا الجزء سوف نناقش طريقتين لاشتقاق دالة كثافة احتمال لدالة في متغـير عشـوائي متصل وهي طريقة دالة التوزيع التجميعي وطريقة التحويل .

(أ) طريقة دالة التوزيع التجميعي

Cumulative Distribution Function Technique

بفرض أن X متغيراً عشوائياً له دالة التوزيع التجميعي $F_X(x)$ وإذا كان :

$Y = u(X)$ دالة في X . تعتمد هذه الطريقة علي التعبير عن دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y بدلالة توزيع المتغير X . أي أنه لكل قيمة حقيقية y يمكن تعريف فئة $A_y = \{x \mid u(x) \le y\}$.

تبعا لذلك فإن الحادثتين $[Y \le y], [X \in A_y]$ متكافئتين وعلي ذلك :

$$F_Y(y) = P[u(X) \le y].$$

والتي يمكن التعبير عنها كالتالي :

$$P[X \in A_y].$$

هذا الاحتمال يمكن التعبير عنه بدلالة التكامل للدالة $f_X(x)$ علي الفئة A_y . وعلى ذلك :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} .$$

مثال (٨-١١) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim EXP\left[\frac{1}{\lambda}\right]$ وكان $Y = e^X$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[e^X \le y]$$

$$= P[X \le \ln y] = \int_0^{\ln y} \lambda \, \bar{e}^{\lambda t} \, dt$$

$$= -\bar{e}^{\lambda t} \Big|_0^{\ln y} = -[\bar{e}^{\lambda \ln y} - 1].$$

أي أن :

$$F_Y(y) = 1 - \bar{y}^{\lambda} \qquad 1 < y < \infty.$$

وعليه فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y ستكون كالآتي :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \lambda y^{-\lambda-1} \qquad 1 \le y < \infty$$

$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

مثال (٨-١٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim UNIF(-\pi/2, \pi/2)$ وله دالة التوزيع التجميعي التالية :

$$F_X(x) = P[X \le x] = 0 \qquad -\infty < x < -\frac{\pi}{2}$$
$$= (x + \frac{\pi}{2})(\frac{1}{\pi}) \qquad -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}$$
$$= 1 \qquad \frac{\pi}{2} \le x < \infty$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = \tan X$.

الحل :

$$F_Y(y) = P[Y \le y]$$
$$= P[\tan X \le y]$$
$$= P[X \le \text{Arc}\tan \; y]$$
$$= (\text{Arc}\tan \; y + \frac{\pi}{2})(\frac{1}{\pi}).$$

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \qquad -\infty < y < \infty$$
$$= 0 \textit{ elsewhere}$$

حيث Y متغيراً عشوائياً يتبع توزيع كوشي .

مثال (٨-١٣) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim EXP(1)$ وله دالة التوزيع التجميعي التالية :

$$F_X(x) = 1 - \bar{e}^{x} \qquad x > 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere}$$

وإذا كان $Y = \sqrt{X}$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

$$F_Y(y) = P[Y \le y]$$
$$= P[\sqrt{X} \le y]$$
$$= P[X \le y^2]$$

أي أن :

$$F_Y(y) = 1 - \bar{e}^{y^2} \qquad 0 < y < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = 2y \ \bar{e}^{y^2} \qquad 0 < y < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

حيث Y يتبع توزيع وايبل بمعلمتين $\beta = 2, \theta = 1$.

مثال (٨-١٤) إذا كان X متغيراً عشوائيا متصلاً بدالة كثافة احتمال $f_X(x)$ وإذا كان $a \neq 0, Y = aX + b$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

عندما $a > 0$ فإن :

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[aX + b \le y]$$
$$= P[X \le \frac{y-b}{a}] \qquad (٨-٣)$$
$$= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad a > 0$$

عندما $a < 0$ فإن :

$$F_Y(y) = P[aX + b \le y] = P[X \ge \frac{y-b}{a}]$$
$$= 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad a < 0$$

(٨-٤)

بتفاضل طرفي المعادلتين (٨-٣) و (٨-٤) بالنسبة لـ y باستخدام قاعدة السلسلة نحصل علي دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y علي الشكل ، عندما $a > 0$ ، :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{d_Y} = \frac{1}{a}\ f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

بينما عندما $a < 0$ نحصل علي :

$$f_Y(y) = -\frac{1}{a}\ f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

أي أنه يمكن الحصول علي دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y و $a \neq 0$ علي الشكل التالي :

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

مثال (٨–١٥) إذا كان X متغيراً عشـــوائياً حيـــث ($X \sim UNIF\ (0, 1)$ وإذا كـــان $\lambda > 0,\ \ Y = -\lambda^{-1} \ln X$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[Y \le y] = P[-\lambda^{-1} \ln X \le y] \\ &= P[\ln X \ge -\lambda y] \\ &= P[X \ge \exp(-\lambda y)] \\ &= 1 - F_X(\exp(-\lambda y)) = 1 - \exp(-\lambda y) \qquad y > 0 \end{aligned}$$

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \lambda\ \bar{e}^{\lambda y} \qquad y > 0 \\ &= 0 \text{ elsewhere}. \end{aligned}$$

مثال (٨–١٦) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير X علي الشكل :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \qquad -1 < x < 1 \\ &= 0 \text{ elsewhere}. \end{aligned}$$

أوجد داله كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي $Y = X^2$.

الحل :

$$F_Y(y) = P[X^2 \le y]$$
$$= P[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}]$$
$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{y} \qquad 0 < y < 1$$

أي أن :

$$F_Y(y) = 1 \qquad 1 \le y$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

مثال (٨-١٧) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim N(0, 1)$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^2$.

الحل :

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}]$$

وحيث أن التوزيع متماثل فإن :

$$P[-\sqrt{y} \le X < 0] = P[0 < X \le \sqrt{y}]$$

وبالتالي فإن :

$$F_Y(y) = 2P[0 \le X \le \sqrt{y}]$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{x^2/2} \quad dx \qquad y > 0,$$

وبوضع $x = \sqrt{z}$ فإن $dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$. عندما $x = 0$ فإن $\sqrt{z} = 0$ وعندما $x = \sqrt{z}$ فإن $\sqrt{z} = \sqrt{y}$ أو $y = z$ وعلي ذلك فإن :

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \quad dz$$

$$= \int_0^y \frac{1}{(2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z/2} \, dz.$$

حيث $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ويمكننا التعرف علي هذا التكامل والذي يمثل دالة التوزيع التجميعي لجاما بمعلمتين $\theta = 2, k = .5$ (توزيع χ^2 بدرجة حرية واحدة) .

مثال (٨-١٨) بفرض أن X متغيراً عشوائياً من النوع المتصل ، وإذا كان $Y = X^2$ فإن :

$$F_Y(y) = P[X^2 \le y] = P[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}] = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

في هذه الحالة دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي Y يمكن التعبير عنها بدلالة دالـــة كثافـة الاحتمال للمتغير العشوائي X وذلك لأن :

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})]$$

$$= f_X(\sqrt{y})\frac{d\sqrt{y}}{dy} - f_X(-\sqrt{y})\frac{d(-\sqrt{y})}{dy}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] \qquad y > 0$$

$$= 0 \text{ elsewhere}. \qquad (٨-٥)$$

مثال (٨-١٩) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f_X(x) = \frac{x^2}{3} \qquad -1 < x < 2$$

$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

وإذا كان $Y = X^2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{(-\sqrt{y})^2}{3} + \frac{(\sqrt{y})^2}{3}\right] \qquad 0 < y < 1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}[0 + \frac{(\sqrt{y})^2}{2}] \qquad 1 < y < 4$$

$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

مثال (٨-٢٠) إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع كوشي بدالة كثافة احتمال :

$$f_X(x) = \left[\pi(1 + x^2)\right]^{-1} \qquad -\infty < x < \infty$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^2$.

الحل :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] \qquad y > 0$$

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\pi(1 + y)} + \frac{1}{\pi(1 + y)}\right] \qquad y > 0$$

أي أن :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1 + y)} \qquad y > 0$$

$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

مثال (٨-٢١) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث :

(X ~ UNIF (0, 1 أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^2$.

الحل :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}[1+0] = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad 0 < y < 1.$$

مثال (٨-٢٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f_X(x) = \frac{3}{8}(x-1)^2 \qquad -1 \le x \le 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

إذا كان $Y = X^2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{3}{8}(\sqrt{y}-1)^2 + \frac{3}{8}(-\sqrt{y}-1)^2\right], \qquad y \ge 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أي أن :

$$f_Y(y) = \frac{3}{8}\;\frac{(y+1)}{\sqrt{y}} \qquad y \ge 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

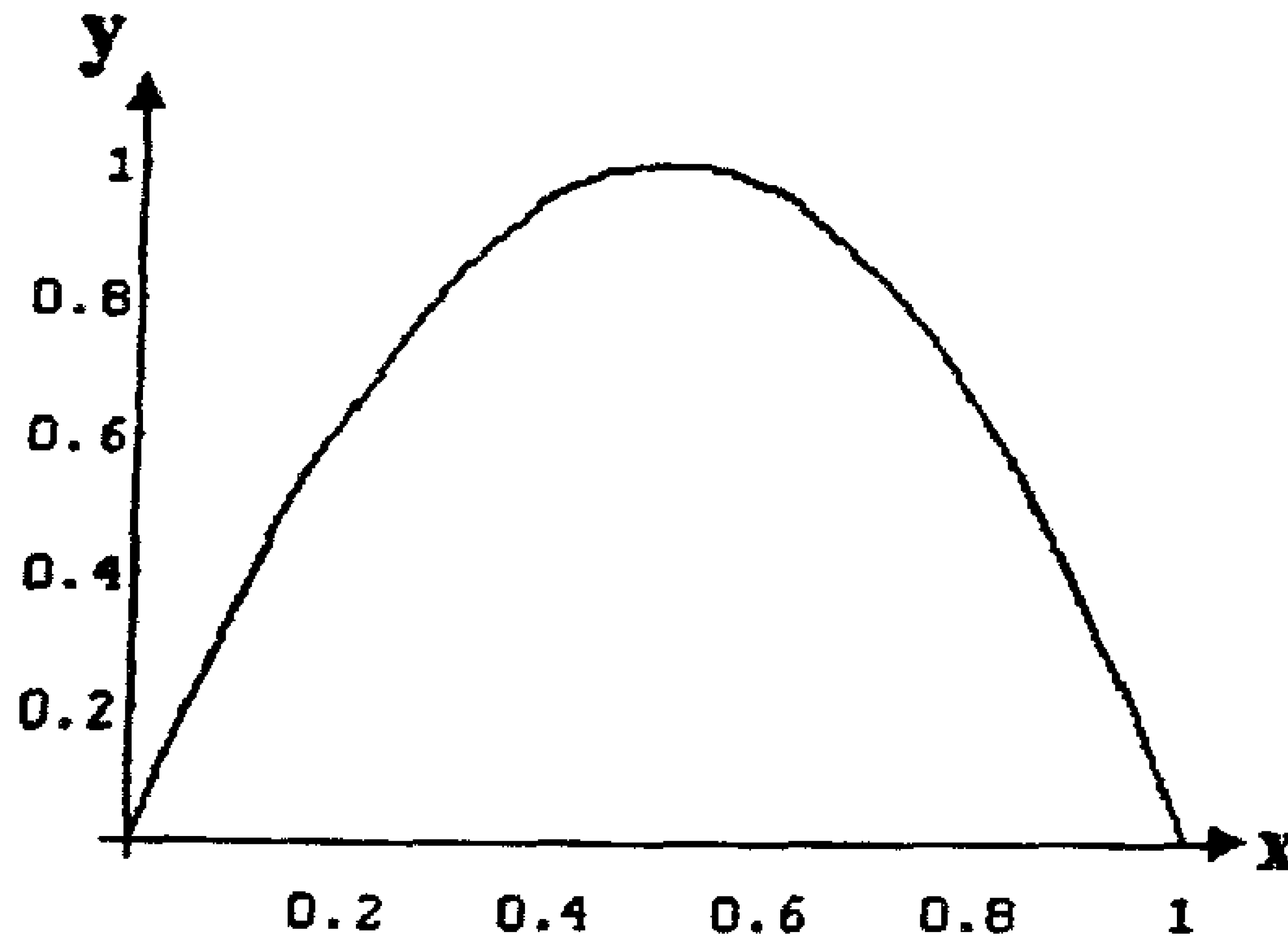
مثال (٨-٢٣) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f_X(x) = 140x^3(1-x^3) \qquad 0 \le x \le 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = 4X(1-X)$

بيان الدالة $y = 4x(1-x)$ موضح فى شكل (٨-١) .

شكل (٨-١)



الحل :

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[4X(1-X) \le y \text{ and } X < \frac{1}{2}$$

$$\text{or } 4X(1-X) \le y \text{ and } X \ge \frac{1}{2}]$$

$$= P[4X(1-X) \le y \text{ and } X < \frac{1}{2}]$$

$$+ P[4X(1-X) \le y \text{ and } X \ge \frac{1}{2}]$$

$$= P[X \le \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})] + P[X \ge \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y})]$$

$$= F_X(\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})) + [(1 - F_X(\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y}))]$$

حيث :

$$, y > 1 \;\;,\;\; F_Y(y) = 1 \;\;,\;\; y < 0 \;\;,\;\; F_Y(y) = 0$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{4\sqrt{1-y}}[f_X(\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y}))+f_X(\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y}))]$$

$$=\frac{140}{4\sqrt{1-y}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-y}}{2}\right)^3\left(1-\frac{1-\sqrt{1-y}}{2}\right)^3\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1+\sqrt{1-y}}{2}\right)^3\left(1-\frac{1+\sqrt{1-y}}{2}\right)^3\right]$$

$$=\frac{35\ y^3(1-y)^{-1/2}}{32}.$$

وعلي ذلك :

$$f_Y(y)=\frac{35}{32}\ \ y^3(1-y)^{-1/2} \qquad 0\le y\le 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

مثال (٨-٢٤) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة التوزيع التجميعي التالية :

$$F_X(x)=\frac{1}{2}(1+x) \qquad -1\le x\le 1$$
$$=1 \qquad x>1$$
$$=0 \qquad \text{elsewhere}.$$

وإذا كان $Y = X^r$ حيث r عدد صحيح موجب أوجد دالة التوزيع للمتغير Y .

الحل :

إذا كان r عدد فردي فإن :

$$F_Y(y)=P[Y\le y]=P[X^r\le y]$$
$$=P[X\le y^{1/r}]$$
$$=\frac{1}{2}(1+y^{1/r}) \qquad -1\le y\le 1.$$

إذا كان r عدد صحيح زوجي فإن :

$$F_Y(y)=P[Y\le y]=P[-y^{1/r}\le X\le y^{1/r}]$$
$$=y^{1/r} \qquad 0\le y\le 1.$$

وأخيراً إذا كان $r = 0$ فإن $F_Y(y)$ تكون غير متصلة (لها قفزة من 0 إلي 1) عند $y = 1$ وعلي ذلك Y ليس لها دالة كثافة احتمال متصلة . من الواضح أن Y متقطعة باحتمال $P[Y = 1] = 1$.

تحويل التكامل الاحتمالي Probability Integral Transformation

لتسهيل فهم تحويل التكامل الاحتمالي سوف نبدأ بهذا المثال .

مثال (٨–٢٥) إذا كان Y متغيراً عشوائياً حيث $Y \sim UNIF(0, 1)$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $X = 2\sqrt{Y}$.

الحل :

$$F(x) = P[X \le x] = P[2\sqrt{Y} \le x]$$
$$= P[Y \le x^2/4] \quad = x^2/4.$$

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير X هي :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2} \qquad 0 < x < 2$$
$$= 0 \text{ elsewhere}$$

نلاحظ هنا أن y , x يرتبطان بالعلاقة التالية :

$$y = F(x) = \frac{x^2}{4}$$

والتي تكافئ :

$$x = 2\sqrt{y} = F^{-1}(y)$$

أي أنه إذا كانت $Y \sim UNIF(0, 1)$ فإن $X = F^{-1}(y) = 2\sqrt{Y}$ يكون لها دالة كثافة احتمال تجميعية علي الشكل :

$$F(x) = x^2/4 \qquad 0 < x < 2.$$

يعتبر المثال (٨-٢٥) تسهيل أو مقدمة للنظريتين التاليتين وذلك لتوليد عينة عشوائية من توزيع احتمالي معين .

نظرية (٨-٢) ليكن Y متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم في الفترة $(0, 1)$ ، أي أن $Y \sim UNIF(0, 1)$ ، لتكن $F(x)$ لها الخصائص لدالة التوزيع التجميعي من النوع المتصل حيث $F(a) = 0$ ، $F(b) = 1$ ، وبفرض أن $F(x)$ متزايدة باضطراد في الفترة $a < x < b$ حيث b , a من الممكن أن يكونان $-\infty, \infty$ علي التوالي . وعلي ذلك المتغير العشوائي X حيث $X = F^{-1}(Y)$ هو متغير عشوائي من النوع المتصل بدالة توزيع تجميعي $F(x)$.

البرهان :

دالة التوزيع للمتغير X هي :

$$P[X \le x] = P[F^{-1}(Y) \le x]$$

وبما أن $F(x)$ متزايدة باضطراد فإن $F^{-1}(Y) \le x$ تكافئ $Y \le F(x)$ وعلي ذلك :

$$P[X \le x] = P[Y \le F(x)].$$

ولكن $Y \sim UNIF(0, 1)$ وعلي ذلك $P[Y \le y] = y$ في الفترة $0 < y < 1$ وتبعا لذلك فإن :

$$P[X \le x] = P[Y \le F(x)] = F(x), 0 < F(x) < 1.$$

أي أن دالة التوزيع للمتغير X هي $F(x)$.

الآن سوف نشرح كيفية استخدام نظرية (٨-٢) في توليد مشاهدات من التوزيع المعطي في مثال (٨-٢٥) . بفرض أننا حصلنا علي فئة الأعداد العشوائية $y_1, y_2, \ldots, y_n$ فإن الأعداد $x_1 = F^{-1}(y_1) = 2\sqrt{y_1}, x_2 = 2\sqrt{y_2}, \ldots, x_n = 2\sqrt{y_n}$ تمثل n من المشاهدات لمتغير عشوائي X . يوضح شكل (٨-٢) دالة كثافة الاحتمال للمتغير X . يعطي الجدول التالي أول أعداد عشوائية ، عددها 15 ، لتكن $y_1, y_2, \ldots, y_n$ والمأخوذة من العمود الأخير من جدول الأعداد العشوائية في ملحق (٨) وذلك بعد قسمة كل عدد على 10^4 وبالتالي تعتبر القيم $y_1, y_2, \ldots, y_n$ مشاهدات تقريباً تتبع التوزيع المنتظم في الفترة $(0, 1)$.



شكل (٨-٢)

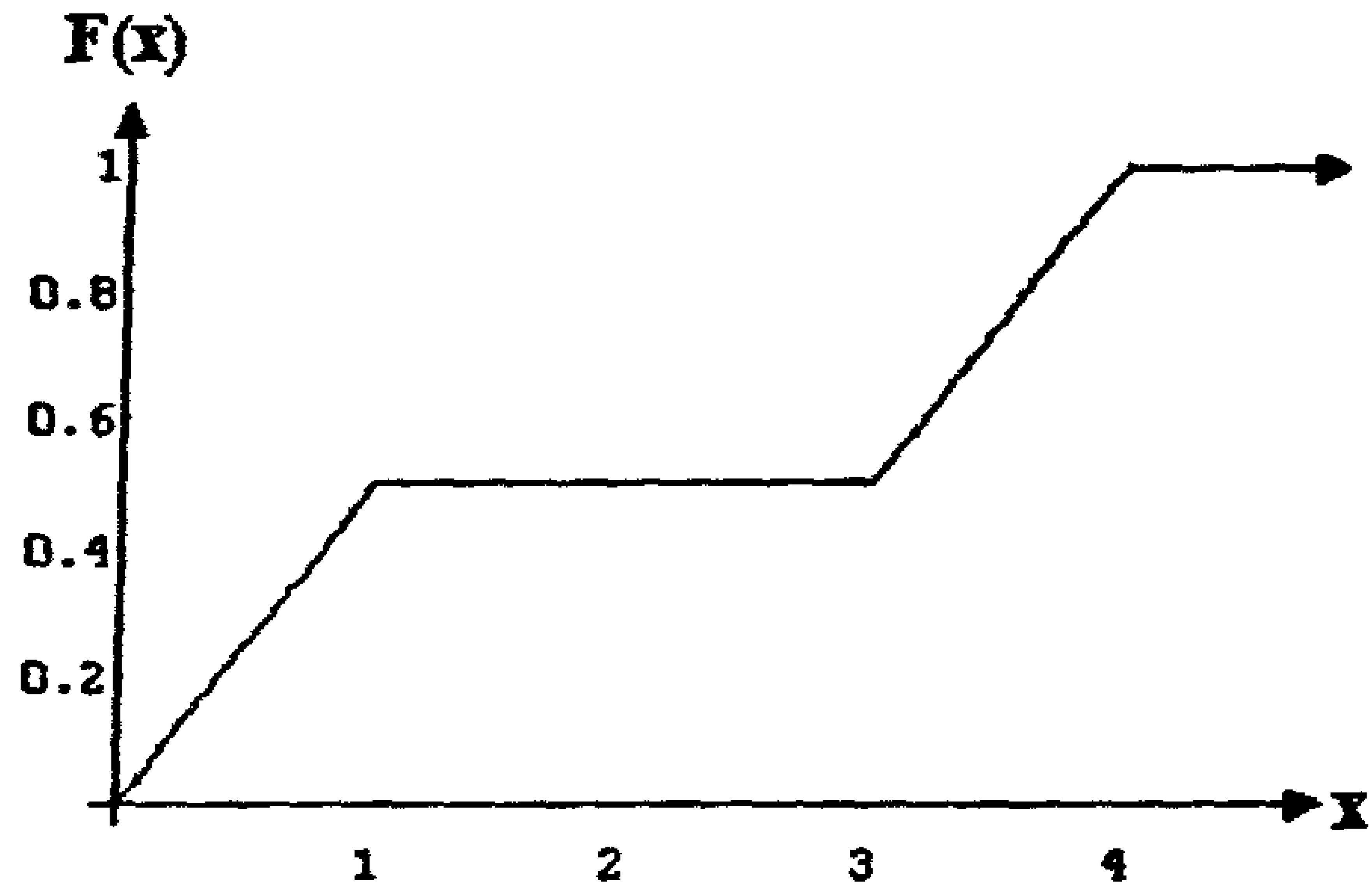
جدول (٨-١)

y	$x = 2\sqrt{y}$
0.1514	0.7782
0.6697	1.6367
0.0527	0.4591
0.4749	1.3783
0.2900	1.0770
0.2354	0.9704
0.9662	1.9659
0.0043	0.1311
0.1003	0.6334
0.9192	1.9175
0.4971	1.4101
0.7293	1.7080
0.9118	1.9008
0.8225	1.8138
0.5915	1.5382

مثال (٨-٢٦) إذا كان X متغيراً عشوائياً من النوع المتصل بدالة كثافة احتمال :

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \qquad 1 < |x-2| < 2$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

بيان دالة التوزيع التجميعي للمتغير X معطي في شكل (٨-٣) . يلاحظ أن F(x) ليست دالة تناظرية وذلك لأن القيمة ½ معرفة لكل قيم $1 \le x \le 3$. أي أن X لا ينطبق عليها شروط النظرية (٨-٢) .



شكل (٨-٣)

نظرية (٨-٣) ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة التوزيع التجميعي F(x) من النوع المتصل ومتزايدة باضطراد . وعلي ذلك المتغير العشوائي Y والمعرف بالعلاقة $Y = F(X)$ له توزيع منتظم في الفترة (0, 1) .

البرهان :

دالة التوزيع للمتغير Y هي :

$$P[Y \le y] = P[F(X) \le y] \qquad 0 < y < 1.$$

وبما أن : $F(X) \le y$ تكافئ $X \le F^{-1}(Y)$ وعلي ذلك :

$P[Y \le y] = P[X \le F^{-1}(y)]$. وبما أن $P[X \le x] = F(x)$ فإنه عند $0 < y < 1$:

$$P[Y \le y] = P[X \le F^{-1}(y)] = F[F^{-1}(y)] = y$$

والذي يمثل دالة التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظـــم فى الفـــترة (1 ,0). أن التحويل Y = F(X) يطلق علية تسمية " تحويل التكامل الاحتمالي " probability integral transformation .

مثال (٨-٢٧) إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمال (توزيع لوجستي) على الشكل:

$$f(x) = \frac{\bar{e}^{x}}{(1+\bar{e}^{x})^2} \qquad -\infty < x < \infty$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

دالة التوزيع التجميعي للمتغير X تكون على الشكل :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\bar{e}^{w}}{(1+\bar{e}^{w})^2} dw = \frac{1}{1+\bar{e}^{x}} \qquad -\infty < x < \infty$$

وعلى ذلك :

$$Y = \frac{1}{1+\bar{e}^{X}} = F(X)$$

لها دالة كثافة الاحتمال :

$$g(y) = 1 \qquad 0 < y < 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

أي أن Y متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم فى الفترة (0,1) .

مثال (٨-٢٨) المطلوب توليد (محاكاة) عينة عشوائية من الحجم n = 10 تتبع توزيع كوشى .

الحل :

نعلم من مثال (٨-١٢) أن دالة التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي X يتبع توزيع كوشـــى هي :

$$F(x) = (\text{Arc}\tan\ x + \frac{\pi}{2})\left(\frac{1}{\pi}\right) \qquad -\infty < x < \infty$$

وإذا كان Y متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم فى الفترة (0, 1) فإن :

$$y = (\text{Arc}\tan\ x + \frac{\pi}{2})\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

تكافئ أن $x = \tan\left(\pi y - \frac{\pi}{2}\right)$

يعطي جدول (٨-٢) قيم عشرة أرقام عشوائية في العمود الأخير من جدول الأرقام العشـوائية في ملحق (٨) وذلك بعد قسمة كل رقم على 10^4 مع قيم x المقابلة لها .

جدول (٨-٢)

y	x
0.1514	-1.9415
0.6697	0.5901
0.0527	-5.9847
0.4749	-0.0790
0.2900	-0.7757
0.2354	-1.0962
0.9662	9.3820
0.0043	-74.021
0.1003	-3.0678
0.9192	3.8595

البرهان العام لنظرية (٨-٣) يمكن الحصول عليه باستبدال الدالـة $F^{-1}(y)$ بالدالـة $G(y)$ والتي تعين لكل قيمة y القيمة لدنيا لـ x بحيث أن $y \le F(x)$ أي أن :

$$G(y) = \min\{x \mid y \le F(x)\} \qquad 0 < y < 1 \qquad (٨-٦)$$

الدالة $G(y)$ موجودة لأي دالة توزيع تجميعي ، $F(x)$ ، وتساوي $F^{-1}(y)$ إذا كـانت $F(x)$ متصلة متزايدة بإضطراد . الدالة $G(y)$ للمثال (٨-٢٦) هي :

$$G(y) = 2y \qquad 0 \le y \le 1/2$$
$$= 2(y+1) \qquad 1/2 < y \le 1.$$

للدالة $G(y)$ تطبيق آخر والذي يأتي من النظرية التالية :

نظرية (٨-٤) إذا كانت $F(x)$ دالة التوزيع التجميعي ,إذا كانت $G(y)$ دالة معرفة كمـا في (٨-٦) و إذا كانت $Y \sim UNIF(0, 1)$ فإن $X = G(Y) \sim F(x)$.

أهم تطبيق للنظرية السابقة هو توليد متغيرات عشوائية " pseudo " من توزيعات معينة باستخدام الحاسب الآلي . بمعني آخر ، نحصل على عينة عشوائية من توزيع معين بدالة توزيع تجميعي $F(x)$. إذا لدينا n أعداد عشوائية ، لتكن $y_1, y_2, ..., y_n$ تم توليدها على الحاسب الآلي من توزيع منتظم فى الفترة (0, 1) وتبعا لذلك فإن $x_1 , x_2 , ... x_n$ تحسب كالآتي :

$$x_i = G(y_i) \qquad i = 1,2,...,n .$$

والتي تقابل توليد عينة عشوائية من توزيع له $F(x)$. بالطبع في كثير من الأمثلة فإن $F(x)$ تكون تناظرية وعلى ذلك يمكن استخدام $x_i = F^{-1}(y_i)$. أيضا يمكن استخدام المعادلة (٨-٦) للمتغيرات العشوائية من النوع المتقطع .

مثال (٨-٢٩) إذا كان X متغيراً عشوائياً بحيث أن $X \sim BIN(1,1/2)$ فإن دالة التوزيع التجميعي تكون على الشكل :

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \qquad & x < 0 \\ &= 1/2 \qquad & 0 \le x < 1 \\ &= 1 \qquad & 1 \le x \end{aligned}$$

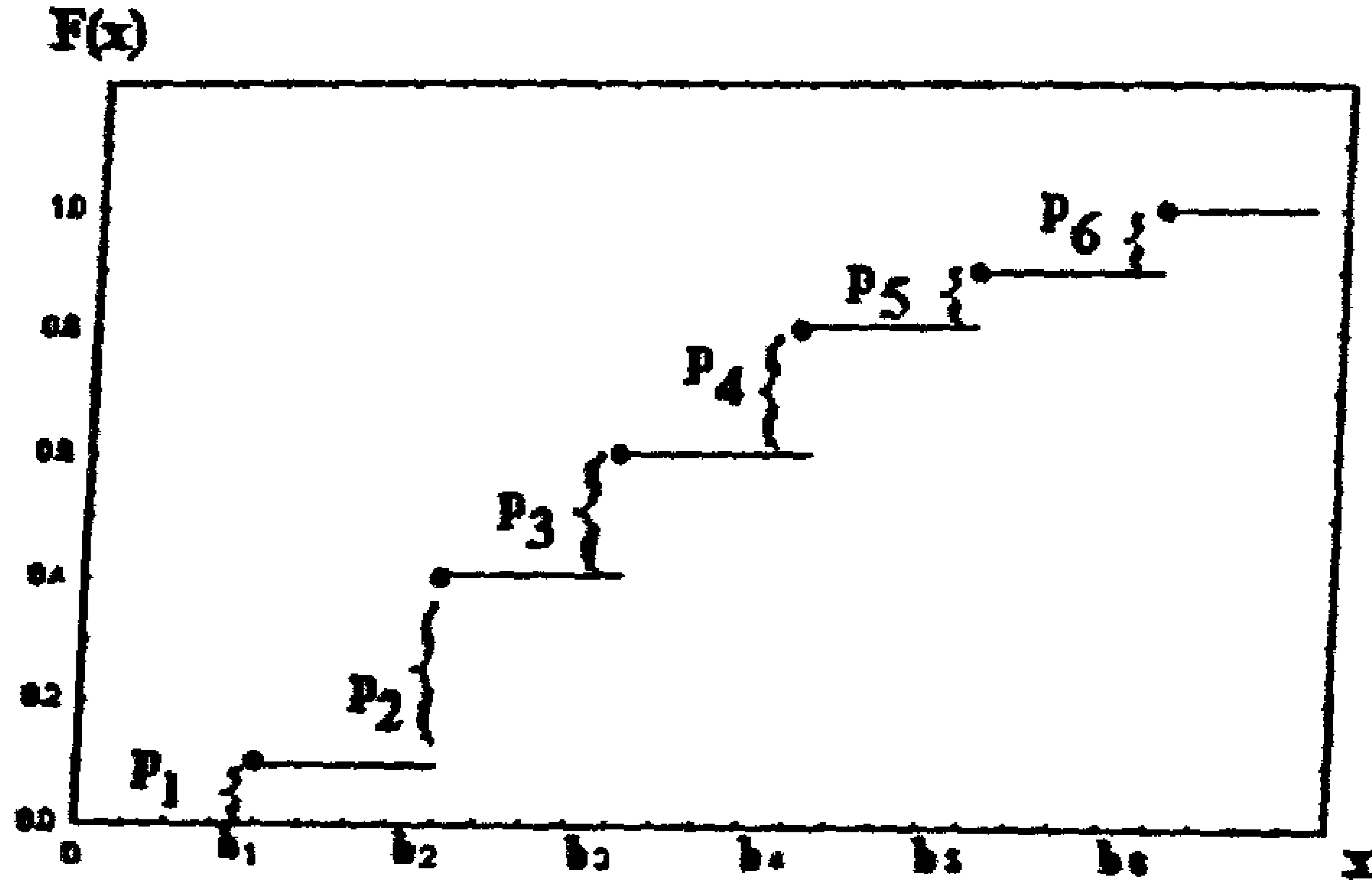
والدالة $G(y)$ سوف تكون على الشكل :

$$\begin{aligned} G(y) &= 0 \qquad & 0 \le y \le 1/2 \\ &= 1 \qquad & \frac{1}{2} < y \le 1. \end{aligned}$$

عموما لتوليد مشاهدات لأي متغير عشوائي X من النوع المتقطع و ليكن فضاء المتغير X هو $A = \{ b_1 , b_2 , b_3 ,...\}$. فى هذه المناقشة سوف نفترض وجود ستة قيم فقط فى الفضاء R وأن $b_6 \ge .... > b_2 > b_1 > 0$. ليكن $p_i = P(X = b_i) = f(b_i)$ حيث $i = 1,2,3,...,6$. هذه الاحتمالات موضحة مع $F(x)$ فى شكل (٨-٤). لتوليد أي مشاهدة من X ، نقوم بتوليد عدد عشوائي $Y = y$ حيث Y يتبع التوزيع المنتظم فى الفترة (1 ,0) . إذا كانت $y \le p_1$ فإن $X = b_1$ وإذا كانت $p_1 < y \le p_1 + p_2$ فإن $X = b_2$ وهكذا حتى الوصول $p_1 + ... + p_5 < y \le p_1 + ... + p_6 = 1$ فإن $X = b_6$. فعلى على سبيل المثال :

$$P[p_1 < Y \le p_1 + p_2] = p_1 + p_2 - p_1 = p_2$$

وهو الاحتمال الصحيح عندما $X = b_2$. تبعا لهذه الطريقة يمكننا الحصول على الاحتمالات المطلوبة عندما $X = b_1$, $X = b_2$, ... , $X = b_6$.



شكل (٨-٤)

مثال (٨-٣٠) إذا كان Y ~ UNIF (0, 1) أشرح كيف يمكن توليد مشاهدة لها داله كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x^{-\frac{1}{2}} + (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (٨-٧)$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

الحل :

يمكن كتابة الدالة فى (٨-٧) على الشكل :

$$f(x) = a\ f_1(x) + (1-a)\ f_2(x) \quad , \quad 0 \le a \le 1$$

حيث :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[a\ f_1(x) + (1-a)\ f_2(x)\right] dx = 1 .$$

حيث دالة كثافة الاحتمال $f_1(x)$ تكون على الشكل :

$$f_1(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad 0\le x<1$$

بدالة توزيع تجميعي على الشكل :

$$\begin{aligned} F_1(x)&=\sqrt{x} && 0\le x<1\\ &=1 && x\ge 1. \end{aligned}$$

بوضع $Y=F_1(X)=\sqrt{X}$ فإن $X=F_1^{-1}(Y)=Y^2$. أيضا دالة كثافة الاحتمال $f_2(x)$ تكون على الشكل :

$$\begin{aligned} f_2(x)&=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} && 0<x<1\\ &=0 \ \text{ elsewhere}. \end{aligned}$$

بدالة توزيع تجميعي على الشكل :

$$\begin{aligned} F_2(x)&=(1-x)^{\frac{1}{2}} && 0\le x\le 1\\ &=0 && x<0\\ &=1 && x\ge 1 \end{aligned}$$

بوضع :

$$Y=F_2(X)=(1-X)^{\frac{1}{2}}$$

فــإن :

$$X=F_2^{-1}(X)=1-Y^2$$

أي أن الدالة فى (٨-٧) يمكن كتابتها على الشكل :

$$f(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}((1-x)^{-\frac{1}{2}}).$$

الآن نلقى عملة ونكتب $X=Y^2$ إذا كان الناتج وجه بينما $X=(1-Y^2)$ إذا كــان النــاتج كتابة.

مثال (٨-٣١) إذا كان Y متغيراً عشوائياً حيث $Y\sim UNIF\,(0,1)$ أشرح كيــف يمكــن استخدام Y للحصول على متغير عشوائي بدالة كثافة احتمال :

$$f(x)=3\ ((x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{8}|1-2x|^{\frac{-1}{2}})\ , \qquad 0<x<1 \qquad (٨-٨)$$
$$=0 \ \text{elsewhere} \ .$$

الدالة فى (٨-٨) يمكن كتابتها على الشكل :

$$f(x)=\frac{12}{4}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{8}(1-2x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2}{8}f_1(x)+\frac{3}{8}f_2(x)+\frac{3}{8}f_3(x).$$

حيث دالة كثافة الاحتمال $f_1(x)$ تكون على الشكل :

$$f_1(x)=12(x-\frac{1}{2})^2 \qquad 0<x<1$$
$$=0 \ \text{elswhere}$$

بدالة توزيع تجميعي على الشكل :

$$F_1(x)=4(x-\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2} \qquad 0<x<1$$
$$=0 \qquad x<0$$
$$=1 \qquad x\ge 1.$$

بوضـــع :

$Y=F_1(X)=4(X-\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}$ فـــإن $X=F^{-1}(y)=(\frac{Y}{4}-\frac{1}{8})^{1/3}+\frac{1}{2}$

أيضا دالة كثافة الاحتمال $f_2(x)$ تكون على الشكل :

$$f_2(x)=(1-2x)^{-\frac{1}{2}}=|1-2x|^{-\frac{1}{2}} \qquad 0<x<\frac{1}{2}$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

هذه الدالة نأخذ $X=\frac{1}{2}(1-Y^2)$ حيث X هنا متغيرا عشوائيا له دالـــة كثافـــة الاحتمـــال $f_2(x)$ وذلك لأن :

$$P(X \le x) = P(\frac{1}{2}(1 - Y^2) \le x)$$

$$= 1 - (1 - 2x)^{\frac{1}{2}}.$$

تمثل دالة التوزيع المقابلة لدالة كثافة الاحتمال $f_2(x)$.

وأخيرا دالة كثافة الاحتمال $f_3(x)$ على الشكل :

$$f_3(x) = (2x - 1)^{-\frac{1}{2}} = |1 - 2x|^{\frac{-1}{2}} \qquad \frac{1}{2} < x < 1$$

$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

لهذه الدالة نـــأخذ $X = \frac{1}{2}(1 + Y^2)$ وذلـــك لأنـــه يمكـــن إثبـــات أن دالـــة التوزيـــع $F_3(x) = (2x - 1)^{\frac{1}{2}}$ هي لمتغير عشوائي له الدالة $f_3(x)$.

وعلى ذلك لتوليد مشاهدة تتبع دالة كثافة الاحتمال فى (٨-٨) نلقى عملـــة ثـــلاث مـــرات وبفرض أن A الحادثة ظهور ثلاثة وجوه أو ثلاثة كتابة (فى أي ترتيب) و B الحادثة الحصـــول على وجهين وكتابة فى أى ترتيـــب و C الحادثـــة الحصـــول علـــى أثنـــين كتابـــة ووجـــه (فى أي ترتيب) وعلى ذلك نعرف المتغير العشوائي X كالتالي :

إذا وقعت A $\qquad X = \left(\frac{Y}{4} - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}$

إذا وقعت B $\qquad X = \frac{1}{2}(1 + Y^2)$

إذا وقعت C $\qquad X = \frac{1}{2}(1 - Y^2)$

(ب) طريقـــة التحويـــل Transformation Method

فى الجزء (٨-٢-١) تناولنا صيغة التحويلة التناظرية والتعيين من فضـــاء المتغـــير X إلى فضاء المتغير $Y = u(X)$ وذلك للحصول على دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي Y من النـــوع

المتقطع . فى هذا الجزء سوف نختبر نفس المشكلة عندما يكون المتغير من النوع المتصل . للتسهيل سوف تبدأ بالمثال التالي :

مثال (٨-٣٢) ليكن X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وإذا كان : $Z = u(X) = (X - \mu)/\sigma$ حيث $Z \sim N(0, 1)$. فى هذا المثال سوف نحصل على توزيع Z بطريقة التحويل حيث $x = z\sigma + \mu$. بما أن :

$$F_Z(z) = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right] = P[X \le z\sigma + \mu]$$

$$= \int_{-\infty}^{z\sigma+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

من علم التفاضل والتكامل نعلم أن :

$$\frac{d}{dz}\left[\int_0^{w(z)} f(t)\ dt\right] = f[w(z)]\frac{dw(z)}{dz},$$

وعلى ذلك :

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z\sigma+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \frac{d(\sigma z+\mu)}{dz}$$

$$= f[w(z)]\frac{dw(z)}{dz}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right), -\infty < z < \infty.$$

نظرية (٨-٥) بفرض أن X متغيراً عشوائياً من النوع المتصل بدالة كثافة احتمال $f_X(x)$ وبفرض أن $Y = u(X)$ تعرف تحويلة تناظرية من $R = \{x \mid f_X(x) > 0\}$ إلي $\varphi = \{y \mid f_Y(y) > 0\}$ بتحويله $x = w(y)$. إذا كانت المشتقة $\frac{dw(y)}{dy}$ متصلة ولا تساوي الصفر على φ فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \left|\frac{d\ w(y)}{dy}\right| \qquad y \in \varphi \qquad (٨-٩)$$

البرهان :

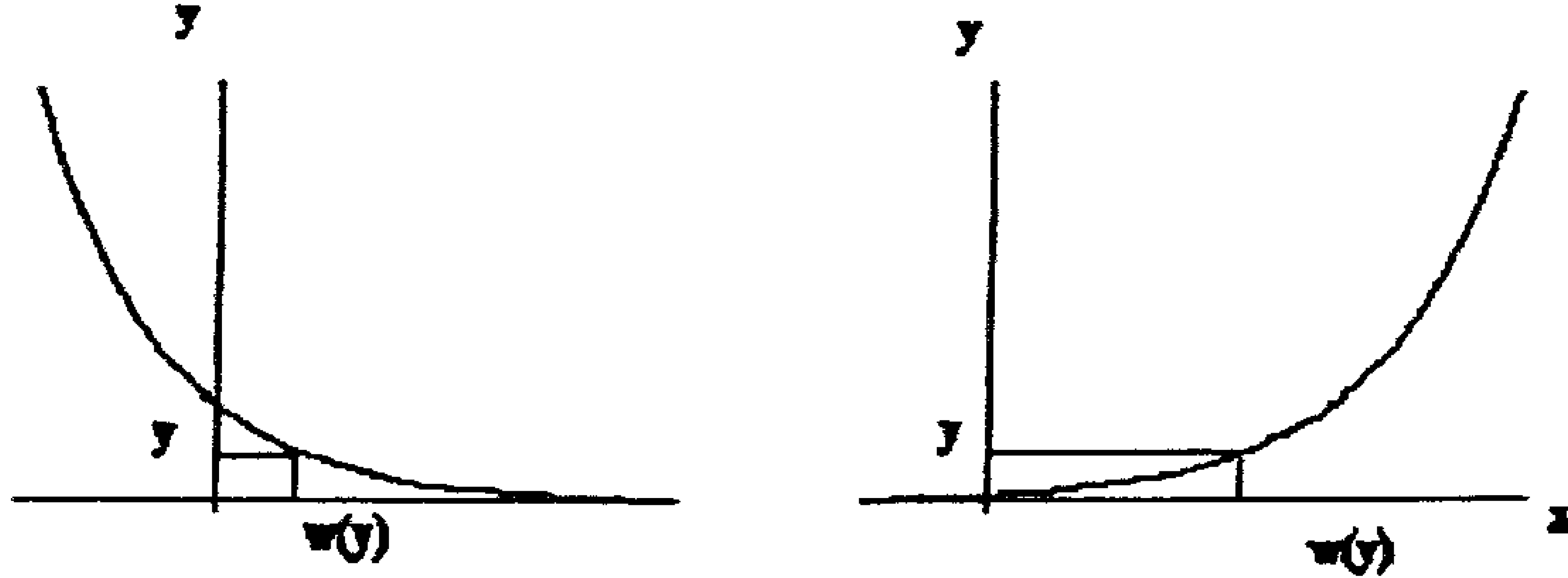
إذا كانت $y = u(x)$ تناظرية،فسوف تكون إما تزايدية بإضطراد أو تناقصية بـــإضطراد.
أولا بفرض أنها تزايدية أي أن $u(x) \le y$ أنظر شكل (٨-٥) إذا وفقط إذا كان $x \le w(y)$
وعلى ذلك :

$$F_Y(y) = P[u(X) \le y\} = P[X \le w(y)] = F_X(w(y))$$

ومنها :

$$f_Y(y) = \frac{dF_X(w(y))}{dy} = f_X(w(y))\frac{dw(y)}{dy}$$

$$= f_X(w(y)) \left|\frac{dw(y)}{dy}\right|.$$



شكل (٨-٥)

لأن $\frac{dw(y)}{dy} > 0$ في هذه الحالة . فى الحالة المتناقصة فإن $u(x) \le y$ إذا وفقط إذا كان $w(y) \le x$ وعلى ذلك :

$$F_Y(y) = P[u(X) \le y\} = P[X \ge w(y)] = 1 - F_X(w(y)).$$

ومنها :

$$f_Y(y) = -f_X(w(y))\frac{dw(y)}{dy}$$
$$= f_X(w(y))\left|\frac{dw(y)}{dy}\right|$$

وذلك لأن $\frac{dw(y)}{dy}<0$ في هذه الحالة . عادة يشار إلي المشتقة للدالـة w (y) بجـا كوبيـان التحويل Jacobean of the transformation (معـامل التحويـل أو اليعقوبيـه)

ويرمز له بالرمز $J = \frac{dw(y)}{dy}$.

مثال (٨-٣٣) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f_X(x) = e^{-x} \qquad x > 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = \frac{5}{9}X - \frac{160}{9}$.

الحل :

إذا كان $y = u(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$ فإن $x = w(y) = \frac{9}{5}(y + \frac{160}{9})$ وعلى ذلك :

ومنها $J = \frac{dw(y)}{dy} = \frac{9}{5}$:

$$f_Y(y) = f_X(\frac{9}{5}(y + \frac{160}{9}))\left|\frac{9}{5}\right|$$
$$= \frac{9}{5}\ \bar{e}^{[(9y+160)/5]} \qquad y > -\frac{160}{9}$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

مثال (٨-٣٤) إذا كان X ~ UNIF (0, 1) وإذا كان Y = -ln X عندئـــــذ

$y = u(x) = -\ln x$ فإن $x = w(y) = e^{-y}$. دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = f_X(e^{-y})\,|J|$$

حيث $J=\frac{d\bar{e}^{y}}{dy}=-\bar{e}^{y}$ وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y)=1.\left|-\bar{e}^{y}\right| \qquad 0\le \bar{e}^{y}\le 1$$

$$=0 \quad \text{elsewhere}.$$

أي أن :

$$f_Y(y)=e^{-y} \qquad 0\le y<\infty$$

$$=0 \quad \text{elsewhere}.$$

مثال (٨ –٣٥) إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f_X(x)=\theta\ \bar{e}^{\theta x} \qquad x>0$$

$$=0 \quad \text{elsewhere}.$$

حيث $\theta>0$ ثابت . إذا كان $Y=e^{x}$. الدالة $u(x)=e^{x}$ متزايدة باضطراد وقابلة للتفاضل وأن $y=e^{x}$ دالة تناظرية حيث $y=u(x)=e^{x}$ إذا وفقط إذا كان $x=w(y)=\ln y$.

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)|J|$$

حيث $J=\frac{dw(y)}{dy}=1/y$. وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y)=\frac{1}{y}\theta\bar{e}^{\theta \ln y} \qquad 0\le \ln y\le\infty$$

$$=0 \quad \text{elswhere}.$$

أي أن :

$$f_Y(y)=\theta y^{-\theta-1} \qquad 1\le y\le\infty$$

$$=0 \quad .$$

مثال (٨–٣٦) إذا كان X متغيراً عشوائياً من النوع المتصل وله دالة كثافة احتمال على الشكل :

$$f(x)=2x \qquad 0<x<1$$

$$=0 \quad \text{elsewhere}.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = 8X^3$.

الحل : إذا كان $y = 8x^3$ فـإن $x = w(y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{2}$ وعلى ذلك :

$$J = \frac{dw(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}\right) = \frac{1}{6y^{2/3}}.$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2}\right)\left|\frac{1}{6y^{2/3}}\right|$$

$$= \frac{1}{6y^{1/3}} \qquad 0 < y < 8$$

$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

مثال (٨-٣٧) إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وإذا كان $X = \ln Y$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل : $x = \ln y$ وعلى ذلك $J = \frac{1}{y}$. وعلى ذلك المتغير Y يتبع التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي حيث $Y \sim LOGN(\mu, \sigma^2)$.

للدوال المتصلة الغير تناظرية سوف نستخدم صيغة مشابهة للصيغة (٨-٢) والمستخدمة في الحالة المتقطعة وذلك بتعميم المعادلة (٨-٩) والمستخدمة فى الحصول على دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y ووضعها على الصورة التالية .

$$f_Y(y) = \sum_j f_X(w_j(y))\left|\frac{d}{dy}w_j(y)\right| \qquad (٨-١٠)$$

أي أنه للتحويله $Y = u(X)$ فإن المجموع يكون على جميع قيم j حيث $u(x_j) = y$.

مثال (٨-٣٨) أوجد داله كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^2$.

الحل : من المعادلة (٨-١٠) فإن :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام طريقة دالة التوزيع التجميعي في المعادلة (٨-٥) .

مثال (٨-٣٩) للمثال (٨-٢٣) حيث X لها دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f_X(x) = 140 \quad x^3(1-x)^3 \qquad 0 \le x \le 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = 4X(1-X)$ باستخدام طريقة التحويل .

الحل : الدالة $y = 4x(1-x)$ تربيعية وعلى ذلك تكون متزايدة باضطراد عندما $x < \frac{1}{2}$ ومتناقصة باضطراد عندما $x \ge \frac{1}{2}$ كما في شكل (٨-١). عندما $x < \frac{1}{2}$ فإن $y = u(x)$ إذا وفقط إذا كان $x = w_1(y) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})$ بينما لقيم $x \ge \frac{1}{2}$ فإن $y = u(x)$ إذا وفقط إذا كان $x = w_2(y) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y})$. وبما أن $0 \le x \le 1$ فإن $0 \le u(x) \le 1$ وعلى ذلك $y = u(x)$ لابد أن تكون بين 0 , 1 . وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y من المعادلة (٨-١٠) هي :

$$f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{1-y}}\left[f_X(\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})) + f_X(\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y}))\right].$$

وهي نفس الصيغة التي حصلنا عليها في مثال (٨-٢٣) باستخدام طريقة دالة التوزيع التجميعي حيث :

$$f_Y(y) = \frac{35}{32} \quad y^3(1-y)^{-1/2} \qquad 0 \le y < 1.$$

مثال (٨-٤٠) إذا كان $X \sim UNIF(-1, 1)$ وإذا كان $Y = X^2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

يمكن تجزئة الفئة $R = \{-1, 1\}$ إلي $A_1 = (-1,0)$ و $A_2 = (0, 1)$ وعلى ذلك $y = x^2$ لها حلول وحيدة $x_1 = w_1(y) = -\sqrt{y}$ ، $x_2 = w_2(y) = \sqrt{y}$ على تلــك الفــترتين ويمكن إهمال النقطة $x = 0$ فى هذه التجزئه لأن X متصلة . دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي

$$f_Y(y) = f_X(-\sqrt{y})\left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right| + f_X(\sqrt{y})\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad . \quad 0 \le y \le 1.$$

مثال (٨-٤١) إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع كوشي بدالة كثافة احتمال :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \qquad -\infty < x < \infty.$$

وإذا كان $Y = X^2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

يمكن تجزئه الفئة $R = \{-\infty, \infty\}$ إلي $A_1 = \{-\infty, 0\}$ و $A_2 = \{0, \infty\}$ وعلى ذلك $y = x^2$ لها حلول وحيدة . $x_1 = w_1(y) = -\sqrt{y}$ ، $x_2 = w_2(y) = \sqrt{y}$ على تلــك الفترتين ويمكن إهمال النقطة $x = 0$ فى هذه التجزئة لأن X متصلة . دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = f_X(-\sqrt{y})\left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right| + f_X(\sqrt{y})\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

$$= \frac{1}{\pi(1 + y)\sqrt{y}} \qquad 0 < y < \infty,$$

$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

(٨-٣) طرق إيجاد توزيع دوال فى متغيرين أو أكثر :

فى البند (٨-٢) تناولنا مشكلة الحصول على التوزيع الاحتمالي لدالة فى متغير عشوائى فى البعد الأول . الآن يكون من الطبيعي تناول مشكلة الحصول على التوزيع المشترك لدوال فى متغيرين عشوائيين أو أكثر .بفرض متجه عشوائي $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ وإذا كان $u_1(x), u_2(x), ..., u_k(x)$ دوال في x عددها k . وعلى ذلك $Y_i = u_i(X)$ ، حيث i=1,2,...k ، يعرف متجه آخر $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_k)$. للتسهيل سوف نعبر عنه بكتابة . Y=U(X)

(٨-٣-١) الحالة المتقطعة : Discrete Case

نظرية (٨-٦) إذا كان X متجه من المتغيرات العشوائية المعطاة من النوع المتقطع بدالة كثافة احتمال مشتركة $f_X(x)$ وإذا كان $Y = u(X)$ يعرف تحويله تناظرية ، فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Y هي :

$$f_Y(y_1, y_2, ..., y_k) = f_X(x_1, x_2, ..., x_k)$$

حيث $x_1, x_2, ..., x_k$ يمثلون الحلول للدالة $y = u(x)$ والتي تعتمد على $y_1, y_2, ..., y_k$

حيث X هنا يعبر عن متجه و $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$.

مثال (٨-٤٢) إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمال مشتركة على النحو التالي :

x_2 \ x_1	1	-2
1	0.225	0.125
-2	0.300	0.350

وبفرض أن $Y_1 = |X_1|$ و $Y_2 = X_2^2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 , Y_2 .

الحل :

$$f_{Y_1,Y_2}(1,1) = f_{X_1,X_2}\ (1,1) = 0.225,$$

$$f_{Y_1,Y_2}(1,4) = f_{X_1,X_2}\ (1,-2) = 0.300,$$

$$f_{Y_1,Y_2}(2,1) = f_{X_1,X_2}\ (-2,1) = 0.125,$$

$$f_{Y_1,Y_2}(2,4) = f_{X_1,X_2}\ (-2,-2) = 0.35.$$

مثــال (٨-٤٣) إذا كــان X_2 , X_1 متغــيرين مســتقلين حيــث $X_i \sim POI(\mu_i)$ $i = 1, 2$, المطلوب إيجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y_1 = X_1 + X_2$.

الحل : فى هذه الحالة نحتاج لتعريف متغير جديد ليكن Y_2 ولأن Y_2 ليس موضع الاهتمــام فسوف نختار $Y_2 = X_2$ للتسهيل . وعلى ذلك $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2$ يمثلــون تحويلــه تناظرية وعلى ذلك $x_2 = y_2$, $x_1 = y_1 - y_2$ دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 , Y_2 هي :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1 - y_2, y_2)$$

$$= \frac{\mu_1^{y_1 - y_2}\ \mu_2^{y_2}\ e^{-\mu_1 - \mu_2}}{(y_1 - y_2)!\,y_2!},$$

$$y_1 = 0,1,2,\ldots;\ y_2 = 0,1,2,\ldots, y_1$$

$$= 0 \text{ elsewhere } .$$

دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_1 هي :

$$f_{Y_1}(y) = \sum_{y_2=0}^{y_1} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$$

$$= \frac{e^{-\mu_1 - \mu_2}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{(y_1 - y_2)!\,y_2!}\ \mu_1^{y_1 - y_2} \mu_2^{y_2}$$

$$= e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \frac{(\mu_1 + \mu_2)^{y_1}}{y_1!} \qquad y_1 = 0,1,2,\ldots$$

$$= 0 \ \text{ elsewhere.}$$

أي أن $Y_1 = X_1 + X_2$ يتبع توزيع بواسون بمعلمتين $\mu_1 + \mu_2$.

عندما تكون التحويلة غير تناظرية وإذا توفرت التجزئة ، لتكن $A_1, A_2,\dots$ بحيث أن المعادلة $y = u(x)$ لها حل وحيد $x = x_j$ أو :

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj})$$

على الفئة A_j . وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال لـ Y هي :

$$f_Y(y_1,\dots,y_k) = \sum_j f_X(x_{1j},\dots,x_{kj})$$

مثال (٨-٤٤) ليكن X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمال مشتركة في جدول (٨-٣).

جدول (٨-٣)

x_2 \ x_1	-2	1	2
-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

وبفرض أن $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_2^2$ أوجد داله كثافة الاحتمال الهامشية لكل من Y_1 , Y_2 .

الحل :

$$f_{Y_1,Y_2}(-4,4) = f_{X_1,X_2}(-2,-2) = \frac{1}{9},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(-1,1) = f_{X_1,X_2}(-2,1) = \frac{1}{9},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(0,4) = f_{X_1,X_2}(-2,2) + f_{X_1,X_2}(2,-2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(-1,4) = f_{X_1,X_2}(1,-2) = \frac{1}{9},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(2,1) = f_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{1}{9},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(3,4) = f_{X_1,X_2}(1,2) = \frac{1}{9},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(3,1) = f_{X_1,X_2}(2,1) = \frac{1}{9},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(4,4) = f_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1}{9}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 , Y_2 موضحة فى جدول (٨-٣):

جدول (٨-٣)

y_1 \ y_2	-4	-1	0	2	3	4	$f_{Y_2}(y)$
1		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$		$\frac{3}{9}$
4	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{6}{9}$
$f_{Y_1}(y)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

من الجدول (٨-٣) يمكن الحصول على داله كثافة الاحتمال الهامشية لكـــل مـــن Y_2 , Y_1 والموضحة فى جدول (٨-٤) و جدول (٨-٥) على التوالى .

جدول (٨-٤)

y_1	-4	-1	0	2	3	4
$f_{Y1}(y)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

جدول (٨-٥)

y_2	1	4
$f_{Y_2}(y)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$

في بعض الأحيان يكون لدينا المتجـــه العشـــوائي $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ وتكـــون الدوال $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ عددها m حيث $m < k$ والمطلوب أيجـــاد دالـــة كثافـــة الاحتمال المشتركة للدوال $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$. هذه الحالة يوضحها المثال التالي.

مثال (٨-٤٥) إذا كان $X = (X_1, X_2, X_3)$ متجه له داله كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

x_1, x_2, x_3	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,1)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
$f_X(x_1, x_2 x_3)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير :

$$Y_1 = u_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3, \quad Y_2 = u_2(X_1, X_2, X_3) = |X_3 - X_2|.$$

الحل :

$$f_{Y_1,Y_2}(0,0) = f_{X_1,X_2,X_3}(0,0,0) = \frac{1}{8},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(1,1) = f_{X_1,X_2,X_3}(0,0,1) = \frac{3}{8},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(2,0) = f_{X_1,X_2,X_3}(0,1,1) = \frac{1}{8},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(2,1) = f_{X_1,X_2,X_3}(1,0,1) + f_{X_1,X_2,X_3}(1,1,0) = \frac{2}{8},$$

$$f_{Y_1,Y_2}(3,0) = f_{X_1,X_2,X_3}(1,1,1) = \frac{1}{8}.$$

(٨-٣-٢) الحالة المتصلة : Continuous Case :

فى هذا الجزء سوف نناقش طريقتين لاشتقاق توزيع دوال فى متغيرين عشوائيين أو أكـــثر وهما طريقة دالة التوزيع التجميعي وطريقة التحويل .

(أ) طريقة دالة التوزيع التجميعي

Cumulative Distribution Function Technique

نظرية (٨-٧) إذا كان $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ متجه عشوائي من متغيرات عشـوائية عددها k من النوع المتصل بدالة كثافة احتمال مشتركة $f_X(x_1, x_2, ..., x_k)$. إذا كان $Y = u(X)$ دالة فى X ، فإن :

$$F_Y(y) = P[u(X) \leq y]$$
$$= \int \underset{A_y}{\cdots} \int f(x_1, x_2, ..., x_k) dx_1 .... dx_k ,$$

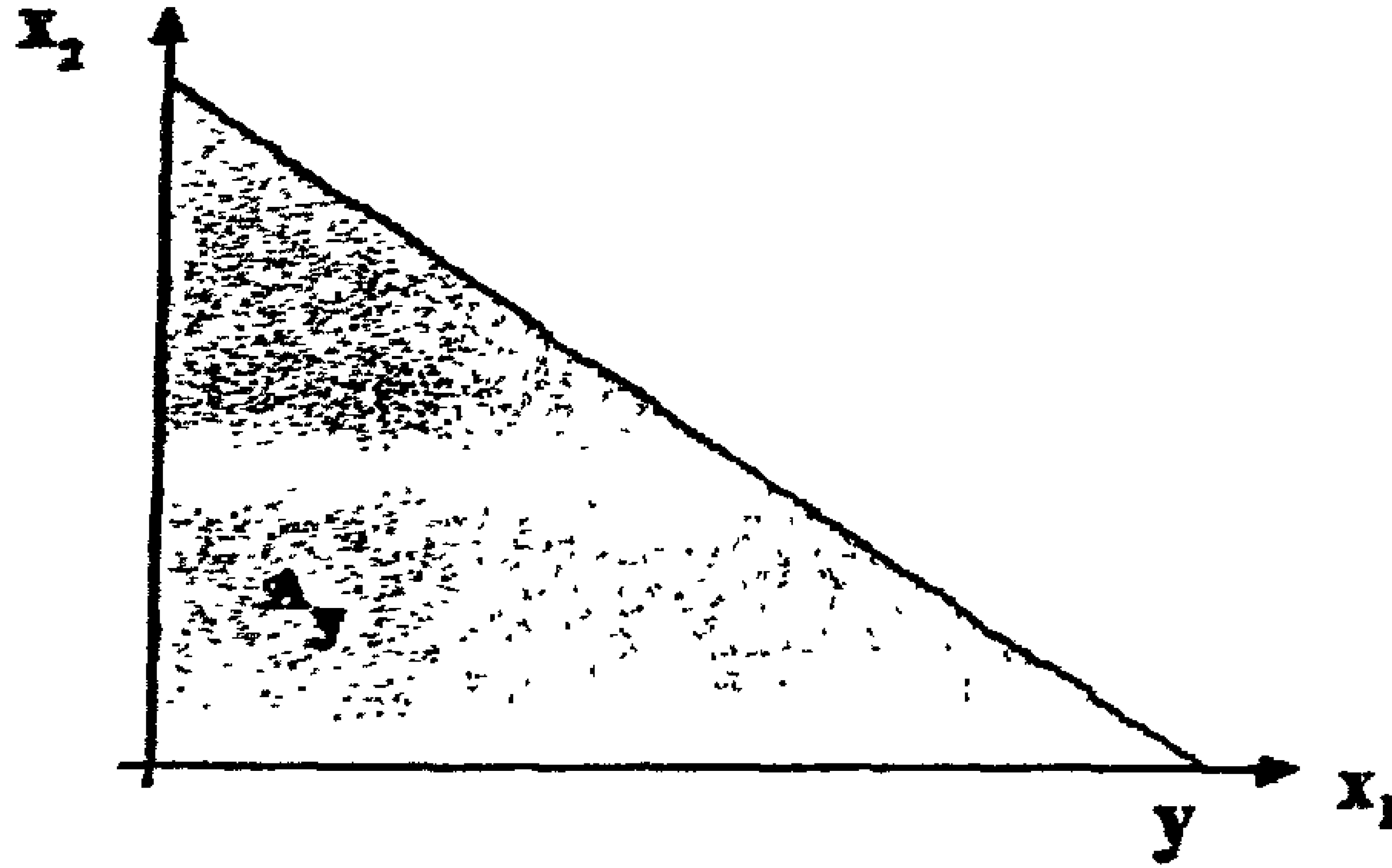
حيث $A_y = \{x \mid u(x) \leq y\}$.

مثال (٨-٤٦) إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim Exp(1)$, $i = 1,2$ وإذا كان $Y = X_1 + X_2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

$$A_y = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq y - x_2, 0 \leq x_2 \leq y\}$$

المنطقة A_y حيث $x_1 + x_2 \leq y$ موضحة فى شكل (٨-٦)



شكل (٨-٦)

تبعا لذلك فإن :

$$F_Y(y)=\int_0^y \int_0^{y-x_2} \bar{e}^{(x_1+x_2)}dx_1\ dx_2$$
$$=1-\bar{e}^y-y\bar{e}^y \qquad ,y>0$$

وعلى ذلك :

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=y\ \bar{e}^y\ \ y>0$$
$$=0 \text{ elsewhere} \ .$$

توزيع حاصل الضرب والقسمة : Distribution of Product and Quotient

نظرية (٨-٨) إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين من النوع المتصل لهما داله كثافة الاحتمال المشتركة $f_{X,Y}(x,y)$ وإذا كان $Z = X Y, W = X/Y$ فإن :

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_{X,Y}\left(x,\frac{z}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|}f_{X,Y}\left(\frac{z}{y},y\right)dy, \qquad (١١-٨)$$

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|f_{X,Y}(wy,y)dy \qquad (١٢-٨)$$

البرهان :

سوف نبرهن المعادلة (٨-١١) فقط .وعلية ومن شكل (٨-٧) حيث :

(أ) $\{x\ \ y\le z, z<0\}$ (ب) $\{x\,y\le z\}, z>0$ و :

$$F_Z(z)=P[Z\le z]=\iint_{xy\le z} f_{X,Y}(x,y)dx\ \ dy$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z/x}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy\right]dx+\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z/x} f_{X,Y}(x,y)dy\right]dx,$$

بوضع $u = x\,y$ فإن :

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z}^{-\infty} f_{X,Y}\left(x,\frac{u}{x}\right)\frac{du}{x}\right]dx + \int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}\left(x,\frac{u}{x}\right)\frac{du}{x}\right]dx$$

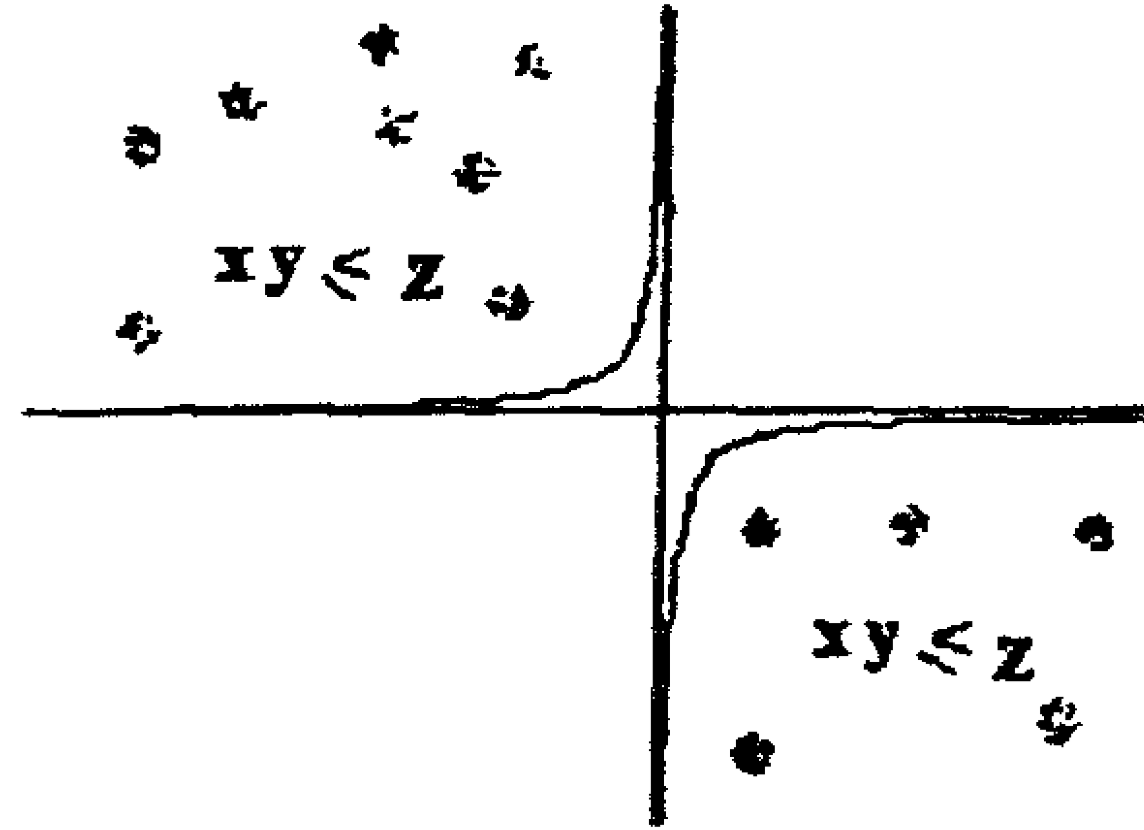
$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{-x} f_{X,Y}\left(x,\frac{u}{x}\right)dx\right]du + \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f_{X,Y}\left(x,\frac{u}{x}\right)dx\right]du.$$

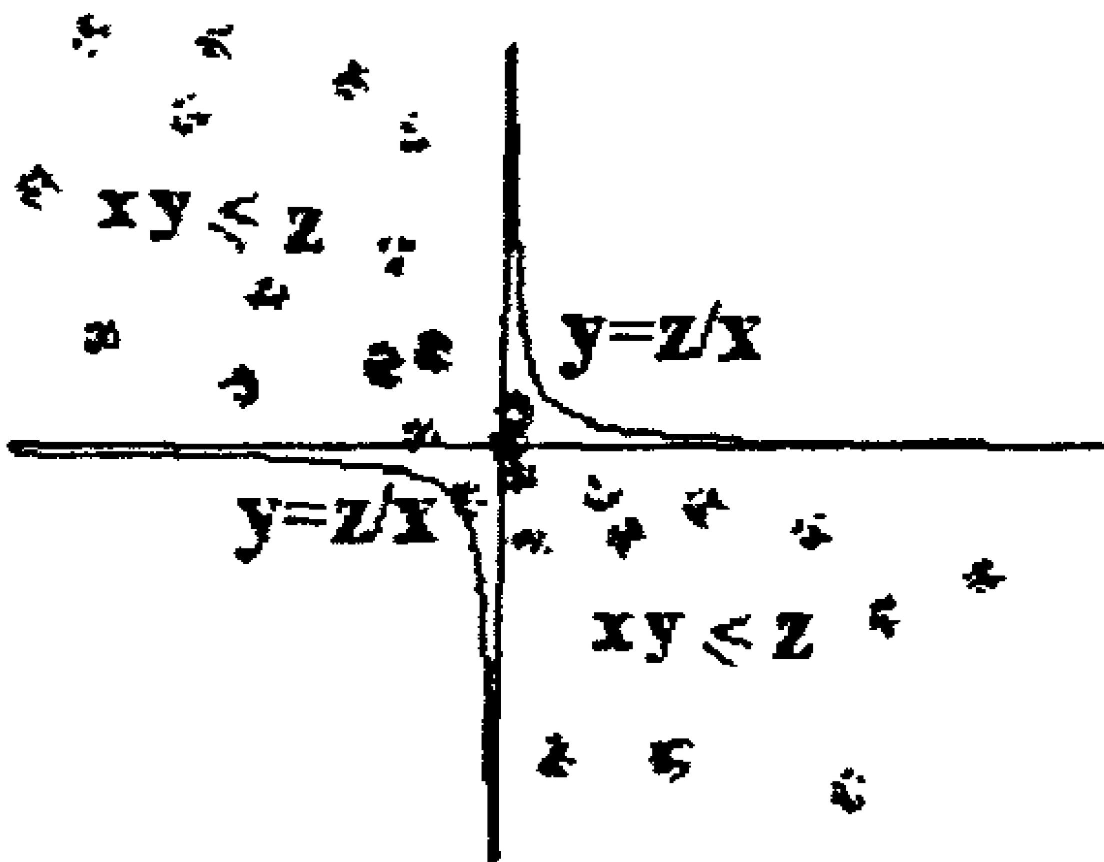
$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{X,Y}\left(x,\frac{u}{x}\right)dx\right]du \qquad \text{(باستبدال التكامل)}$$

وعلى ذلك :

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{X,Y}(x,\frac{z}{x})dx. \quad , \quad z > 0$$

وباستبدال x , y نحصل على الطرف الثانى من المعادلة (٨-١١)





(أ) $\{x\,y \le z\}, z<0$ (ب) $\{x\;y \le z, z>0\}$

شكل (٨-٧)

مثال (٨-٤٧) إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $Y \sim UNIF(0,1)$ و $X \sim UNIF(0,1)$. وإذا كان $Z = XY \;,\; W = X/Y$ أوجد داله كثافة الاحتمال لكل من Z , W .

الحل :

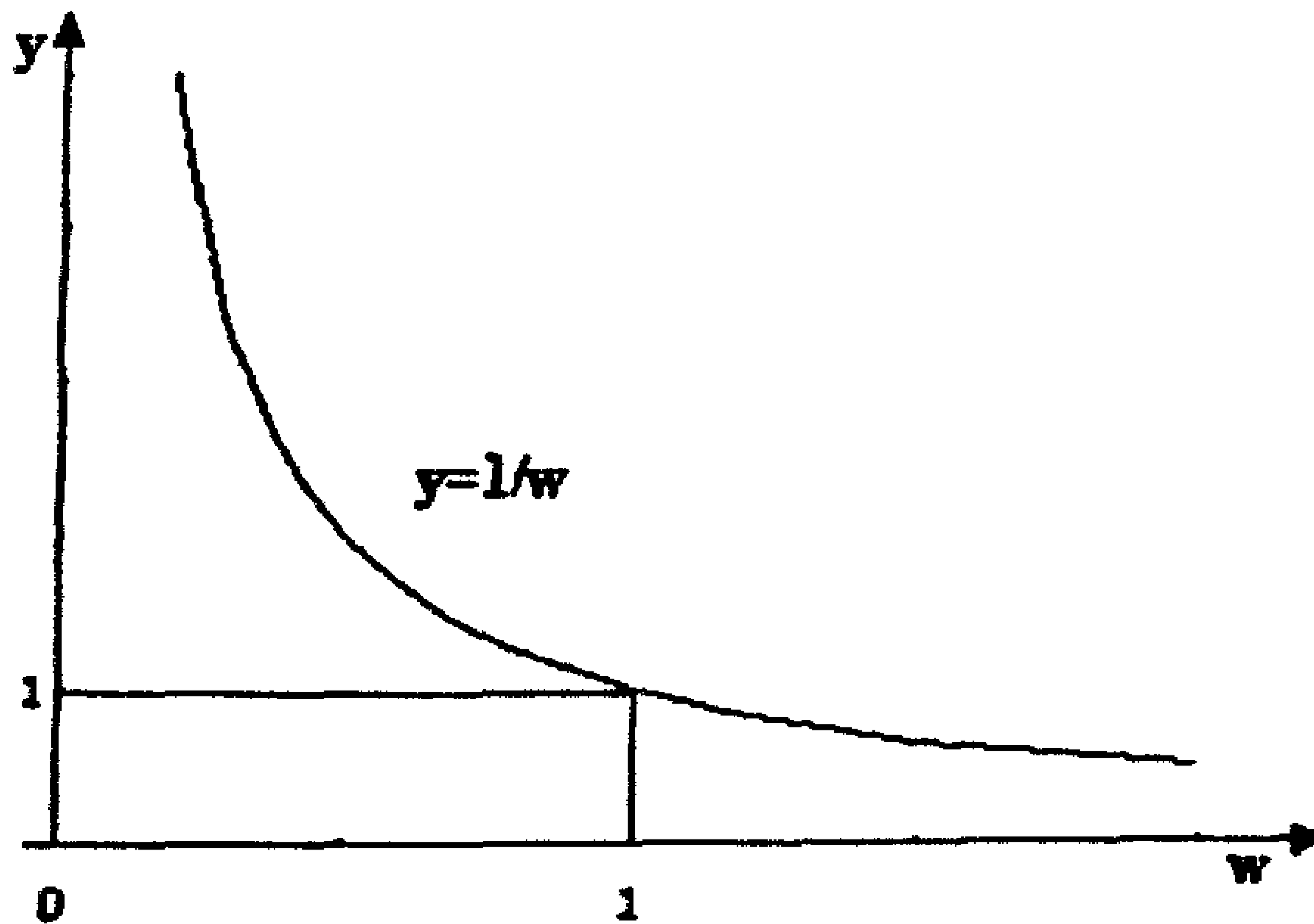
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{X,Y}(x, \frac{z}{x})\ dx.$$
$$= \int_{z}^{1} \frac{1}{x}\ dx$$
$$= -\log z \qquad 0 < z < 1,$$

$$f_W(W) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_{X,Y}(wy, y)\, dy.$$

أنظر شكل (٨-٨) أى أن :

$$f_W(w) = \int_{0}^{1} y\ dy = \frac{1}{2} \qquad 0 < w < 1,$$
$$= \int_{0}^{1/w} y\ dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}\right)^2 \qquad 1 < w < \infty.$$

شكل (٨-٨)



يعد توزيع F , t من التوزيعات الإحصائية الهامة التي تستخدم في مجال الإحصاء الاستنتاجي لإجراء العديد من اختبارات الفروض المتعلقة بتحليل التباين وتصميم التجارب واختبار معنوية خطوط الانحدار وغير ذلك من التطبيقات الإحصائية .

نظرية (٨-٩) إذا كان Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي أي أن :

$Z \sim N(0, 1)$ ، وإذا كان W متغير عشوائي يتبع توزيع مربع كـــاي أي أن $W \sim \chi^2_{(\nu)}$ ،

وإذا كان Z , W مستقلين فإن :

$$T = \frac{Z}{\sqrt{W/\nu}}$$

له توزيع t بدرجات حرية ν وذلك بدالة كثافة احتمال على الشكل :

$$g(t) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\nu/2)(1+t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}} \qquad -\infty < t < \infty$$

البرهان :

بما إن Z , W مستقلين فإن داله كثافة الاحتمال المشتركة لهما تكون على الشكل :

$$g(z,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \bar{e}^{z^2 2}\ \frac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}}\, w^{\nu/2-1}\ \bar{e}^{w/2} \quad -\infty < z < \infty, 0 < w < \infty$$

دالة التوزيع التجميعي $F(t) = P(T \le t)$ للمتغير T تعطي على الشكل التالي :

$$F(t) = P[Z/\sqrt{W/\nu} \le t)$$
$$= P[Z \le \sqrt{(W/\nu)}\, t]$$
$$= \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\sqrt{(w/\nu)}\,t} g(z,w)dz\ dw.$$

أي أن :

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\sqrt{(w/\nu)}\,t}\frac{\bar{e}^{z^2/2}}{2^{(r+1)/2}}dz\right]w^{\nu/2-1}\bar{e}^{w/2}dw.$$

دالة كثافة الاحتمال للمتغير T هي تفاضل دالة التوزيع التجميعي وعلى ذلك :

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}\int_{0}^{\infty}\frac{\bar{e}^{(w/2)(t^2/\nu)}}{2^{(\nu+1)/2}}\sqrt{\frac{w}{\nu}}\,w^{\nu/2-1}\,\bar{e}^{w/2}dw.$$

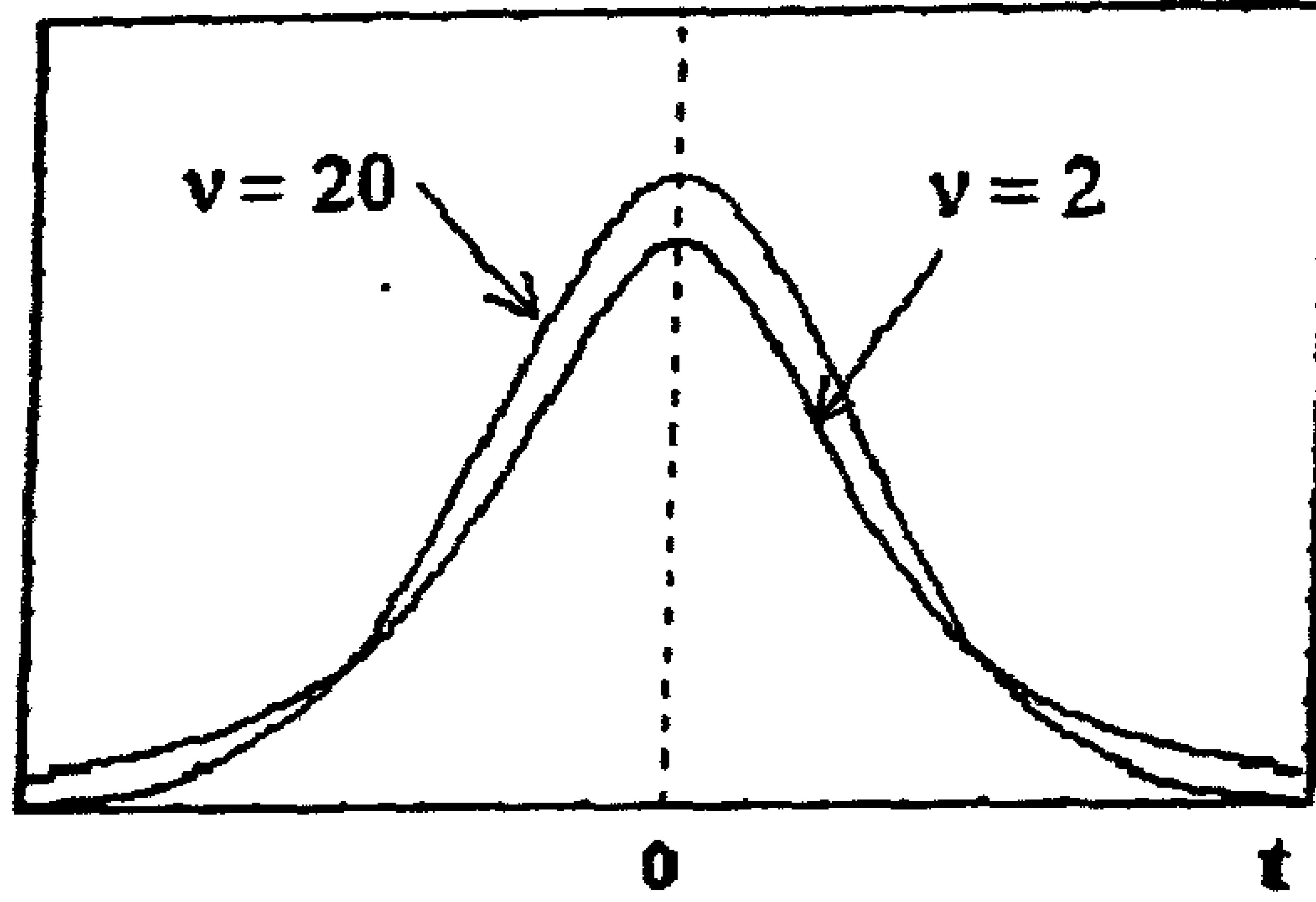
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)}\int_{0}^{\infty}\frac{w^{(\nu+1)/2-1}}{2^{(\nu+1)/2}}\bar{e}^{(w/2)(1+t^2/\nu)}dw.$$

وبوضع $y=(1+t^2/\nu)\,w$ في التكامل فإن $\frac{dw}{dy}=\frac{1}{1+t^2/\nu}$. وعلى ذلك :

$$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{(\nu+1)}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)}\left[\frac{1}{(1+t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}\right]\int_{0}^{\infty}\frac{y^{(\nu+1)/2-1}}{\Gamma\frac{(\nu+1)}{2}2^{(\nu+1)/2}}\,\bar{e}^{y/2}\,dy.$$

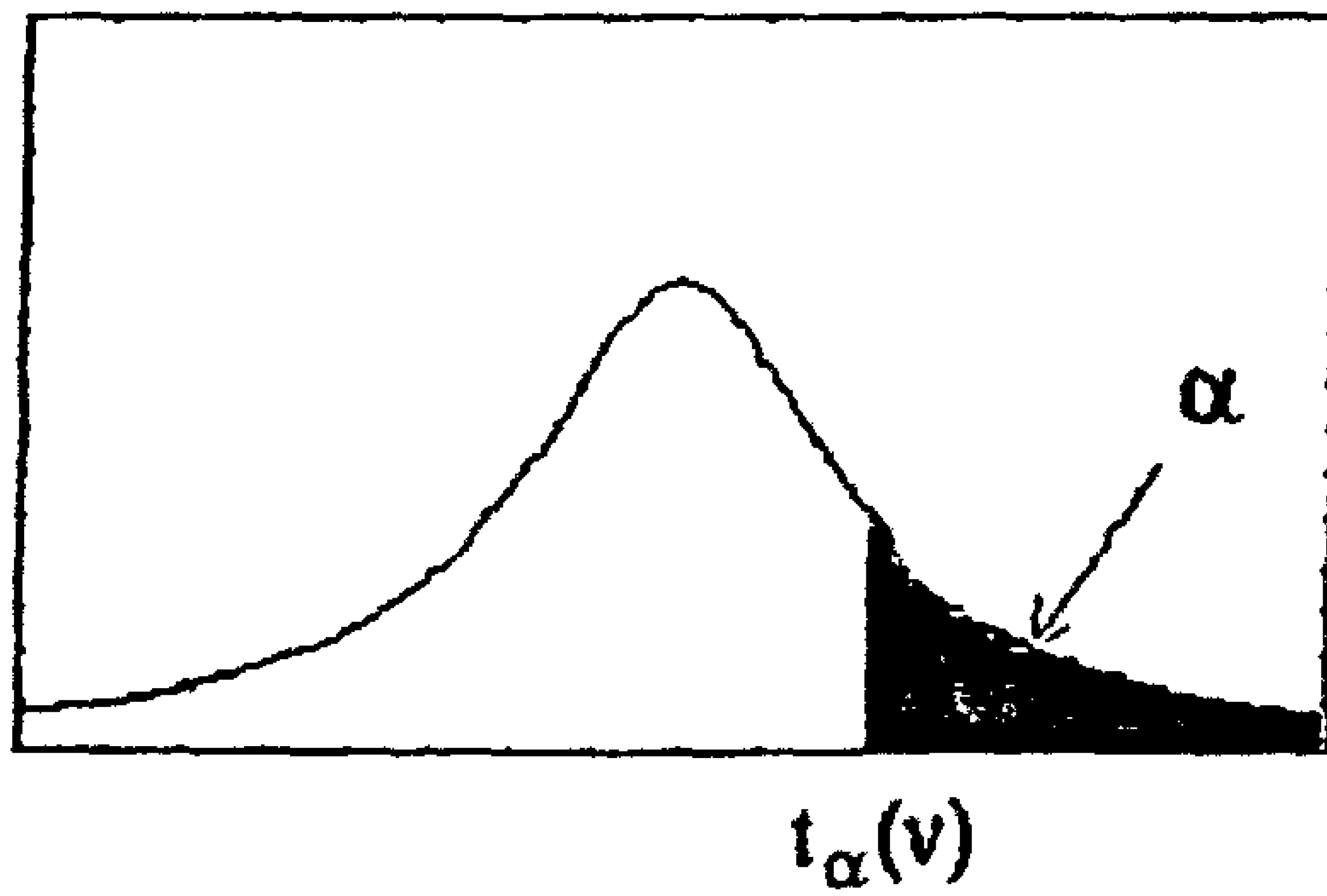
التكامل في الصيغة الأخيرة للدالة $f(t)$ يساوي 1 وذلك لأن ما بداخل التكامل يمثل دالة كثافة الاحتمال لتوزيع مربع كاي بدرجات حرية $\nu + 1$. وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال تم الحصول عليها كما هي معطاة فى النظرية .

يعتبر العدد ν هو معلمة توزيع t . شكل (٨-٩) يوضح منحنيان لتوزيع t حيث $\nu = 2, 20$.



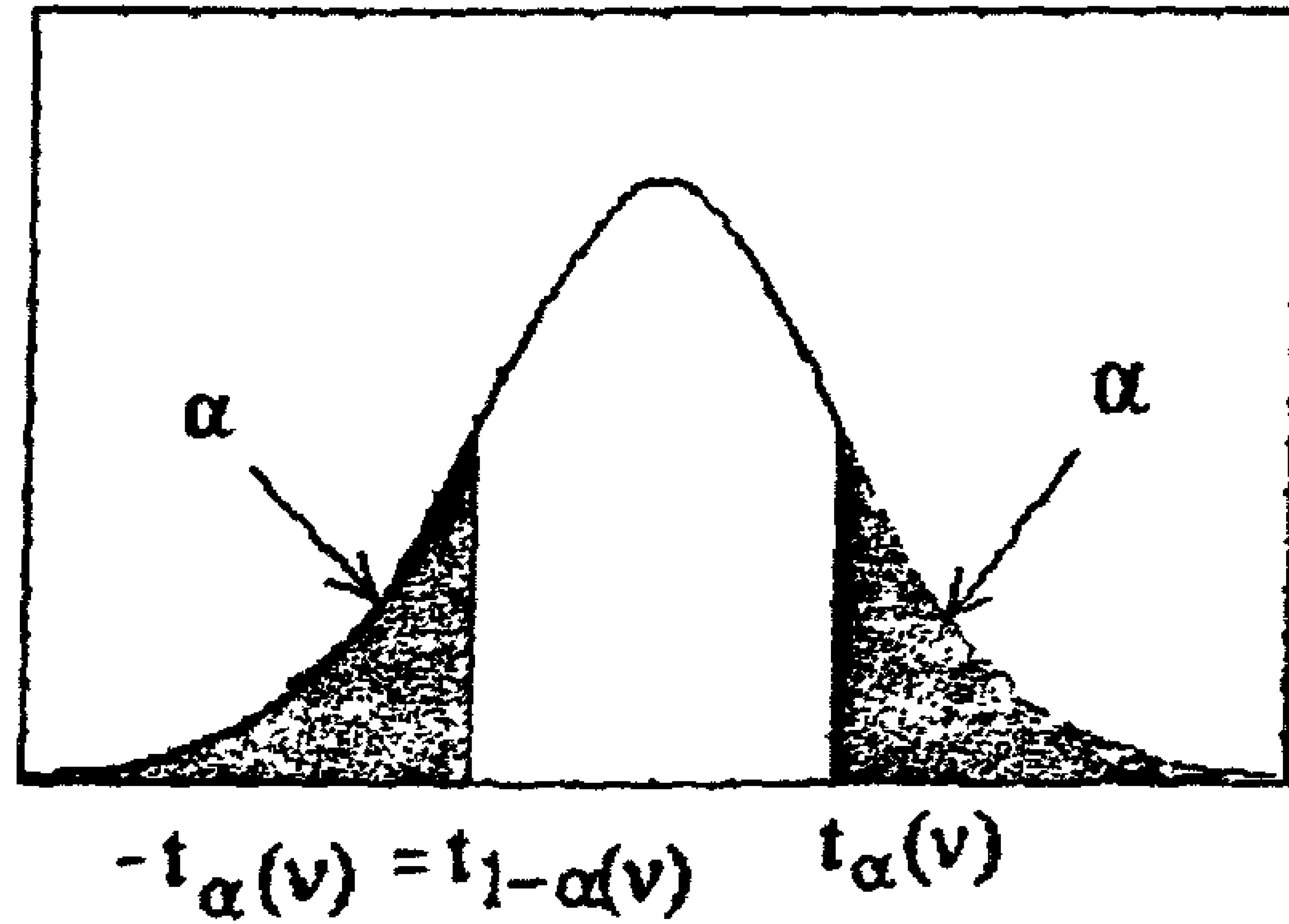
شكل (٨-٩)

عموما يكون من الصعوبة تقدير دالة التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي T . جدول توزيع t في ملحق (٩) يعطي $P[T \geq t_{\alpha}(v)] = \alpha$ كما هو موضح في شكل (٨-١٠) حيث $t_{\alpha}(v)$ ترمز لقيمة t التي توجد على المحور الأفقي تحت منحنى توزيع t بدرجات حرية v والتي المساحة على يمينها قدرها α.



شكل (٨-١٠)

الجدول في ملحق (٩) يعطي قيم $t_{\alpha}(v)$ التي تناظر الاحتمال α لدرجات حرية v حيث α تأخذ القيم التالية : .0005, .001, .005, .01, .025, .05, .10. ودرجات الحرية تأخذ القيم من $v = 1$ إلى $v = \infty$. يوضح الصف الثاني من الجدول قيم α والعمود الأول من الشمال قيم درجات الحرية v. أما محتويات الجدول فهي القيم $t_{\alpha}(v)$. ولأن المنحنى متماثل فإن $t_{1-\alpha}(v) = -t_{\alpha}(v)$ كما هو موضح فى شكل (٨-١١).



شكل (٨-١١)

مثال (٨-٤٨) أوجد (أ) $t_{.005}(15)$ ،
(ب) $t_{.995}(15)$.

الحل .

(أ) بالبحث فى جدول توزيع t فى ملحق (٩) عند تقاطع الصف $v = 15$ والعمود $\alpha = .005$ نجد أن $t_{.005}(15) = 2.947$.

(ب) باستخدام خاصية التماثل لمنحنى توزيع t فإن :

$t_{.995}(15) = -t_{.005}(15)$ أي أن $t_{.995}(15) = -2.947$.

مثال (٨- ٤٩) أوجد قيمة α حيث:

$$t_{\alpha}(16) = -1.746$$

الحل :

حيث أن قيمة t سالبة فإنها تقع فى الذيل الأيسر من توزيـع t وباسـتخدام خاصيـة التماثل لمنحنى توزيع t فإن :

$$t_{1-\alpha}(16) = -t_{\alpha}(16) = 1.746$$

ومن جدول توزيع t فى ملحق (٩) فإن $1-\alpha = .05$ ومنها $\alpha = .95$.

مثال (٨-٥٠) إذا كان T متغيراً عشوائياً له توزيع t بدرجات حرية $\nu = 7$ أوجد :

(أ) $P[T \leq 1.415]$　　(ب) $P[T \leq -1.415]$

(ج) $P[-1.895 < T < 1.415)$

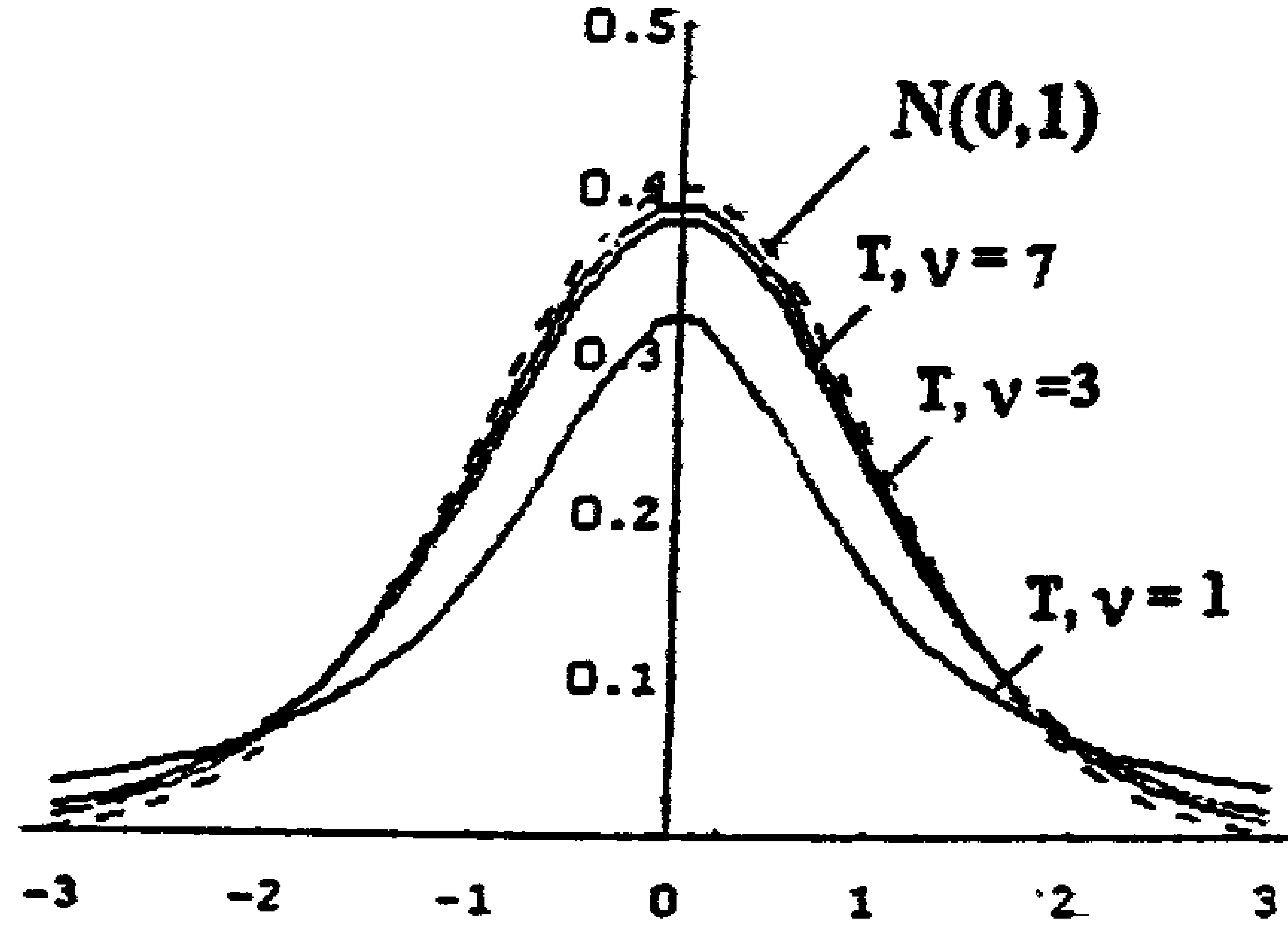
الحل :

(أ) $P[T \leq 1.415] = 1 - P(T > 1.415) = 1 - 0.1 = 0.9$

(ب) $P[T \leq -1.415] = P[T > 1.415] = .01$

(ج) $P[-1.895 < T < 1.415] = 1 - P(T > 1.415) - P(T > 1.895)$
$= 1 - 0.1 - .05 = .85$.

يلاحظ أن المنحنى لدالة كثافة احتمال T متماثل حول العمود المقام عنـد $t = 0$ ويشـبه كثيرا منحنى داله كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي Z الذي يتبع التوزيع الطبيعـي القياسـي . شكل (٨-١٢) يوضح ثلاثة المنحنيات للمتغير T بدرجات حرية $\nu = 1,3,7$ ومنحـني Z . يلاحظ من شكل (٨-١٢) أن ذيل توزيع t اوسع من التوزيع الطبيعي .



شكل (٨-١٢)

لخاصية التماثل لتوزيع t عند t = 0 فإننا نتوقع أن متوسط التوزيع لابد وأن يساوي صفر ، أي أن $E(T) = 0$ عندما $\nu \geq 2$. عندما $\nu = 1$ يصبح التوزيع t هو توزيع كوشي ويمكن إثبات أن المتوسط غير موجود (عندما $\nu = 1$) كما ذكرنا في الفصل السادس. تباين T هو :

$$Var(T) = E(T^2) = \frac{\nu}{\nu - 2} \qquad \nu \geq 3.$$

التباين غير معروف عندما $\nu = 1$, $\nu = 2$. وعلى الرغم من صعوبة الحصول على العزوم من دالة كثافة احتمال المتغير T فإنه يمكن الحصول عليها باستخدام تعريف T واستقلالية Z , W :

$$E(T) = E(Z)E\left(\sqrt{\frac{\nu}{W}}\right), E(T^2) = E(Z^2)E\left(\frac{\nu}{W}\right).$$

مثال (٨-٥١) أوجد $t_{0.10}(7)$ ، $t_{0.9}(7)$ ، $t_{0.025}(7)$.

الحل :

من جدول توزيع t في ملحق (٩) فإن :

$t_{0.025}(7) = 2.365$, $t_{0.9}(7) = -t_{0.10}(7) = -1.415$, $t_{0.10}(7) = 1.415$

مثال (٨-٥٢) إذا كان T له توزيع t بتباين 5/4 أوجد :

$P[-1.812 \le T \le 1.812].$

الحل : التباين هنا هو $\nu/(\nu-2) = 5/4$, $\nu = 10$ وعلى ذلك :

$P[-1.812 \le T \le 1.812] = .90$

حيث $t_{.95}(10) = -1.812$, $t_{0.05}(10) = 1.812$ والمستخرجة من جدول توزيع t في ملحق (٩) .

مثال (٨-٥٣) إذا كان T له توزيع t بدرجات حرية $\nu = 14$ أوجد الثابت c بحيث أن $P[|T| < c] = 0.90$.

الحل :

من جدول توزيع t فى الملحق (٩) نجد أن $P(T \ge 1.761) = 0.05$ وعلى ذلك $c = 1.761 = t_{0.05}(14)$.

نظرية (٨-١٠) إذا كان W , V متغيرين عشوائيين مستقلين كل منهما يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية ν_1 , ν_2 على التوالي ، فإن :

$$F = \frac{W/\nu_1}{V/\nu_2}$$

له توزيع F بدرجات حرية ν_1 , ν_2 . دالة كثافة احتمال F سوف تكون على الشكل :

$$f(u) = \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2)/2](\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2} u^{\nu_1/2-1}}{\Gamma(\nu_1/2)\ \Gamma(\nu_2/2)\ (1+\nu_1 u/\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}} \qquad 0 < u < \infty.$$

البرهان :

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين W , V تكون على الشكل :

$$g(w,v)=\frac{w^{v_1/2-1}\bar{e}^{w/2}}{\Gamma(v_1/2)\ 2^{v_1/2}}\ \frac{v^{v_2/2-1}\ \bar{e}^{v/2}}{\Gamma(v_2/2)\ 2^{v_2/2}}\qquad 0<w<\infty,\ 0<v<\infty.$$

سوف تستخدم الرمز U بدلا من F لمنع استخدام f كرمز لمتغير . دالة التوزيع التجميعي $F(u)=P[U\le u)$ للمتغير F هي :

$$F(u)=P\left(\frac{W/v_1}{V/v_2}\le u\right)=P\left(W\le\frac{v_1}{v_2}uV\right)$$
$$=\int_0^{\infty}\int_0^{(v_1/v_2)uv} g(w,v)\ dw\ dv.$$

وعلى ذلك :

$$F(u)=\frac{1}{\Gamma(v_1/2)\ \Gamma(v_2/2)}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{(v_1/v_2)vu}\frac{w^{v_1/2-1}\ \bar{e}^{w/2}}{2^{(v_1+v_2)/2}}\ dw\right]$$
$$\times v^{v_2/2-1}\ \bar{e}^{v/2}dv.$$

دالة كثافة الاحتمال للمتغير $F=U$ هي التفاضل لدالة التوزيع التجميعي وعلى ذلك :

$$f(u)=\frac{d\,F(u)}{du}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(v_1/2)\ \Gamma(v_2/2)}\int_0^{\infty}\frac{(v_1/v_2)vu]^{v_1/2-1}}{2^{(v_1+v_2)/2}}$$
$$\times\ \bar{e}^{(v_1/2v_2)(vu)}\left(\frac{v_1}{v_2}v\right)v^{v_2/2-1}\ \bar{e}^{v/2}dv.$$

$$=\frac{(v_1/v_2)^{v_1/2}\ u^{v_1/2-1}}{\Gamma(v_1/2)\ \Gamma(v_2/2)}\int_0^{\infty}\frac{v^{(v_1+v_2)/2-1}}{2^{(v_1+v_2)/2}}\ \bar{e}^{(v/2)[1+(v_1/v_2)u]}\ dv.$$

وبوضع $y = \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} u\right) v$ في التكامل فإن :

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{1 + (\nu_1 / \nu_2) u}.$$

وعلى ذلك :

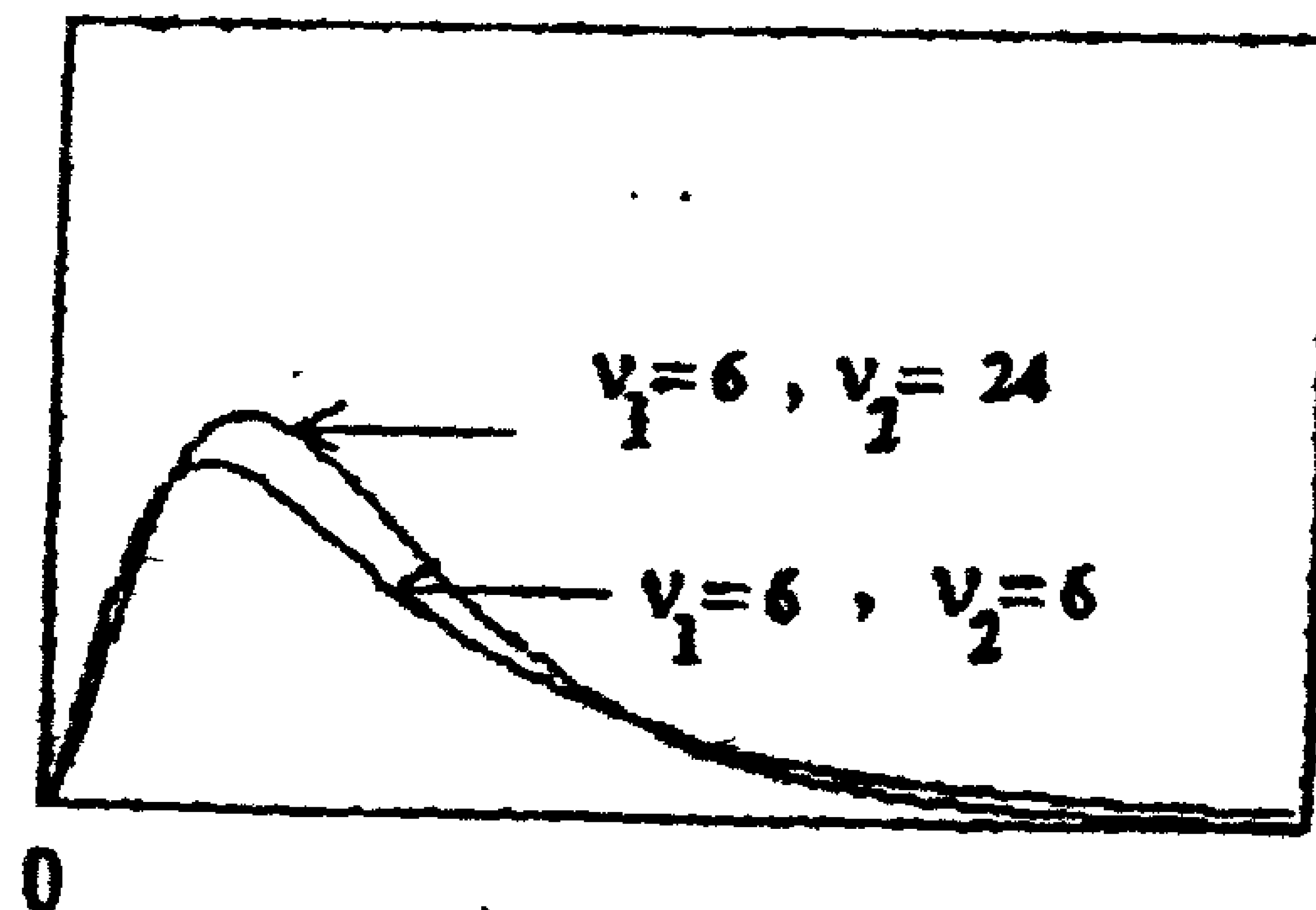
$$f(u) = \frac{(\nu_1 / \nu_2)^{\nu_1 / 2} \Gamma((\nu_1 + \nu_2)/2) u^{\nu_1 / 2 - 1}}{\Gamma(\nu_1 / 2) \Gamma(\nu_2 / 2) (1 + (\nu_1 u / \nu_2))^{(\nu_1 + \nu_2)/2}}$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{y^{(\nu_1 + \nu_2)/2 - 1} \, \bar{e}^{y/2}}{\Gamma[(\nu_1 + \nu_2)/2] 2^{(\nu_1 + \nu_2)/2}} dy.$$

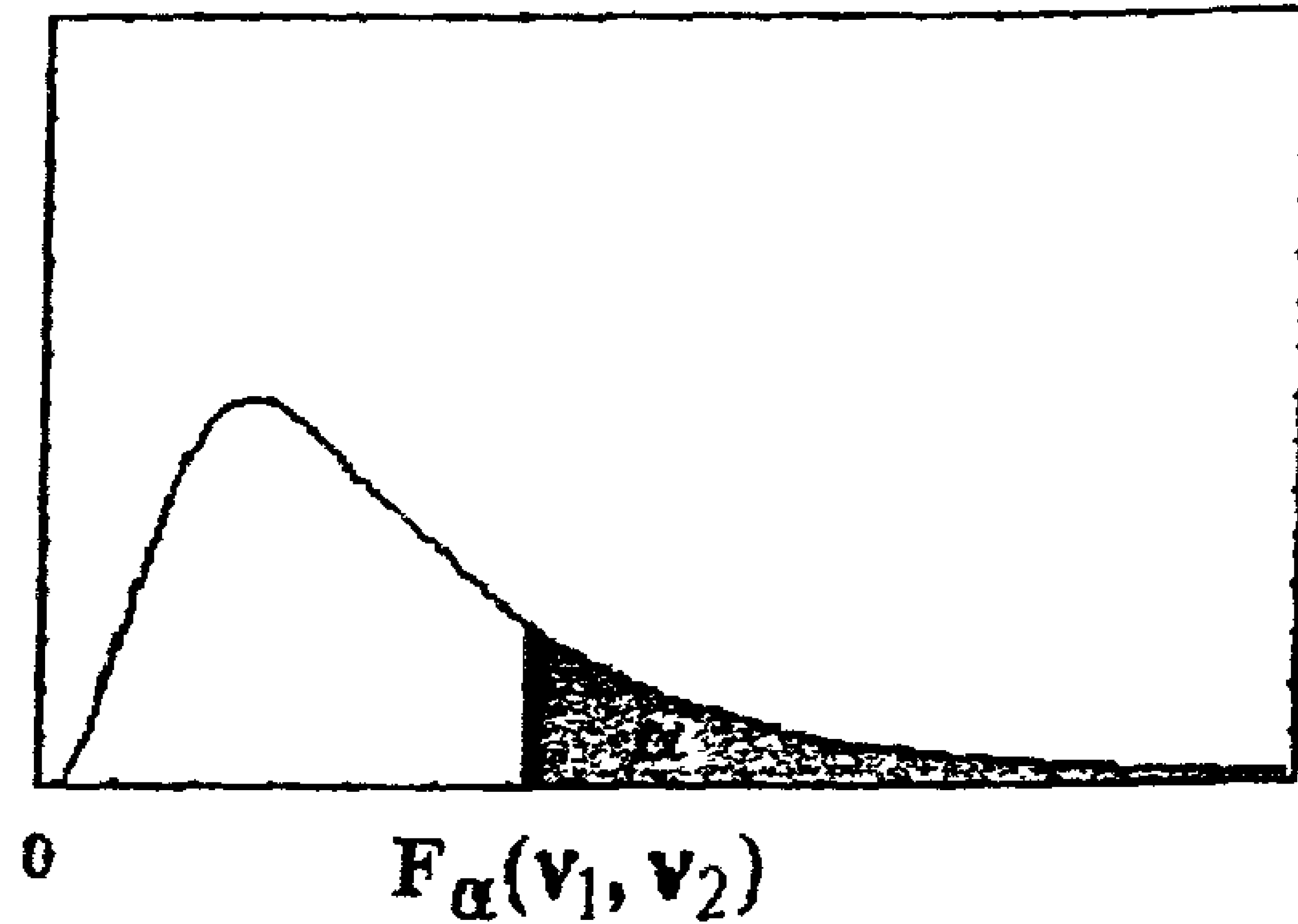
التكامل في الصيغة الأخيرة للدالة $f(u)$ يساوي 1 وذلك لأن المقدار داخل التكامل هو دالة كثافة احتمال توزيع مربع كاي بدرجات حرية $\nu_1 + \nu_2$. وعلى ذلك دالة كثافة احتمال $f(u)$ هي نفسها في النظرية .

يعتمد توزيع F على معلمتين ν_1, ν_2 بنفس الترتيب . المعلمة الأولى ν_1 هي عدد درجات حرية البسط والثانية ν_2 هي عدد درجات حرية المقام . شكل (٨-١٣) يوضح منحنيات لدالة كثافة احتمال توزيع F لزوجين من درجات الحرية .

شكل (٨-١٣)



بفرض أن $F_\alpha(v_1, v_2)$ ترمز لقيمة من قيم المتغير العشوائي F على المحور الأفقي تحت منحنى توزيع F بدرجات حرية v_1 و v_2 والتي تكون المساحة علــــى يمينــها تســاوى α والموضحة فى شكل (٨-١٤). أى أن $\alpha = P\{F \geq F_\alpha(v_1, v_2)\}$.



شكل (٨-١٤)

لاستخراج قيم $F_\alpha(v_1, v_2)$ يوجد جدولان فى ملحق (١٠) وملحق (١١) ، الأول عنــــد $\alpha = .05$ والآخر عند $\alpha = .01$ وفى كل منهما يكون الصف الأول لقيم v_1 والعمـــود الأول لقيم v_2 أما محتويات الجدول فهو لقيم $F_\alpha(v_1, v_2)$. على سبيل المثال من جدول توزيع F نلاحظ أن :

$$F_{.01}(5,7) = 7.46 \quad , \quad F_{.05}(1,4) = 7.71$$

$$F_{.01}(9,10) = 4.94 \quad , \quad F_{.05}(4,1) = 224.6$$

يمكن إثبات أن :

$$E(F)=\frac{\nu_2}{\nu_2-2} \quad , \quad Var(F)=\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}.$$

للتحقق من الصيغتين ، وباستخدام استقلال V , W فى تعريف F ، فإن :

$$E(F)=E\left(\frac{W}{\nu_1}\right)E\left(\frac{\nu_2}{V}\right), E(F^2)=E\left(\frac{W}{\nu_1}\right)^2 E\left(\frac{\nu_2}{V}\right)^2 .$$

مثال (٨-٥٤) إذا كان توزيع F (سوف نرمز له بالرمز $F(\nu_1,\nu_2)$) بدرجات حرية ν_1,ν_2 أوجد :

(أ) $F_{.05}(7,8)$ (ب) $F_{.01}(9,4)$

الحل :

(أ) عندما $\nu_1=7,\ \nu_2=8$ فإن $F_{.05}(7,8)=3.5$.

(ب) عندما $\nu_1=9,\ \nu_2=4$ فإن $F_{0.01}(9,4)=14.66$.

لاستخدام جدول توزيع F فى إيجاد $F_{1-\alpha}(\nu_1,\nu_2)$ فإننا نحتاج إلي الآتي . بما أن : $F=(W/\nu_1)/(V/\nu_2)$ حيث V , W متغيرات مستقلة تتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية ν_2,ν_1 على التوالي وعلى ذلك $1/F=(V/\nu_2)/(W/\nu_1)$ والذي له توزيع : $F(\nu_2,\nu_1)$. الآن إذا كان توزيع F هو $F(\nu_1,\nu_2)$ فإن :

$$P[F\geq F_\alpha(\nu_1,\nu_2)]=\alpha,$$

$$P\left[\frac{1}{F}\leq\frac{1}{F_\alpha(\nu_1,\nu_2)}\right]=\alpha.$$

المكمل لـ $\{1/F\leq 1/F_\alpha(\nu_1,\nu_2)\}$ هو $\{1/F>1/F_\alpha(\nu_1,\nu_2)\}$ وعلى ذلك :

$$P\left[\frac{1}{F}>\frac{1}{F_\alpha(\nu_1,\nu_2)}\right]=1-\alpha \qquad (٨-١٣)$$

وحيث أن توزيع 1/F هو $F_\alpha(\nu_2,\nu_1)$ ، ومن تعريف $F_{1-\alpha}(\nu_2,\nu_1)$ ، فإن :

$$P\left[\frac{1}{F} > F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)\right] = 1 - \alpha \qquad (٨-١٤)$$

من المعادلتين (٨-١٣) و (٨-١٤) نجد أن :

$$F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1) = \frac{1}{F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)} \qquad (٨-١٥)$$

وعلى سبيل المثال قيمة $F_{.95}(7,12)$ هي :

$$F_{.95}(7,12) = \frac{1}{F_{.05}(12,7)} = \frac{1}{3.57} = 0.2801$$

حيث أن $F_{.05}(12 , 7)$ مستخرجة من جدول توزيع F في ملحق (١٠) عند مستوى معنوية $\alpha = .05$ ودرجات حرية $\nu_1 = 12,\ \nu_2 = 7$.

مثال (٨-٥٥) إذا كان توزيع F هو $F(4,9)$ فإن الثابتين c , d بحيث أن :

$$P(F \le c) = .01 \quad , \quad P(F \le d) = .05$$

يمكن الحصول عليهما كما يأتي :

$$c = F_{0.99}(4,9) = \frac{1}{F_{.01}(9,4)} = \frac{1}{14.66} = .0682 \ ,$$

$$d = F_{0.95}(4,9) = \frac{1}{F_{.05}(9,4)} = \frac{1}{6.00} = .1667.$$

وأكثر من ذلك إذا كان F هو $F(6,9)$ فإن :

$$P(F \le .2439) = P\left(\frac{1}{F} \ge \frac{1}{0.2439}\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{F} \ge 4.100\right) = .05$$

وذلك لأن توزيع 1 / F هو (9,6) F .

توزيع أصغر وأكبر القيم Distribution of Minimum and Maximum

إذا كـانت X_1 , X_2, ..., X_n متغـيرات عشـوائية معطـاة . ليكـن $Y_n = \max[X_1,...,X_n]$, $Y_1 = \min[X_1,...,X_n]$ أي أن Y_1 هي أصغر القيم فى هذه المتغيرات العشوائية بينما Y_n هي أكبر القيم فى هذه المتغيرات العشوائية والمطلوب توزيع كـل من Y_1 , Y_n بما أن :

$$F_{Y_n}(y) = P[Y_n \le y] = P[X_1 \le y, X_2 \le y,..., X_n \le y]$$

وذلك لأن أكبر المتغيرات X_1 , X_2, ..., X_n أقل من أو تساوي y إذا وفقط إذا كـانت كـل المتغيرات أقل من أو تسـاوي y. بفرض أن المتغيرات X_1 , ..., X_n مستقلة فإن :

$$P[X_1 \le y,..., X_n \le y] = \prod_{i=1}^{n} [P[X_i \le y] = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(y),$$

وعلى ذلك فإن توزيع Y_n يمكن التعبير عنه بدلالة دوال التوزيع الهامشية للمتغيرات : X_1, ..., X_n. بفرض أن المتغيرات X_1 , ..., X_n متطابقة التوزيع (أي لها نفس التوزيـع) ، ليكن $F_X(.)$ فإن :

$$\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(y) = [F_X(y)]^n .$$

وبذلك نكون برهنا النظرية التالية.

نظرية (٨- ١١) إذا كانت X_1 , ..., X_n متغيرات عشوائية مستقلة وإذا كان $Y_n = \max[X_1 , ..., X_n]$ فإن :

$$F_{Y_n}(y) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(y).$$

وإذا كانت X_n ,... , X_1 متغيرات مستقلة ومتطابقة التوزيع بدالــة توزيــع تجميعــي عامــة $F_X(.)$ فإن :

$$F_{Y_n}(y) = [F_X(y)]^n.$$

نتيجة (٨-١) إذا كانت X_n ,... , X_1 متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع من النوع المتصل بدالة كثافة احتمال عامة $f_X(.)$ ودالة توزيع تجميعي $F_X(.)$ ، فإن :

$$f_{Y_n}(y) = n[F_X(y)]^{n-1} f_X(y).$$

البرهان :

$$f_{Y_n}(y) = \frac{dF_{Y_n}(y)}{dy} = n[F_X(y)]^{n-1} f_X(y).$$

بنفس الشكل :

$$F_{Y_1}(y) = P(Y_1 \le y] = 1 - P[Y_1 > y] = 1 - P[X_1 > y, ..., X_n > y].$$

وذلك لأن Y_1 أكبر من y إذا وفقط إذا كان كل $X_i > y$. وبما أن $X_1,...,X_n$ مستقلة فإن

$$1 - P[X_1 > y, ..., X_n > y] = 1 - \prod_{i=1}^{n} P[X_i > y] = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(y)].$$

وإذا كانت المتغيرات $X_1,..., X_n$ متطابقة التوزيع فإن :

$$1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(y)] = 1 - [1 - F_X(y)]^n.$$

وبذلك نكون برهنا النظرية التالية .

نظريــــة (٨-١٢) إذا كـــــانت $X_1,..., X_n$ متغـــــيرات مســـــتقلة وإذا كـــــان $Y_1 = \min[X_1, ..., X_n]$ فإن :

$$F_{Y_1}(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(y)].$$

وإذا كان $X_1,..., X_n$ متطابقة التوزيع بدالة توزيع تجميعي عامة $F_X(.)$ فإن :

$$F_{Y_1}(y) = 1 - [1 - F_X(y)]^n.$$

نتيجة (٨-٢) إذا كانت $X_1,...,X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع بدالة كثافة احتمال عامة $f_X(.)$ ودالة توزيع تجميعي $F_X(.)$ فإن :

$$f_{Y_1}(y) = n[1 - F_X(y)]^{n-1} f_X(y).$$

البرهان :

$$f_{Y_1}(y) = \frac{dF_{Y_1}(y)}{dy} = n[1 - F_X(y)]^{n-1} f_X(y).$$

مثال (٨- ٥٦) بفرض أن عمر مصباح كهربائي من نوع ما يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 100 ساعة . بفرض أن 10 مصابيح جهزت للعمل فى آن واحد ما هو توزيع العمر للمصباح الذي يفشل أولا وأوجد $E(Y_1)$ ؟ .

الحل :

إذا كان X_i يمثل العمر للمصباح رقم i فإن $Y_1 = \min(X_1, ..., X_{10})$ وتحت فرض أن المتغيرات $X_1, ..., X_{10}$ مستقلة فإن :

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{100} \, e^{-\frac{1}{100}x} \qquad 0 < x < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

ودالة التوزيع التجميعي هي :

$$F_{X_i}(x) = 1 - e^{-\frac{1}{100}x} \qquad x > 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

وعلى ذلك :

$$f_{Y_1}(y) = 10 \left(e^{\frac{1}{100}y}\right)^{10-1} \left(\frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}y}\right) = \frac{10}{100} e^{-\frac{10}{100}y} \qquad y > 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

أي أن $f_{Y_1}(y)$ دالة كثافة احتمال أسية بمعلمة $\lambda = \frac{1}{10}$ وعلى ذلك :

$$E(Y_1) = 1/\lambda = 10.$$

مثال (٨-٥٧) إذا كانت $X_1, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة متطابقة التوزيع تمثل الضرائب التي تم تحصيلها من n من الأشخاص وإذا كان X_i , $i = 1, \ldots, n$ تتبع توزيع بارتيو بدالة كثافة احتمال :

$$f_X(x) = \frac{\theta(x_0)^{\theta}}{x^{\theta+1}} \qquad x > x_0$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي $Y_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_1 سوف تكون على الشكل :

$$f_{Y_1}(y) = -n\theta\left(\frac{x_0}{y}\right)^{n\theta-1}\left(\frac{-x_0}{y^2}\right) \qquad y > x_0$$

$$= 0 \ \text{elsewhere .}$$

أي أن :

$$f_{Y_1}(y) = \frac{n\theta x_0^{n\theta}}{y^{n\theta+1}} \qquad y > x_0$$
$$= \text{elsewhere.}$$

مثال (٨-٥٨) إذا كان $X_1, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع حيث $X_i \sim UNIF(0,1)$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_n هي :

$$f_{Y_n}(y) = n \ y^{n-1} \qquad 0 < y < 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

(ب) طريقة التحويـــل

التحويلات المشتركة لمتغيرات عشوائية متصلة يمكن الحصول عليها بتعميم صيغة جاكوبيان التحويل . بفرض ، على سبيل المثال ، أن $u_1(x, x_2)$, $u_2(x_1 , x_2)$ دالتين وإذا كان x_1 , x_2 الحلين الوحيدين للتحويلة ($y_2 = u_2 (x_1, x_2$, $y_1 = u_1 (x_1 , x_2)$ وعلى ذلك فــإن جاكوبيان التحويل يعرف بالمحدد التالي :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} .$$

مثال (٨-٥٩) لتحويل x_1 , x_2 إلي x_1 و x_2 x_1 فإن $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1 x_2$ الحل هو : $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2/y_1$. جاكوبيان التحويل هو :

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -y_2 / y_1^2 & 1/y_1 \end{vmatrix} = 1/y_1 .$$

ليكــن X متجــه مــن المتغــيرات العشــوائية المتصلــة عددهــا k . وبفـــــرض أن $u_1(x), u_2(x),..., u_k(x)$ دوال عددها k فى x . علــى ذلــك $Y_i = u_i(X)$ ، حيــث $i = 1,..., k$ تعرف متجه آخر من المتغيرات العشوائية ($Y = (Y_1, Y_2,..., Y_k$ وللســـهولة $Y = u(X)$. لتحويل لمتغيرات $y = u(x)$ التي عددها k بحل وحيد ($x = (x_1 ,x_2,..., x_k$ فإن جاكوبيان التحويل سوف يكون هو المحدد لمصفوفة ، من الرتبة k x k ، لمشتقات جزئية :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_k}{\partial y_1} & & \cdots & \frac{\partial x_k}{\partial y_k} \end{vmatrix}$$

يمكن تعميم نظرية (٨-٥) كالتالي :

نظرية (٨-١٣) بفرض أن $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ متجه من المتغيرات العشوائية المتصلة بدالة كثافة احتمال مشتركة $f_X(x_1, x_2, \ldots, x_k) > 0$ على الفضاء R وإذا كان :

$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ يعرف بتحويلة تناظرية :

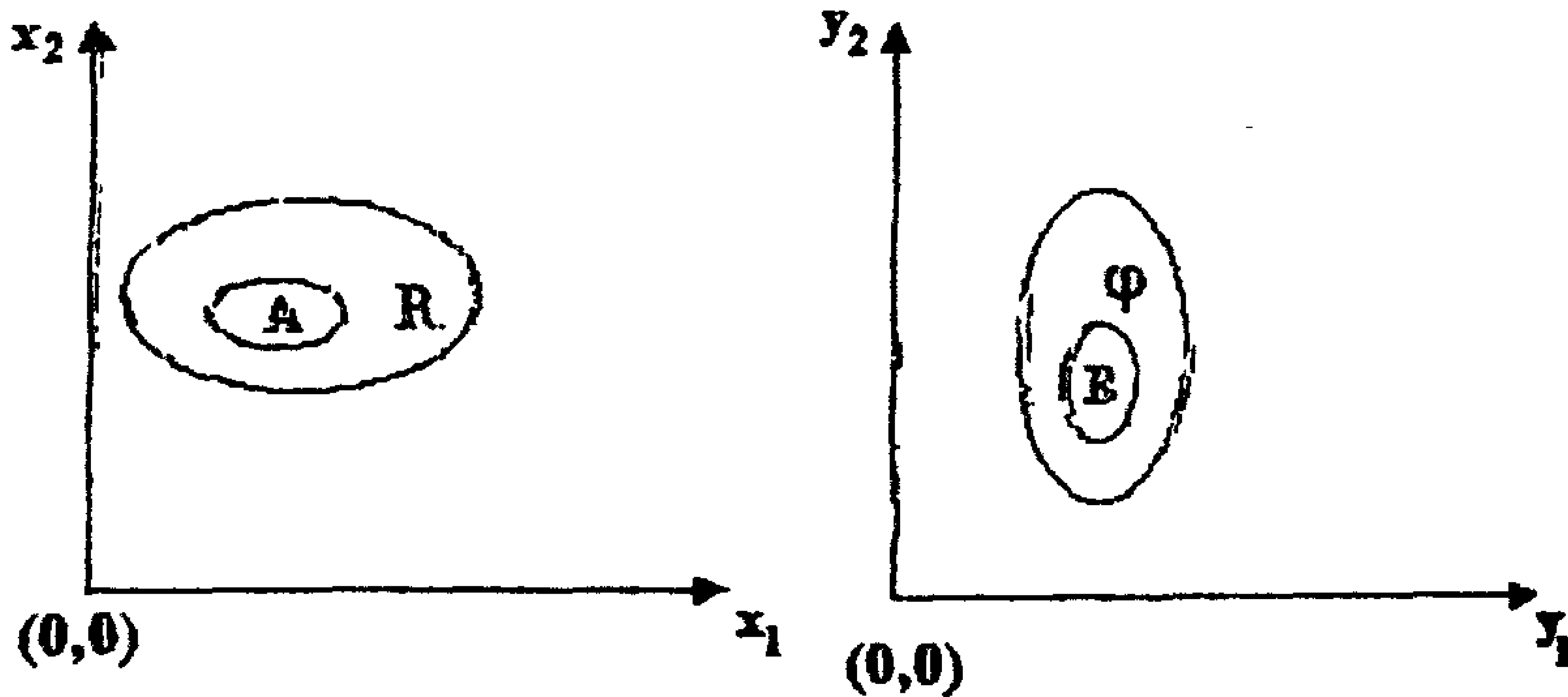
$$Y_i = u_i(X_1, X_2, \ldots, X_k) \qquad i = 1,2,\ldots,k.$$

إذا كان جاكوبيان التحويل متصل ولا يساوي صفر على مدى التحويل ، فـــإن دالـــة كثافـــة الاحتمال المشتركة للمتغير Y هي :

$$f_Y(y_1,\ldots,y_k) = f_X(x_1, \ldots, x_k)\ |J| \qquad (١٦-٨)$$

حيث $x = (x_1, \ldots, x_k)$ هو الحل للمعادلة $y = u(x)$.

البرهان : بفرض أن φ هو المدى للتحويلة $y = u(x)$ بمعكوس $x = w(y)$. بفــرض أن $B \subset \varphi$ وإذا كانت A تمثل الفئة من كل النقاط $x = (x_1, \ldots, x_k)$ والتي تطابق B تحـــت التحويلة وعلى ذلك : (انظر شكل (٨-١٥) د $k=2$



شكل (٨-١٥)

$$P[Y \in B] = \int_B \cdots \int f_Y(y_1,\ldots,y_k)\,dy_1\ldots dy_k$$

$$= \int_A \cdots \int f_X(x_1,...,x_k)dx_1...dx_k.$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل :

$$\int_B \cdots \int f_X[(w_1(y_1,...,y_k),..., w_k(y_1,...,y_k)]|J|dy_1,...,dy_k.$$

والتي تعتبر نتيجة للنظرية القياسية لتحويل المتغيرات فى التكامل . ولأنها صحيحة لأي فئة $B \subset \varphi$ اختيارية فإننا نحصل على المعادلة (٨-١٦) .

مثال (٨-٦٠) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين حيث :

$X_i \sim UNIF(0,1)$, $i = 1,2$ وبفرض أن $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$

أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 , Y_2.

الحل :

$$R = \{x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$$

عندما $y_1 = x_1 + x_2$ و $y_2 = x_1 - x_2$ فإن الحل هو $x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$. عندما :

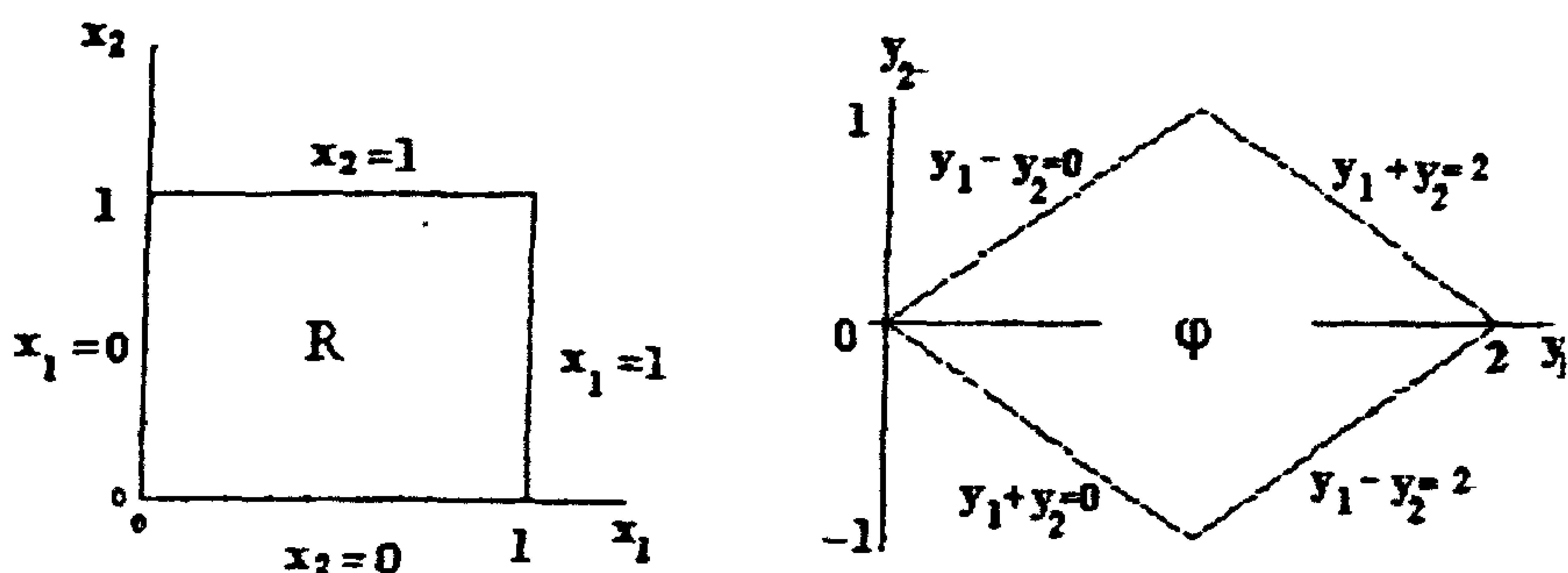
$$x_1 = 0 \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = 0$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = 1$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{2} = 0$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{2} = 1$$

وعلى ذلك $\varphi = \{y_1, y_2) \mid 0 < y_1 + y_2 < 2, 0 < y_1 - y_2 < 2\}$ كما هو موضح من شكل (٨-١٦) .



شكل (٨-١٦)

وعلى ذلك جاكوبيان التحويل هو :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين Y_2 , Y_1 هي :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}[(w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2))]|J|$$

$$= f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right)|J| = \frac{1}{2} \qquad y_1, y_2 \in \varphi$$

$= 0$ **elsewhere .**

مثال (٨-٦١) إذا كان X_2 , X_1 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim N(0,1)$, $i = 1,2$ إذا كان $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 / X_2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_2 , Y_1 وأوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_2 .

الحل :

$$R = \{(x_1, x_2) | -\infty < x_1 < \infty \ , \ -\infty < x_2 < \infty\}$$

عندما $y_2 = x_1 / x_2$, $y_1 = x_1 + x_2$ فإن الحل هو :

$$w_2(y_2) = x_2 = \frac{y_1}{1+y_2} \quad , \quad w_1(y_1) = x_1 = \frac{y_1 y_2}{1+y_2}$$

جاكوبيان التحويل هي :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{y_2}{1+y_2} & \frac{y_1}{(1+y_2)^2} \\ \frac{1}{1+y_2} & \frac{-y_1}{(1+y_2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{y_1(y_2+1)}{(1+y_2)^3} = -\frac{y_1}{(1+y_2)^2}.$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 , Y_2 هي :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(w_1(y_1), w_2(y_2))\,|J|$$

$$= f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1}{1+y_2}, \frac{y_1 y_2}{1+y_2}\right)|J|$$

$$= \frac{|y_1|}{(1+y_2)^2} \ \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y_1 y_2)^2}{(1+y_2)^2} + \frac{y_1^2}{(1+y_2)^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ \frac{|y_1|}{(1+y_2)^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(1+y_2^2)y_1^2}{(1+y_2)^2}\right] .$$

لايجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير Y_2 فإننا تكامل على y_1 أي أن :

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)\,dy_1,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{(1+y_2)^2}\int_{-\infty}^{\infty} |y_1| \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(1+y_2^2)y_1^2}{(1+y_2)^2}\right] dy_1.$$

ليكن :

$$u = \frac{1}{2}\frac{(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\;y_1^2$$

فإن :

$$du = \frac{(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\;y_1 dy_1.$$

وعلى ذلك :

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(1+y_2)^2}\;\frac{(1+y_2)^2}{1+y_2^2}(2)\int_0^{\infty} e^{-u}\;du$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y_2^2} \qquad -\infty < y_2 < \infty,$$

أي أن Y_2 يتبع توزيع كوشي .وهذا يعني أن النسبة بين متغيرين عشوائيين مستقلين يتبعان $N(0,1)$ لها توزيع كوشي.

مثال (٨-٦٢) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim \chi^2_{(2)}$, $i = 1,2$ وإذا كان $Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_1 .

الحل :

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1, X_2 هي :

$$f(x_1)f(x_2) = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{x_1+x_2}{2}\right) \qquad 0 < x_1 < \infty,\; 0 < x_2 < \infty$$

$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

بوضع $Y_2 = X_2$ فإن $y_1 = ½ (x_1 - x_2)$, $y_2 = x_2$ أو $x_1 = 2y_1 + y_2$, $x_2 = y_2$
تعرف تحويلة تناظرية من الفضاء :

$$R = \{(x_1, x_2) | \ 0 < x_1 < \infty, 0 < x_2 < \infty\}$$

إلي الفضاء :

$$\varphi = \{(y_1, y_2) | \ -2y_1 < y_2 \text{ and } -\infty < y_1 < \infty, 0 < y_2 < \infty\}.$$

جاكوبيان التحويل هو :

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 , Y_2 هي :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{|2|}{4} \ \bar{e}^{y_1 - y_2}, \qquad y_1, y_2 \in \varphi$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

وعلى ذلك فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_1 هي :

$$f_{Y_1}(y) = \int_{-2y_1}^{\infty} \frac{1}{2} \ \bar{e}^{-y_1 - y_2} dy_2 = \frac{1}{2} \ e^{y_1}, \qquad -\infty < y_1 < 0$$
$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} \ \bar{e}^{y_1 - y_2} dy_2 = \frac{1}{2} \ e^{-y_1}, \qquad 0 \le y_1 < \infty$$

أو :

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2} \ \bar{e}^{| y_1 |}, -\infty < y_1 < \infty.$$

مثال (٨-٦٣) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim \exp(1)$, $i = 1,2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغيرين :
$Y_2 = X_1 / (X_1 + X_2)$ و $Y_1 = X_1 + X_2$ وأثبت أن Y_2 , Y_1 مستقلين .

الحل :

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1 , X_2 هما :

$$f(x_1,x_2)=f(x_1)\ f(x_2)=\bar{e}^{x_1-x_2} \qquad ,0<x_1<\infty,0<x_2<\infty$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

عندما :

$$y_1=u_1(x_1,x_2)=x_1+x_2, y_2=u_2(x_1,x_2)=\frac{x_1}{x_1+x_2}$$

فـــإن : $x_1=y_1y_2 , x_2=y_1(1-y_2)$ وعلى ذلك :

$$J=\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix}=-y_1\neq 0.$$

وعلى ذلك فإن داله كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 , Y_2 هي :

$$g(y_1,y_2)=y_1\ \bar{e}^{y_1} \qquad 0<y_1<\infty,\ 0<y_2<1$$
$$=0 \ \text{elsewhere}.$$

دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغيرين Y_1 , Y_2 على التوالي هي

$$g_1(y_1)=\int_0^1 y_1\ \bar{e}^{y_1}dy_2=y_1\bar{e}^{y_1} \qquad 0<y_1<\infty,$$

$$g_2(y_2)=\int_0^\infty y_1\ \bar{e}^{y_1}dy_1=\Gamma(2)=1 \qquad ,\ 0<y_2<1.$$

من الواضح أن Y_1 , Y_2 مستقلين .

مثال (٨-٦٤) فى هذا المثال سوف نحصل على نتيجة مهمة . ليكن X_1 , X_2 متغيرين مستقلين من النوع المتصل بدالة كثافة احتمال مشتركة $f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$ موجبة في فضاء البعد الثاني . ليكن $Y_1=u_1(X_1)$ دالة فى X_1 فقط و $Y_2=u(X_2)$ دالـة فى X_2 فقـط . وعلى ذلك التحويل $y_1=u_1(x_1)$ و $y_2=u_2(x_2)$ يعرف تحويله تناظرية من R إلي φ في البعد الثاني . وعلى ذلك $x_1=w_1(y_1) , x_2=w_2(y_2)$ ومنها :

$$J = \begin{vmatrix} w'_1(y_1) & 0 \\ 0 & w'_2(y_2) \end{vmatrix} = w'_1(y_1)w'_2(y_2) \neq 0.$$

حيث $w'_2(y_2) = \frac{dw_2(y_2)}{dy_2}$ ، $w'_1(y_1) = \frac{dw_1(y_1)}{dy_1}$.

وعلى ذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين Y_2 , Y_1 هي :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1}(w_1(y_1)) f_{X_2}(w_2(y_2)) . w'_1(y_1) w'_2(y_2)$$
$$,(y_1,y_2) \in \varphi.$$

من المعروف أنه فى حالة متغير عشوائي فى البعد الأول فإن دالة كثافة الاحتمال لكل من Y_1 Y_2 يمكن الحصول عليها كالتالي :

$$f_{Y_1}(y_1) = f_{X_1}(w_1(y_1)) |w'_1(y_1)| ,$$
$$f_{Y_2}(y_2) = f_{X_2}(w_2(y_2)) |w'_2(y_2)| ,$$

وعلى ذلك :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)$$

ومنها يمكن إثبات أنه إذا كان X_2 , X_1 متغيرين عشوائيين مستقلين فإن :

$Y_1 = u_1(X_1)$ $Y_2 = u_2(X_2)$ أيضا متغيرين عشوائيين مستقلين . النتيجة صحيحة لمتغيرين عشوائيين من النوع المتقطع .

مثال (٨-٦٥) إذا كان X_2 , X_1 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim GAM(1/\theta, k)$, $i = 1,2$. أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين $Y_2 = X_1 / X_2$, $Y_1 = X_1 + X_2$ وأوجد دوالهما الهامشية .

الحل :

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_2 , X_1 هي :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

$$=\frac{1}{[\Gamma(k)]^2}\theta^{2k}\ x_1^{k-1}\ x_2^{k-1}\ \bar{e}^{\theta x_1}\ \bar{e}^{\theta x_2}\ ,$$

$$0<x_1<\infty,0<x_2<\infty$$

$$=\ 0\ \text{elsewhere}\ .$$

بما أن $y_1=x_1+x_2\ ,\ y_2=x_1/x_2$ تحويلة تناظرية فإن :

$$x_2=w_2(y_1,y_2)=\frac{y_1}{1+y_2},x_1=w_1(y_1,y_2)=\frac{y_1y_2}{1+y_2}$$

جاكوبيان التحويل هي :

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{y_2}{1+y_2} & \dfrac{y_1}{(1+y_2)^2}\\ \dfrac{1}{1+y_2} & \dfrac{-y_1}{(1+y_2)^2}\end{vmatrix}=-\frac{y_1}{(1+y_2)^2}.$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين $Y_1\ ,\ Y_2$ هى :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(w_1,(y_1,y_2),w_2(y_1,y_2))\left|\ J\ \right|$$

$$=f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1y_2}{1+y_2},\frac{y_1}{1+y_2}\right)\left|\ J\ \right|$$

أي أن :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\frac{y_1}{(1+y_2)^2}\cdot\ \frac{\theta^{2k}y_1^{2k-1}y_2^{k-1}\bar{e}^{\theta y_1}}{(1+y_2)^{2k-2}[\Gamma(k)]^2}$$

$$,0<\frac{y_1y_2}{1+y_2}<\infty\ ,\ 0<\frac{y_1}{1+y_2}<\infty,$$

$$=0\ \ \text{elsewhere.}$$

أي أن :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\frac{\theta^{2k}y_1^{2k-1}\bar{e}^{\theta y_1}}{\Gamma(2k)}\;\frac{y_2^{k-1}}{B(k,k)(1+y_2)^{2k}}$$
$$,\ 0<y_1<\infty\ ,\quad 0<y_2<\infty,$$
$$=0\ \text{elsewhere}.$$

بما أن $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 / X_2$ لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة والتي تساوي حاصل ضرب دوالهما الهامشية وعلى ذلك Y_1 , Y_2 مستقلين حيث :

$$f_{Y_1}(y_1)=\frac{\theta^{2k}y_1^{2k-1}\bar{e}^{\theta y_1}}{\Gamma(2k)}\quad 0<y_1<\infty,$$

$$f_{Y_2}(y_2)=\frac{y_2^{k-1}}{B(k,k)(1+y_2)^{2k}}\quad 0<y_2<\infty,$$

مثال (٨-٦٦) إذا كان X_1 , X_2 , X_3 لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\theta^3\exp[-\theta(x_1+x_2+x_3)]\qquad 0<x_1,x_2,x_3<\infty$$
$$=0\ \text{elsewhere}.$$

وإذا كان

$$Y_1=\frac{X_2}{X_1+X_2,},\ Y_2=\frac{X_3}{X_1+X_2+X_3},\ Y_3=X_1+X_2+X_3$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات Y_1 , Y_2 , Y_3 .

الحل : سوف نحل هذا المثال على خطوتين . أولا سوف نوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات :

$$Z_1=\frac{X_2}{X_1+X_2,},\ Z_2=X_1+X_2\ ,\ \ Z_3=X_3$$

تذكر أن : $z_1 = x_2(x_1 + x_2)^{-1}$, $z_2 = x_1 + x_2$, $z_3 = x_3$ إذا وفقط إذا كان :

$$x_1 = w_1(z_1, z_2, z_3) = z_2(1 - z_1) \ , \ x_2 = w_2(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 \ .$$
$$x_3 = w_3(z_1, z_2, z_3) = z_3$$

بما أن $w_3(z_1 , z_2 , z_3)$ يشتمل فقط على z_3 أي أن $z_3 = x_3$ (تحويلة وحيده) وعلى ذلك لحساب جاكوبيان التحويل فإن التحويل من (x_1 , x_2 , x_3) إلي (z_1 , z_2 , z_3) يمكن أن يعامل باعتبار أن z_3 ثابت أي أننا نعتبر التحويل من (x_1 , x_2) إلي (z_1 , z_2) للمتغيرات Z_1 , Z_2 , Z_3 . جاكوبيان التحويل هو :

$$J = \begin{vmatrix} -z_2 & (1 - z_1) \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix} = -z_2$$

وبتطبيق المعادلة (٨-١٦) نحصل على :

$$f_{Z_1, Z_2, Z_3}(z_1, z_2, z_3) = f_{X_1, X_2, X_3}(z_2(1 - z_1), z_1 z_2, z_3) \left| \ J \ \right|$$

أي أن :

$$f_{Z_1, Z_2, Z_3}(z_1, z_2, z_3) = \theta^3 z_2 \exp[-\theta(z_2 + z_3)] \qquad , \qquad 0 < z_2(1 - z_1), z_1 z_2, z_3 < \infty$$
$$= 0 \ \text{ elsewhere.}$$

الآن ، سوف نحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات Y_1 , Y_2 , Y_3 حيث :

$$Y_1 = Z_1 = \frac{X_2}{X_1 + X_2}, Y_2 = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{X_3}{X_1 + X_2 + X_3},$$
$$Y_3 = Z_2 + Z_3 = X_1 + X_2 + X_3 .$$

بما أن $y_3 = z_2 + z_3$, $y_2 = z_3(z_2 + z_3)^{-1}$, $y_1 = z_1$ إذا وفقط إذا كان :

$$z_1 = w_1(y_1, y_2, y_3) = y_1, z_2 = w_2(y_1, y_2 y_3) = y_3(1 - y_2),$$
$$z_3 = w_3(y_1, y_2, y_3) = y_2 y_3,$$

وبما أن $w_1(y_1, y_2, y_3)$ يعتمد فقط علي y_1 فإن جاكوبيان التحويل للمتغيرات Y_1 , Y_2, Y_3 هو :

$$J = \begin{vmatrix} -y_3 & (1-y_2) \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix} = (-y_3).$$

وبتطبيق المعادلة (٨-١٦) مرة أخرى نحصل علي :

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) = f_{Z_1,Z_2,Z_3}(y_1, y_3(1-y_2), y_2 y_3)\ |J|.$$

أي أن :

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \theta^3 y_3^2 (1-y_2) \bar{e}^{\theta y_3} \qquad 0 < y_1, y_2 < 1, 0 < y_3 < \infty$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

مثال (٨-٦٧) <u>تحويله بوكس ميللر</u> **<u>Box – Muller Transformation</u>**

إذا كان X متغيرا عشوائيا حيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإنه يكون من الصعب توليد (محاكـاة) مشاهدة من X باستخدام التحويلة $Y = F(X)$ حيث $Y \sim UNIF(0,1)$, $F(x)$ هـي دالـة التوزيع التجميعي للمتغير X والذي يتبع التوزيع الطبيعي ويرجع سبب ذلك لعدم وجود صيغـة محددة لدالة التوزيع التجميعي الطبيعي . بفـرض أن $X_i \sim UNIF(0,1)$, $i = 1,2$ وبفـرض التحويلة .

$$Z_1 = \sqrt{-2\ln X_1}\,Cos(2\pi X_1) \ , \ Z_2 = \sqrt{-2\ln X_1}\,Sin(2\pi X_2)$$

واللذان يكافئان :

$$X_1 = \exp\left(-\frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2}\right) = \bar{e}^{q/2},$$
$$X_2 = \frac{1}{2\pi} \text{Arc}\tan\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right),$$

جاكوبيان التحويل هو :

$$J = \begin{vmatrix} -z_1 \bar{e}^{q/2} & -z_2 \bar{e}^{q/2} \\ \dfrac{-z_2}{2\pi(z_1^2 + z_2^2)} & \dfrac{z_1}{2\pi(z_1^2 + z_2^2)} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2\pi} \bar{e}^{q/2}.$$

وبما أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1, X_2 هي :

$$f(x_1, x_2) = 1 \qquad 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Z_1, Z_2 هي :

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = (1)\left| -\frac{1}{2\pi}\bar{e}^{q/2} \right|$$
$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}\right), -\infty < z_1 < \infty, -\infty < z_2 < \infty.$$

وعلي ذلك فإنه يمكن من متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المنتظم في الفترة (0,1) توليد متغيرين عشوائيين مستقلين يتبعان التوزيع الطبيعي القياسي من خلال تحويله بوكس – ميللر .

مثال (٨–٦٨) إذا كان $X_1, X_2, ..., X_{k+1}$ متغيرات عشوائية مستقلة حيث $X_i \sim GAM(1, \alpha_i)$, $i = 1,2,...,k+1$ أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات .

$$Y_i = \frac{X_i}{X_1 + X_2 + ... + X_{k+1}}, i = 1,2,...,k,$$
$$Y_{k+1} = X_1 + X_2 + ... + X_{k+1}$$

الحل : دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $X_1, X_2, ..., X_{k+1}$ هي :

$$f(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} x_i^{\alpha_i - 1} \bar{e}^{x_i} \qquad 0 < x_i < \infty,$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

وعلى ذلك التحويلة تناظرية هي :

$$x_1 = y_1 y_{k+1}, ..., x_k = y_k y_{k+1}, x_{k+1} = y_{k+1}(1 - y_1 - . - y_k)$$

وجاكوبيان التحويل هو :

$$J = \begin{vmatrix} y_{k+1} & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ 0 & y_{k+1} & \cdots & 0 & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{k+1} & y_k \\ -y_{k+1} & -y_{k+1} & \cdots & -y_{k+1} & (1 - y_1 - \cdots - y_k) \end{vmatrix} = y_{k+1}^k,$$

وعلي ذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2,\dots, Y_{k+1}$ هي :

$$\frac{y_{k+1}^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k+1}-1} y_1^{\alpha_1-1}\dots y_k^{\alpha_k-1}(1-y_1-\dots-y_k)^{\alpha_{k+1}-1} e^{-y_{k+1}}}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_k)\ \Gamma(\alpha_{k+1})},$$

$$0<y_i, i=1,\dots,k,$$

$$y_1+\dots+y_k<1\ ,\ 0<y_{k+1}<\infty.$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2,\dots, Y_k$ هي :

$$g(y_1,y_2,\dots y_k)=\frac{\Gamma(\alpha_1)+\dots+\alpha_{k+1})}{\Gamma(\alpha_1)\dots\ \Gamma(\alpha_{k+1})}y_1^{\alpha_1-1}\dots y_k^{\alpha_k-1}(1-y_1-\dots-y_k)^{\alpha_{k+1}-1},$$

$$0<y_i, i=1,\dots,k,\ y_1+\dots+y_k<1.$$

أي توزيع Dirichlet بمعالم $\alpha_1,\dots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$. عندما $k=1$ نحصل علي توزيع بيتا .

مثال (٨-٦٩) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_2 \sim GAM(\theta,k_2), X_1 \sim GAM(\theta,k_1)$ وإذا كان $Y_1=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ $Y_2=X_1+X_2$. أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_1 وأثبت أن Y_1, Y_2 مستقلين .

الحل :

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1, X_2 هي :

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{\Gamma k_1\Gamma k_2\theta^{k_1+k_2}}\ x_1^{k_1-1}\ x_2^{k_2-1}\exp\left(-\frac{x_1+x_2}{\theta}\right),$$

$$0<x_1<\infty, 0<x_2<\infty$$

العلاقة $y_1=\dfrac{x_1}{x_1+x_2}$, $y_2=x_1+x_2$ تكافئ العلاقة :

$x_1=y_1\,y_2, x_2=y_2-y_1y_2$. جاكوبيان التحويل هو :

$$J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1-y_1 \end{vmatrix} = y_2(1-y_1) + y_1 y_2 = y_2.$$

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_2 , Y_1 هي :

$$f(y_1, y_2) = \frac{y_2}{\Gamma k_1 \ \Gamma k_2 \theta^{k_1+k_2}} (y_1 y_2)^{k_1-1} (y_2 - y_1 y_2)^{k_2-1} \ e^{-y_2/\theta},$$

$$0 < y_1 < 1 \quad , \ 0 < y_2 < \infty$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير Y_1 هي :

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{\Gamma(k_1 + k_2)}{\Gamma(k_1) \ \Gamma(k_2)} \ y_1^{k_1-1}(1-y_1)^{k_2-1} \qquad 0 < y_1 < 1.$$

أي أن Y_1 يتبع توزيع بيتا بمعلمتين k_1 , k_2 . ومن الواضح أن Y_1, Y_2 مستقلين يمكن تعميم نظرية (٨-١٣) للتحويلات الغير تناظرية في صيغة شبيهة بالمعادلة (٨-١٠) خصوصا إذا كانت المعادلة $y = u(x)$ يمكن حلها بصورة وحيدة علي كل فئة من التجزئة : $A_1, A_2, \ldots$ وذلك للحصول علي حل وحيد $x = x_j$ أو $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{kj})$ وإذا كانت هذه الحلول لها جاكوبيان متصل في التحويل ولا يساوى صفر فإن :

$$f_Y(y_1, \ldots, y_k) = \sum_j f_X(x_{1j}, \ldots, x_{kj}) \left| J_j \right| \qquad (١٧-٨)$$

حيث J_j هو جاكوبيان التحويل للحل علي الفئة A_j.

مثال (٨-٧٠) إذا كان X_1, X_2 متغيرين مستقلين حيث $X_i \sim N(0,1)$, $i=1,2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغيرين $Y_1 = \frac{X_1+X_2}{2}$, $Y_2 = \frac{(X_1-X_2)^2}{2}$.

الحل : التحويلة هنا غير تناظرية وعلي ذلك الفضاء

$$R = \{(x_1,x_2) | \ -\infty < x_1 < \infty \ , \ -\infty < x_2 < \infty\}$$

للمتغيرين العشوائيين X_1 , X_2 هو الاتحاد للفئتين المتنافيتين

$A_1 = \{(x_1,x_2) | \ x_2 > x_1\}$, $A_2 = \{(x_1,x_2) | \ x_2 < x_1\}$ والتحويلة سوف تكون تناظرية علي كل فئة $i=1,2, A_i$ علي ذلك :

$$|J_1| = |J_2| = 1/\sqrt{2y_2}$$

في الحقيقة المجموعتين من التحويلات العكسية هما :

$$x_{11} = (y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}}),$$
$$x_{21} = (y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}}),$$

و

$$x_{12} = (y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}}),$$
$$x_{22} = (y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}}),$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 , Y_2 هي :

$$g(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{(y_1-\sqrt{y_2/2})^2}{2} - \frac{(y_1+\sqrt{y_2/2})^2}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2y_2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{(y_1+\sqrt{y_2/2})^2}{2}-\frac{(y_1-\sqrt{y_2/2})^2}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2y_2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{2\pi}}\ \bar{e}^{y_1^2}\ \frac{1}{\sqrt{2}\ \Gamma(1/2)}\ y_2^{1/2-1}\ \bar{e}^{y_2/2}$$

$$-\infty<y_1<\infty\ ,\ 0<y_2<\infty.$$

يتضح من صيغة $g(y_1 , y_2)$ أن $Y_1 \sim N(0,\frac{1}{2})$, $Y_2 \sim \chi^2(1)$

التحويلة الخطية الثنائيـــة **Bivariate Linear Transformation**

ليكن X_1 , X_2 عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$. التحويلة الخطية الثنائية من X_1 , X_2 إلي Y_1 , Y_2 تأخذ الشكل التالي :

$$Y_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 \qquad (١٨-٨)$$
$$Y_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2$$

بحل المعادلة (٨-١٨) بالنسبة للمتغيرين X_1 , X_2 بدلالة Y_1 , Y_2 فإن :

$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$, $i=1,2$ إذا وفقط إذا كان :

$x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}\ y_2$, $i=1,2$ حيث :

$$b_{11}=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\ ,\ b_{12}=\frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

$$b_{21}=\frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\ ,\ b_{22}=\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

حيث $a_{11}\ a_{22}-a_{12}\ a_{21}\neq 0$

وعلي ذلك جاكوبيان التحويـــل هو :

$$J=(b_{11})(b_{22})-(b_{12})(b_{21})$$
$$=\frac{(a_{22})(a_{11})-(-a_{12})(-a_{21})}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 , Y_2 هي :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(b_{11}y_1+b_{12}y_2\ ,b_{21}y_1+b_{22}y_2)$$

$$\times\frac{1}{|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|} \qquad (٨-١٩)$$

علي سبيل المثال إذا كان اهتمامنا بالوسط الحسابي $Y_1=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ والفرق $Y_2=X_1-X_2$ فإن :

$$a_{21}=-a_{22}=1\ ,\ a_{11}=a_{12}=\frac{1}{2}\ ,\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-1,$$

$$b_{11}=1\ ,\ b_{12}=\frac{1}{2}\ ,\ b_{21}=1\ ,\ b_{22}=-\frac{1}{2}$$

وعلي ذلك من (٨-١٩) فإن :

$$f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(y_1+\frac{1}{2}y_2,y_1-\frac{1}{2}y_2)$$

مثال (٨-٧١) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim N(0,1)$, $i=1,2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغيرين $Y_1=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ $Y_2=X_1-X_2$ وأوجد دوالهما الهامشية .

الحل :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)=\frac{\exp[-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2]}{2\pi}$$

وعلي ذلك :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(y_1+\frac{1}{2}y_2,y_1-\frac{1}{2}y_2)$$

$$= \frac{\exp\{-\frac{1}{2}[(y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2 + (y_1 - \frac{1}{2}y_2)^2]\}}{2\pi}$$

$$= \frac{\exp\{-\frac{1}{2}[(2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2)\}}{2\pi}$$

$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(2y_1^2)\right]\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}y_2^2)\right]\right\}.$$

وعلي ذلك :

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} ex[-\frac{1}{2}(2y_1^2)],$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} ex[-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}y_2^2)],$$

وعلي ذلك :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{Y_1}(y_1)\ f_{Y_2}(y_2)$$

أي أن Y_1 , Y_2 مستقلان حيث أن $Y_1 \sim N(0,\frac{1}{2})$, $Y_2 \sim N(0,2)$.

التحويلات الخطية المتعددة Multivariate Linear Transformations

التحويلات لمتغيرات عشوائية عددها k والتي تستخدم كثيراً في التطبيقات تكون علي الشكل التالي :

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1k} X_k \\ Y_2 &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2k} X_k \\ &\vdots \\ Y_k &= a_{k1} X_1 + a_{k2} X_2 + \ldots + a_{kk} X_k \end{aligned}$$

(٨-٢٠)

يقال لهذه التحويلة أنها غير شاذة non singular إذا وجدت الثوابت : $b_{ij}, i = 1,2,\ldots,k, j = 1,2,\ldots,k$ بحيث أن $a_{i\ell} x_\ell, i = 1,2,\ldots,k$ $y_i = \sum_{\ell=1}^{k}$ إذا و فقط إذا كان :

$$x_i = \sum_{\ell=1}^{k} b_{i\ell} y_\ell$$

في هذه الحالة فإن :

$x_i = w_i(y_1, y_2, ..., y_k) = \sum_{\ell=1}^{k} b_{i\ell} y_\ell, i = 1,2,...,k,$ حيث J يمثل المحدد للمصفوفة B والتي عنصرها رقم (i, j) هي b_{ij} . من نظرية المصفوفات فإن المحدد B هو المعكوس للمحدد الخاص بمصفوفة المعاملات A للتحويلة الخطية حيث العنصر رقم (i, j) للمصفوفة A هو a_{ij} في المعادلة (٨-٢٠) . ليكن det A يرمز لمحدد المصفوفة A . دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, ..., Y_K$ ، بتطبيق المعادلة (٨-١٦) ، هي :

$$f_{Y_1,Y_2,...,Y_k}(y) = f_{X_1,X_2,...,X_k}\left(\sum_{\ell=1}^{k} b_{1\ell} y_\ell, \sum_{\ell=1}^{k} b_{2\ell} y_\ell, ..., \sum_{\ell=1}^{k} b_{k\ell} y_\ell\right)\frac{1}{|\det A|}.$$

(٨-٢١)

حيث $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$.

مثال (٨-٢٢) بفرض أن X_1 , X_2 , X_3 متغيرات عشوائية مستقلة حيث: $X_i \sim N(0,1)$, $i = 1,2,3$. بفرض التحويلة الخطية التالية :

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3 \ , \ Y_2 = X_1 - X_2 \ , \ Y_3 = X_2 - X_3.$$

وعلي ذلك :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$x_1 = \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{3}, x_2 = \frac{y_1 - y_2 + y_3}{3}, x_3 = \frac{y_1 - y_2 - 2y_3}{3}$$

وعلي ذلك :

$$|\det A| = 3.$$

بما أن X_1 , X_2 , X_3 مستقلين حيث $X_i \sim N(0,1)$, $i = 1,2,3$ فإن :

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \bar{e}^{\frac{1}{2}x_i{}^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \bar{e}^{\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_2^2)},$$

$$-\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty.$$

(٢٢-٨)

بتطبيق المعادلة (٨-٢١) نجد أنه لكل قيم y_1 , y_2 , y_3 الحقيقة فإن :

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \bar{e}^{\frac{1}{2}Q(y_1,y_2,y_3)} \qquad (٢٣-٨)$$

حيث :

$$Q(y_1,y_2,y_3) = \left(\frac{y_1+2y_2+y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1-y_2+y_3}{3}\right)^2$$

$$+\left(\frac{y_1-y_2-2y_3}{3}\right)^3$$

$$= \frac{y_1^2}{3} + \frac{2y_2^2}{3} + \frac{2y_3^2}{3} + \frac{2y_2y_3}{3}$$

من (٨-٢٣) نجد أن $Y_1 \sim N(0,3)$ وأن $(Y_2 , Y_3) \sim$ BVN $(0,0,(2,2,-0.5))$

وأن Y_1 مستقلة عن كل من Y_3 , Y_2 .

يمكن الحصول علي (٨-٢٣) علي عدة خطوات . أولا ، بعمل التحويلة

$$Z_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Z_2 = X_1 - X_2 \quad , \quad Z_3 = X_3$$

حيث $x_3 = w_3(z_1 , z_2 , z_3) = z_3$ دالة في z_3 فقط وأن :

$$x_1 = w_1(z_1,z_2,z_3) = \frac{z_1+z_2}{2}, x_2 = w_2(z_1,z_2,z_3) = \frac{z_1-z_2}{2},$$

$$J = -\frac{1}{2}$$

من (٨-١٦) و (٨-٢٢) فإن :

$$f_{Z_1,Z_2,Z_3}(z_1,z_2,z_3)=\exp(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^3\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)^2+z_3^2\right\}\cdot|-1/2|$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)+z_3^2\right]\right\},$$

$$-\infty<z_1,z_2,z_3<\infty \quad (٨-٢٤)$$

الآن نحصل علي التحويلة

$$Y_1=Z_1+Z_3=(X_1+X_2)+X_3,\ Y_2=Z_2=X_1-X_2,$$
$$Y_3=\frac{Z_1-Z_2-2Z_3}{2}=X_2-X_3,$$

حيث : $z_2 = w_2(y_1,y_2,y_3)=y_2$ دالة فقط في y_2 و

$$z_1=w_1(y_1,y_2,y_3)=\frac{2y_1+y_2+2y_3}{3},$$
$$z_3=w_3(y_1,y_2,y_3)=\frac{y_1-y_2-2y_3}{3},$$
$$J=-\frac{3}{2}$$

وباستخدام (٨-١٦) و (٨-٢٤) فإن :

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{2}{3}\right)\ \frac{1}{2(\sqrt{2\pi})^3}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2y_1+y_2+2y_3}{3}\right)^2+\frac{1}{2}y_2^2+\left(\frac{y_1-y_2-2y_3}{3}\right)^2\right]\right\}$$

والتي بعد عمليات اختصار تؤدي إلي المعادلة (٨-٢٣) .

المجاميع والمجاميع المرجحة لمتغيرات عشوائية

Sums and Weighted Sums of random Variables .

يعتبر المجموع المرجح $Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i$ من أكثر التحويلات التناظرية شيوعاً وذلك لعدد k من المتغيرات العشوائية $X_1 , X_2 , ... , X_k$. علي سبيل المثال في التجارب الإحصائية من نوع قبل وبعد ، فإن القياسات X_2, X_1 تجرى قبل وبعد المعالجة تحت الدراسة . الفرق : $Y = X_2 - X_1$ يستخدم كمقياس للتغير المتحصل عليه من المعالجة . أيضا الدرجة النهائية لمقرر ما هي $Y = 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_4$ حيث X_1 , X_2 تمثل درجات أعمال السنة و X_3 تمثل الواجبات المنزلية و X_4 الدرجة النهائية . أيضا إذا كان $X_1 , X_2 , ..., X_k$ تمثل مشاهدات مستقلة عددها k لعينة عشوائية معطاة X فإن متوسط العينة $\sum_{i=1}^{k} (1/k)X_i$ يستخدم كتقدير لمتوسط المجتمع μ للمتغير X .

لإيجاد التوزيع لمجموع متغيرات عشوائية مرجحة $Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i$ لمتغيرات عشوائية عددها k لا بد أن نوضح أن المعامل a_i لا يساوي صفراً $(a_i \neq 0)$ وسوف نستخدم التحويلة التناظرية التالية :

$$Y_1 = Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i \quad , \quad Y_2 = X_2 , \dots , Y_k = X_k \ ,$$

حيث :

$$x_1 = w_1(y_1, y_2, ..., y_k) = \frac{y_1 - \sum_{i=2}^{k} a_i y_i}{a_1},$$

$$x_i = w_i(y_1, y_2, ..., y_k) = y_i, \ i = 2, ..., k$$

الآن يمكن الحصول علي التوزيع المتعدد للمتغيرات $Y_1 , Y_2 , ..., Y_k$ ومنها يمكن الحصول علي التوزيع الهامشي للمتغير $Y_1 = Y$. إذا كانت $X_1 , X_2 , ... , X_k$ متغيرات عشوائية بدالة كثافة احتمال مشتركة علي الشكل :

$$f_{X_1, X_2, ..., X_k}(x_1, x_2, ..., x_k) = f(x_1, x_2, ..., x_k)$$

وإذا كانت $X_1 , X_2 , ... , X_k$ متغيرات عشوائية من النوع المتقطع فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y يمكن الحصول عليها باستخدام الخطوات التي سبق أن تناولناها حيث :

$$f_Y(y) = \sum_{y_2} ... \sum_{y_k} f\left(\frac{y - \sum_{i=2}^{k} a_i y_i}{a_1}, y_2, ..., y_k \right) \qquad (٨-٢٥)$$

أما إذا كانت $X_1 , X_2 , ... , X_k$ متغيرات عشوائية من النوع المتصل فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y سوف تكون علي الشكل :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \left[f\left(\frac{y - \sum_{i=2}^{k} a_i y_i}{a_1}, y_2, ..., y_k \right) dy_2 ... dy_k \left| \frac{1}{a_1} \right| \right. \qquad (٨-٢٦)$$

مثال (٨-٧٣) إذا كان X_1 , X_2 متغيران عشوائيان يتبعان التوزيع الثلاثي الحدود بدالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2}$$

$$, x_1 , x_2 = 0, 1, ..., n ,$$
$$0 \le x_1 + x_2 \le n$$

$= 0$ elsewhere .

والمطلوب إيجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي $Y = X_1 + X_2$

الحل :

$$f_Y(y) = \sum_{y_2=0}^{n} f_{X_1,X_2}(y-y_2, y_2) = \sum_{y_2=0}^{y} f_{X_1,X_2}(y-y_2, y_2) \quad , y = 0, 1, \ldots, n$$

$= 0$ elsewhere

الآن :

$$\sum_{y_2=0}^{y} f_{X_1,X_2}(y-y_2, y_2) = \frac{n!(1-p_1-p_2)^{n-y}}{(n-y)!y!}$$

$$\times \left[\sum_{y_2=0}^{y} \frac{y!}{y_2!(y-y_2)!} p_1^{\,y-y_2} p_2^{\,y_2} \right]$$

$$= \binom{n}{y} (1-p_1-p_2)^{n-y} (p_1+p_2)^y .$$

وعلي ذلك :

$$f_Y(y) = \binom{n}{y} (p_1+p_2)^y (1-p_1-p_2)^{n-y} \qquad , y = 0, 1, \ldots, n.$$

$= 0$ elsewhere .

والتي تمثل دالة كثافة الاحتمال لتوزيع ذي الحدين بمعلمتين n , $p = p_1 + p_2$.

مثال (٨-٧٤) إذا كان X_2 , X_1 متغيران عشوائيان مستقلين حيث $X_i \sim Exp(1)$, $i = 1,2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = 2X_1 + 3X_2$.

الحل :

دالة كثافة لاحتمال المشتركة للمتغيرين كان X_2 , X_1 هي :

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)} \qquad x_1 > 0, x_2 > 0$$

$= 0$ elsewhere

وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي Y هي :

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f_{X_1,X_2}\left(\frac{y-3y_2}{2},y_2\right)dy_2\left|\frac{1}{2}\right|\right].$$

بما أن $f(x_1, x_2)=0$ إذا كانت $x_1<0$ فإن $f_Y(y)=0$ إذا كانت $y<0$. عندما $y>0$ فإن :

$$f_Y(y)=\frac{1}{2}\int_0^{y/3}\exp\left(-\frac{y-3y_2}{2}-y_2\right)dy_2+\frac{1}{2}\int_{y/3}^{\infty}0\ \ dy_2$$

$$=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}y\right)\int_0^{y/3}\exp\left(\frac{1}{2}y_2\right)dy_2$$

$$=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}y\right)\left[2\exp\left(\frac{y}{6}\right)-2\right]$$

$$=\exp\left(-\frac{y}{3}\right)-\exp\left(-\frac{y}{2}\right).$$

بالرغم من أن المعادلة (٨-٢٥) مفيدة في إيجاد توزيع المجموع المرجح لمتغيرات عشوائية من النوع المتقطع إلا أنه في كثير من الحالات يكون التطبيق المباشر هو الأسهل .

مثال (٨-٧٥) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرات عشوائية X_1, X_2, X_3 معطاة في الجدول التالي :

(x_1,x_2,x_3)	(0,0,0)	(1,0,0)	(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(0,0,1)	(1,1,1)
$f(x_1,x_2,x_3)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

إذا كان $Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

$$f_Y(1)=P[Y=1]=f_{X_1,X_2,X_3}(1,1,1)=\frac{2}{8},P[Y=0]=f_{X_1,X_2,X_3}(0,0,0)=\frac{1}{8}$$

$$f_Y(\frac{1}{3})=P\left[Y=\frac{1}{3}\right]=f_{X_1,X_2,X_3}(1,0,0)+f_{X_1,X_2,X_3}(0,1,0)+f_{X_1,X_2,X_3}(0,0,1)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{8},$$

$$f_Y(\frac{2}{3}) = P\left[Y = \frac{2}{3}\right] = f_{X_1,X_2,X_3}(1,1,0) + f_{X_1,X_2,X_3}(1,0,1)$$

$$+ f_{X_1,X_2,X_3}(0,1,1) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{2}{8}$$

وعلي ذلك، دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

y	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$P[Y=y]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$

مثال (٨-٧٦) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين ولهما نفس دالة كثافة الاحتمال التي علي الشكل :

$$f(x) = \frac{x}{6} \qquad x = 1,2,3$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X_1 + X_2$.

الحل : المتغير Y سوف يأخذ القيم $Y = 2,3,4,5,6$ ودالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

$$f_Y(2) = f_{X_1,X_2}(1,1) = f_{X_1}(1)\ f_{X_2}(1) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36},$$

$$f_Y(3) = f_{X_1,X_2}(1,2) + f_{X_1X_2}(2,1)$$

$$= f_{X_1}(1) f_{X_2}(2) + f_{X_1}(2) f_{X_2}(1)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{36},$$

$$f_Y(4) = f_{X_1,X_2}(2,2) + f_{X_1,X_2}(1,3) + f_{X_1,X_2}(3,1)$$

$$= \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{10}{36},$$

$$f_Y(5) = f_{X_1,X_2}(2,3) = f_{X_1,X_2}(3,2)$$

$$= \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{12}{36},$$

$$f_Y(6) = f_{X_1,X_2}(3,3) + f_{X_1}(3) f_{X_2}(3)$$

$$= \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{9}{36}.$$

مجموع متغيرات عشوائية :

Sums Random Variables

إذا كان $Y=\sum_{i=1}^{k} X_i$ ، كما في مثال (٨- ٧٣) ، لمتغيرات عشـــوائية $X_1,X_2,..X_k$

فإن المعادلة (٨ -٢٥) و (٨ -٢٦) تصبح كالتالي :

$$f_Y(y)=\sum_{y_2} \dots \sum_{y_k} f(y-\sum_{i=2}^{k} y_i, y_2,\dots,y_k), \qquad (٨-٢٧)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y-\sum_{i=2}^{k} y_i, y_2,\dots,y_k)\, dy_2,\dots,dy_k \qquad (٨-٢٨)$$

وذلك في الحالة المتقطعة والمتصلة علي التوالي . بالتماثل ، يوجد صيغ مشابهة للمعادلـة (٨- ٢٧) و (٨- ٢٨) حيث (المجموع أو التكـــامل يـأخذ علـى فئـات مختلفـة عددهـا ($k-1$) من y`s .علي سبيل المثال عندما $k=2$ ، أي في حالة متغيرين عشوائيين فإن :

$$f_Y(y)=\sum_{y_1} f_{X_1,X_2}(y_1, y-y_1)=\sum_{y_2} f(y-y_2, y_2), \qquad (٨-٢٩)$$

في الحالة المتقطعة وتساوى :

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(y_1, y-y_1)dy_1=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(y-y_2, y_2)dy_2 .$$

(٨-٣٠) حيث $Y=X_1+X_2$

مثال (٨-٧٧) إذا كان $X_1,X_2 \sim BVN(0,0,(1,1,\rho))$ فـــإن $-\infty < x_1, x_2 < \infty$.

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1 , X_2 هي :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right],$$

وبتطبيق (٨-٣٠) فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير $Y=X_1+X_2$ هي :

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{y_1^2-2\rho y_1(y-y_1)+(y-y_1)^2}{2(1-\rho^2)}\right]dy_1.$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{y^2}{4(1+\rho)}\right]}{\sqrt{2\pi(2)(1+\rho)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y_1-\frac{1}{2}y)^2}{(1-\rho)/2}\right]}{\sqrt{2\pi(1-\rho)/2}}dy_1$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{y^2}{2(1+\rho)}\right]}{\sqrt{2\pi(2)(1+\rho)}}\quad,\qquad -\infty<y<\infty.$$

والذي تمثل دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي $X \sim N(0, 2(1+\rho))$.

عندما X_2 , X_1 مستقلان فإن :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)\ f_{X_2}(x_2)$$

والمعادلة (٨-٢٩) تصبح :

$$f_Y(y)=\sum_{y_1} f_{X_1}(y_1)\ f_{X_2}(y-y_1)=\sum_{y_2} f_{X_1}(y-y_2)f_{X_2}(y_2). \quad (٨-٣١)$$

إذا كان X_1, X_2 متغيرين متقطعين .

وبنفس الشكل ، عندما X_2 , X_1 متغيرين عشوائيين مستقلين ، فإن (٨-٣٠) تصبح :

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y_1)f_{X_2}(y-y_1)dy_1=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-y_2)f_{X_2}(y_2)dy_2,$$

(٨-٣٢)

إذا كان X_1, X_2 متغيرين متصلين .

الصيغة (٨ - ٣١) و (٨ - ٣٢) تسمى الترافق **Convolutions** لدالة كثافة الاحتمال $f_{X_2}(x), f_{X_1}(x)$ وتعتبر صيغة شائعة جدا في حساب التوزيع الاحتمالي لمجموع لمتغيرين عشوائيين مستقلين .

مثال (٨-٧٨) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين من النوع المتقطع وإذا كان $X_1 + 1 , X_2 + 1$ متغيرين كل منهما يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة p أي أن :

$$f_{X_i}(x_i) = p(1-p)^{x_i} \qquad x_i = 0,1,2,\ldots$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير $Y = X_1 + X_2$. لإيجاد توزيع $Y = X_1 + X_2$ يمكن استخدام صيغة الترافق (دالة الترافق) في (٨-٣١) وعلي ذلك لقيم $y = 0, 1, 2, \ldots$ فإن :

$$f_Y(y) = \sum_{y_1=0}^{\infty} f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y - y_1) = \sum_{y_1=0}^{y} f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y - y_1)$$
$$= \sum_{y_1=0}^{y} p^2(1-p)^y = (y+1)p^2(1-p)^y,$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

وبما أن : $y + 1 = \binom{y+2-1}{2-1}$ فإن , $f_Y(y)$ لها دالة كثافة احتمال لتوزيع ذي الحدين السالب بمعلمة $r = 2$ و p .

مثال (٨-٧٩) إذا كان $X_1 + X_2$ متغيرين عشوائيين مستقلين كل منهما لهما التوزيع $i = 1,2, X_i \sim \chi^2_{(n_i)}$ فإن :

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{x_i^{\frac{1}{2}n_i - 1} e^{-\frac{1}{2}x_i}}{2^{\frac{1}{2}n_i}\Gamma(n_i/2)} \qquad 0 < x_i < \infty, \ i = 1,2$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

الحل :

باستخدام دالة التوافق في (٨-٣٢) وعندما $y \le 0$ فإن $f_Y(y) = 0$ وعندما $y > 0$ فإن :

$$f_Y(y) = \frac{\bar{e}^{\frac{1}{2}y}}{2^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \int_0^y (y-y_2)^{\frac{1}{2}(n_1-1)} y_2^{\frac{1}{2}n_2-1} dy_2$$

$$= \frac{y^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)-1}\ \bar{e}^{\frac{1}{2}y}}{2^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}\Gamma[(n_1+n_2)/2]} \int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{2}n_2-1}(1-z)^{\frac{1}{2}n_1-1}}{B(n_1/2, n_2/2)} dz$$

$$= \frac{y^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)-1}\ \bar{e}^{\frac{1}{2}y}}{2^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}[\Gamma(n_1+n_2)/2]}$$

وذلك بعمل التحويلة من y_2 إلي $z = y_2/y$. دالة كثافة المتغير Y هي توزيع جاما بمعلمتين $\theta = 2, k = (n_1+n_2)/2$. أي أن $Y \sim \chi^2_{(n_1+n_1)}$. يمكن الحصول علي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $X_1 + X_2 + ... + X_k$ حيث $Y = X_1 + X_2 + ... + X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة باستخدام التكرار iteratively أولا ، نستخدم دالة التوافق (٨-٣١) أو (٨-٣٢) للحصول علي توزيع $(X_1 + X_2) + X_3$. وبالاستمرار علي هذا المنوال يمكن استخدام صيغة التوافق للحصول علي التوزيعات للمتغيرين :

$(X_1 + X_2 + X_3) + X_4$ و $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + X_5$ وهكذا حتى نحصل علي توزيع $Y = (X_1 + X_2 + ... + X_{k-1}) + X_k$.

تذكر : عند تطبيق طريقة التكرار لإيجاد توزيع $Y = X_1 + X_2 + ... + X_k$ تستخدم الحقيقة أنه إذا كان $X_1, ..., X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة فإن $\sum_{i=1}^{j} X_i, X_k, ..., X_{j+1}$ مستقلين .

مثال (٨-٨٠) إذا كان $X_1, X_2, ..., X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة وإذا كانت $X_i \sim \chi^2_{(n_i)}$ حيث $i = 1,2,...,n,$ والمطلوب إيجاد توزيع $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

الحل :

من مثال (٨-٧٩) نعلم أن $X_1 + X_2 \sim \chi^2_{(n_1+n_2)}$ وعلي ذلك :

$\sum_{i=1}^{3} X_i = (X_1 + X_2) + X_3 \sim \chi^2_{(m)}$ حيث $m = (n_1+n_2) + n_3 = \sum_{i=1}^{3} n_i$ و

$\sum_{i=1}^{4} X_i = \sum_{i=1}^{3} X_i + X_4 \sim \chi^2_{(m)}$ حيث $m = \sum_{i=1}^{3} n_i + n_4 = \sum_{i=1}^{4} n_i$ وهكذا .

وأخيرا :

$Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \chi^2_{(m)}$ حيث $m = \sum_{i=1}^{k} n_i$. أي أن التوافق لمتغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع توزيع مربع كاى ، هو توزيع مربع كاى بدرجات حرية مساوية لمجموع درجات الحرية لكل منهما .

عند استخدام طريقة التكرار لإيجاد توزيع المتغير العشوائي $Y = X_1 + X_2 + X_3$ حيث $X_1 + X_2 + X_3$ متغيرات عشوائية مستقلة باستخدام (٨-٣١) و (٨-٣٢) يمكن الحصول علي الصيغة التالية :

$$f_Y(y) = \sum_{y_2} [\sum_{y_1} f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y_2 - y_1)] f_{X_3}(y - y_2)$$
$$= \sum_{y_2} \sum_{y_1} f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y_2 - y_1) f_{X_3}(y - y_2),$$

(٨- ٣٣)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y_2 - y_1) f_{X3}(y - y_2) dy_1 dy_2.$$

(٨-٣٤)

المعادلتين (٨-٣٣) و (٨-٣٤) تعطيان دالة التوافق $f_Y(y)$ في الحالة المتقطعة والمتصلة علي التوالي للدوال $f_{X_1}(x_1), f_{X_2}(x_2), f_{X3}(x_3)$.الصيغة العامة يمكن الحصول عليها كالتالي:

$$f_Y(y) = \sum_{y_{k-1}} \sum_{y_{k-2}} ... \sum_{y_1} f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y_2 - y_1) .. f_{X_k}(y - y_{k-1}),$$

(٨-٣٥)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y_2 - y_1) ... f_{X_k}(y - y_{k-1}) dy_1 ... dy_{k-1}.$$

(٨- ٣٦)

والذي يمثل الدالة $f_Y(y)$ وذلك للدوال $i = 1,2,...,k, f_{X_i}(x_i)$ سواء في الحالة المتقطعة أو المتصلة علي التوالي .

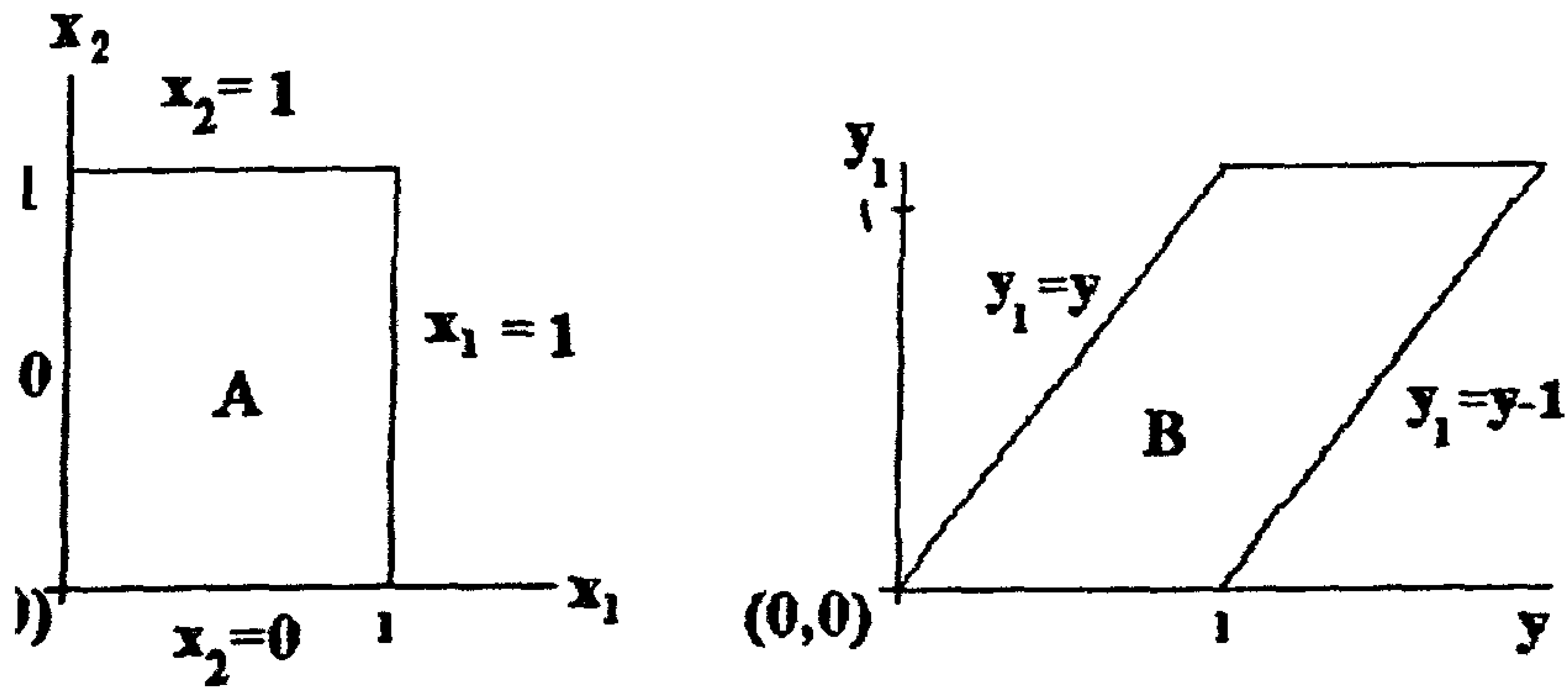
مثال (٨-٨١) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين ولهما نفس التوزيع حيث $X_i \sim UNIF(0,1)$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X_1 + X_2$

الحل :

المنطقتين المقابلين للتحويلة $Y_1 = X_1$ $Y = X_1 + X_2$ موضحة في شكل (٨-١٦) حيث :

$$\varphi = \{ y, y_1) \ 0 < y_1 < y < y_1 + 1 < 2 \}, \qquad (٨-٣٧)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y_1) \ f_{X_2}(y - y_1) dy_1$$



شكل (٨-١٦)

ومن المعادلة (٨-٣٢) فإن :

$$f_Y(y) = \int_0^y dy_1 = y, \qquad 0 < y < 1,$$

$$\int_{y-1}^{1} dy_1 \qquad = 2 - y \qquad 1 \le y < 2$$

$$= 1 - |y - 1|, \qquad 0 < y < 2$$

(٨-٤) طريقة الدالة المولدة للعزوم

Moment – generating – function Method

تعتبر هذه الطريقة مفيدة في كثير من الحالات وذلك لإيجاد توزيع دوال في متغيرات عشـوائية .
ليكن $X_1, X_1, \ldots, X_k$ متغيرات عشوائية معطاة بدالة كثافة احتمال مشتركة:
$f_{X_1, X_2, \ldots, X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ حيث $X = X_1, X_2, \ldots, X_k$ متجه عشوائي وإذا كـانت $Y_i = u_i(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ و $i = 1, 2, \ldots, k$ تمثل متغيرات عشوائية لدوال من المتغـيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_k$. الآن الدالة المولدة للعزوم المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ، إذا كانت موجودة ، هي :

$$M_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = E\left[e^{t_1 Y_1 + t_2 Y_2 + \ldots + t_k Y_k}\right]$$
$$= \int \ldots \int e^{t_1 u_1(x_1, \ldots, x_k) + \ldots + t_k u_k(x_1, \ldots, x_k)}$$
$$\times \; f_{X_1, \ldots, X_k}(x_1, \ldots, x_k) \prod_{i=1}^{k} dx_i \qquad (٨-٣٨)$$

وإذا أجرينا التكامل أو (الجموع في حالة المتغيرات العشوائية من النوع المتقطـع) ، أمكننـا التعرف علي الدالة في $t_1, t_2, \ldots, t_k$ الناتجة كدالة مشتركة مولده للعـزوم لتوزيـع مشـترك معروف بأنه سيكون للمتغيرات العشوائية $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ وذلك التوزيع استناداً إلي خاصيـة الوحدانية للدالة المولدة للعزوم . هذه الطريقة تكون محدودة الاستخدام عندما $k > 1$ وذلـك

لأنه هناك عدد بسيط من الدوال المشتركة المولدة للعزوم والمعروفة لدينا . ولكن إذا كانت k $1=$ فإن الفرصة تماما أفضل للتعرف على الدالة المولدة للعزوم .

مثال (٨-٨٢) إذا كان X متغيراً عشوائياً حيث $X \sim N(0,1)$ وإذا كان $Y = X^2$ أوجد التوزيع للمتغير Y .

البرهان :

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad t < \frac{1}{2},$$

وذلك لأن قيمة التكامل الأخير تمثل تكامل على دالة توزيع طبيعي بمتوسط صفر وتباين $\frac{1}{1-2t}$. الدالة الأخيرة تمثل الدالة المولدة للعزوم لتوزيع جاما بمعلمتين $\theta = 2, k = \frac{1}{2}$. أي أن المتغير العشوائي Y يتبع توزيع $\chi^2_{(1)}$.

مثال (٨-٨٣) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim N(0,1)$, $i=1,2$. ليكن $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_2 - X_1$.أوجد التوزيع المشترك للمتغيرين Y_1 , Y_2 .

الحل :

$$\begin{aligned}
M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) &= E[e^{Y_1t_1+Y_2t_2}] \\
&= E[e^{(X_1+X_2)t_1+(X_2-X_1)t_2}] \\
&= E[e^{(X_1(t_1-t_2)+X_2(t_1+t_2))}] \\
&= E[e^{(X_1(t_1-t_2))}]\ E[e^{X_2(t_1+t_2)}] \\
&= M_{X_1}(t_1-t_2)\ M_{X_2}(t_1+t_2) \\
&= \exp\left[\frac{(t_1-t_2)^2}{2}\right]\exp\left[\frac{(t_1+t_2)^2}{2}\right] \\
&= \exp\left(t_1^2+t_2^2\right) = \exp\left[\frac{2t_1^2}{2}\right]\exp\left[\frac{2t_2^2}{2}\right] \\
&= M_{Y_1}(t_1)\ M_{Y_2}(t_2).
\end{aligned}$$

حيث Y_1 , Y_2 متغيرين عشوائيين مستقلين وكل منهما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 وتباين 2 .

مثال (٨-٨٤) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim N(0,1)$, $i=1,2$ إذا كان $Y=(X_2-X_1)^2/2$ أوجد التوزيع للمتغير Y .

الحل :

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[\exp\left\{\frac{(X_2-X_1)^2}{2}t\right\}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{(x_2-x_1)^2}{2}t - \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right]\ dx_1\ dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{x_1^2(1-t)+2x_1x_2t+x_2^2(1-t)\right\}\right]\ dx_1\ dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} x_2^2 (1-t)\right]$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1-t}{2}\left(x_1^2 + \frac{2x_1 x_2 t}{1-t}\right)\right] dx_1 \right\} dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x_2^2(1-t)}{2}\right] \exp\left[\frac{x_2^2 t^2}{2(1-t)}\right]$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1-t}{2}\left(x_1 + \frac{x_2 t}{1-t}\right)^2\right] dx_1 \right\} dx_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(1 - t - \frac{t^2}{1-t}\right) x_2^2\right] dx_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \quad \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-2t}} \cdot \frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{1-t}} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \quad \frac{1-2t}{1-t} x_2^2\right) \quad dx_2$$

$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad t < 1/2.$$

والتي تمثل الدالة المولدة للعزوم لتوزيع جاما بمعلمتين $k = \frac{1}{2}, \theta = 2$ وعلي ذلك دالـــة كثافـــة الاحتمال للمتغير Y هو :

$$f_Y(y) = \left[\sqrt{\frac{1}{2}} / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] y^{-\frac{1}{2}} \; e^{-y/2} \qquad 0 < y < \infty$$

$$= 0 \text{ elsewhere} \; .$$

مثال (٨- ٨٥) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين ولهما نفـــس دالـــة كثافـــة الاحتمال التالية

$$f(x) = \frac{1}{4} \qquad x = 1,2,3,4. \qquad \text{(٨-٣٩)}$$

$$= 0 \text{ elsewhere} \; .$$

(أ) أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير $Y = X_1 + X_2$ و

(ب) دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

(أ) الدالة المولدة للعزوم للمتغير X الذي له دالة كثافة الاحتمال في مثال (٨-٨٥) هي

$$M_X(t) = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{4t}.$$

وعلي ذلك الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y هي :

$$[M_X(t)]^2 = \frac{1}{16}e^{2t} + \frac{2}{16}e^{3t} + \frac{3}{16}e^{4t} + \frac{4}{16}e^{5t}.$$
$$+\frac{3}{16}e^{6t} + \frac{2}{16}e^{7t} + \frac{1}{16}e^{8t}.$$

(ب) المعامل المقابل إلى e^{bt} يساوي الاحتمال $P(Y = b)$. وعلي ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y هي :

y	2	3	4	5	6	7	8
$f_Y(y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

مثال (٨-٨٦) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين لهما نفس دالة كثافة الاحتمال التي علي الشكل :

$$f(x) = \frac{x}{6} \qquad x = 1,2,3,.$$

إذا كان $Y = X_1 + X_2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

الحل :

الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y هي :

$$M_Y(t) = E[e^{(t\ X_1 + t\ X_2)}]$$
$$= E[e^{(tX_1}\ e^{tX_2}]$$
$$= E[e^{tX_1}]\ E[e^{tX_2}].$$

حيث X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين لهما نفس التوزيع وعلي ذلك لا بد أن يكون لهما نفس الدالة المولدة للعزوم وعلي ذلك :

$$E[e^{tX_1}] = E[e^{tX_2}] = \frac{1}{6}e^{t} + \frac{2}{6}e^{2t} + \frac{3}{6}e^{3t}.$$

وعلي ذلك :

$$M_Y(t) = \left(\frac{1}{6}e^{t} + \frac{2}{6}e^{2t} + \frac{3}{6}e^{3t}\right)^2$$
$$= \frac{1}{36}e^{2t} + \frac{4}{36}e^{3t} + \frac{10}{36}e^{4t} + \frac{12}{36}e^{5t} + \frac{9}{36}e^{6t}$$

يمكن بسهولة من الصيغة الأخيرة معرفة دالة كثافة الاحتمال للمتغير y كما في الجدول التالي:

y	2	3	4	5	6
$f_Y(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$

مثال (٨-٨٧) إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X_1 - X_2$

الحل :

$$M_Y(t) = E\left[e^{t(X_1 - X_2)}\right]$$
$$= E\left[e^{tX_1} \quad e^{-tX_2}\right]$$
$$= E\left[e^{tX_1}\right]E\left[e^{-tX_2}\right]$$

وذلك لأن X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين .من المعروف أن :

$$E\left[e^{tX_1}\right] = \exp\left[\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 \ t^2}{2}\right],$$

$$E\left[e^{tX2}\right] = \exp\left[\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 + t^2}{2}\right]$$

لجميع قيم t الحقيقية وعلي ذلك $E\left[\bar{e}^{tX_2}\right]$ يمكن الحصول عليها من $E\left[e^{tX2}\right]$ وذلك بإحلال t-بدلا من t وعلي ذلك :

$$E\left[e^{-tX_2}\right]=\exp\left(-\mu_2 t+\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right)$$

وأخيراً فإن :

$$M_Y(t)=\exp\left(\mu_1 t+\frac{\sigma_1^2 t}{2}\right)\exp\left(-\mu_2 t+\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right)$$
$$=\exp\left((\mu_1-\mu_2)t+\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}\right).$$

الدالة $M_Y(t)$ تمثل الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي Y يتبع التوزيع الطبيعي حيث :
$Y \sim (\mu_1-\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

النظرية التالية ، والتي تعتبر حالة عامة من المثال السابق (٨–٨٧) ، لها أهمية كبيرة في نظرية المعاينة .

نظرية (٨–١٤) ليكن X_1 , X_2, ...,X_k متغيرات عشوائية مستقلة حيث :
$i=1,2,\ldots,k, X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ ، المتغير العشوائي $Y=\sum_{i=1}^{k} a_i X_i$ يتبع التوزيع الطبيعي أي أن :

$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sigma_i^2\right)$ حيث $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ثوابت حقيقية.

البرهان :

لأن X_1 , X_2, ... ,X_k متغيرات عشوائية مستقلة ، فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y تعطي من الصيغة التالية :

$$M(t)=E\{\exp[t(a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_kX_k)]\}$$
$$=E\left(e^{ta_1X_1}\right)E\left(e^{ta_2X_2}\right)\ldots E\left(e^{ta_kX_k}\right)$$

الآن :

$$E\left(e^{tX_i}\right)=\exp\left((\mu_i t+\frac{\sigma_i^2\ t^2)}{2}\right), \qquad i=1,2,\ldots,k.$$

أي أن :

$$E\left(e^{ta_iX_i}\right)=\exp\left((\mu_i(a_it)+\frac{\sigma_i^2(a_i t)^2)}{2}\right)$$

وعلي ذلك ، الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي Y هي :

$$M_Y(t)=\prod_{i=1}^{k}\exp\left[(a_i\mu_i)t+\frac{(a_i^2\sigma_i^2)t^2}{2}\right]$$

$$=\exp\left[(\sum_{i=1}^{k}a_i\mu_i)t+\frac{(\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2)t^2}{2}\right]$$

ولكن $M_Y(t)$ هي الدالة المولدة للعزوم لتوزيع $N\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2\right)$.

في نظرية (٨- ١٤)و بوضع $a_i=1$ يتضح أن مجموع k من المتغيرات العشـــوائية المســتقلة الطبيعية لها توزيع طبيعي .

مثـــال (٨-٨٨) إذا كـــان X_1 , X_2 متغــــيرين عشـــوائيين مســـتقلين حيـــث $X_2\sim GAM(\theta,k_2),X_1\sim GAM(\theta,k_1)$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y=X_1+X_2$.

الحل :

$$M_Y(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)=\frac{1}{(1-t\theta)^{k_1}}\ \frac{1}{(1-t\theta)^{k_2}}$$

$$=\frac{1}{(1-t\theta)^{k_1+k_2}}=(1-t\theta)^{-(k_1+k_2)}$$

والتي تمثل الدالة المولدة لتوزيع جاما بمعلمتين θ,k_1+k_2 .

نظرية (٨-١٥) إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة بدالة مولدة للعـــزوم $M_{X_i}(t)$ حيث $i = 1,2,\ldots,n$ فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير $Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i$ هي:

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(a_i t).$$

البرهان :

الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y هي :

$$\begin{aligned} M_Y(t) = E[e^{tY}] &= E\left[e^{t[a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_kX_k]}\right] \\ &= E[e^{a_1tX_1}\ e^{a_2tX_2} \ldots e^{a_ktX_k}] \\ &= E[e^{a_1tX_1}]\ E[e^{a_2tX_2}] \ldots E\left[{}^{a_ktX_k}\right] \end{aligned}$$

وبما أن :

$$E\left(e^{tX_i}\right) = M_{X_i}(t)$$

فــــإن :

$$E\left(e^{a_itX_i}\right) = M_{X_i}(a_it)$$

وعلي ذلك :

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{X_1}(a_1t)\ M_{X2}(a_2t) \ldots M_{X_k}(a_kt) \\ &= \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(a_it). \end{aligned}$$

نتيجة (٨-٣) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيـــع ولهـــا دالة مولدة للعزوم $M_X(t)$ فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ هي :

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{k} M(t) = [M(t)]^k.$$

نظرية (٨-١٦) ليكن $X_1 , X_2, ..., X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة حيث $X_i \sim \chi^2_{(v_i)}$ فإن المتغير العشوائي $Y = X_1 + X_2 ... + X_k$ يتبع توزيع مربـــع كـــاى بدرجـــات حريـــة $v_1 + v_2 + ... + v_k$. أي أن $Y \sim X^2_{(v_1 + ... + v_k)}$.

الحل :

الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y هي :

$$M_Y(t) = E\{\exp[t(X_1 + X_2 + ... + X_k)]\}$$
$$= E\left(e^{tX_1}\right)E\left(e^{tX_2}\right)...E\left(e^{tX_k}\right)$$

وذلك لأن $X_1 , X_2, ..., X_k$ مستقلين . وبما أن :

$$E(e^{tX_i}) = (1-2t)^{-v_i/2} \qquad t < \frac{1}{2}, \qquad i = 1,2,...,k,$$

فـإن :

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-(v_1 + v_2 + ... + v_k)/2} \qquad t < \frac{1}{2}.$$

والتي تمثل الدالة المولدة للعزوم لتوزيع مربع كاى بدرجات حرية $v_1 + v_2 + ... + v_k$.

مثال (٨- ٨٩) إذا كان $X_1 , X_2, ..., X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقـــة التوزيـــع حيث $X_i \sim Exp(1/\theta)$ حيـــث $\lambda = 1/\theta$ أوجـــد الدالـــة المولـــدة للعـــزوم للمتغـــير $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ ومنها استنبط دالة كثافته الاحتمالية .

الحل :

$$M_{X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

وعلي ذلك :

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^k.$$

$$= \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-k}$$

والتي تمثل الدالة المولدة للعزوم لتوزيع جاما بمعلمتين k , $1/\lambda$ ..

مثال (٨- ٩٠) إذا كان $X_1 , X_2 ,..., X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة حيث $X_i \sim BIN(1, p)$ أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ ومنها استنبط دالة كثافته الاحتمالية .

الحل :

$$M(t) = q + p\ e^t \quad .$$

بما أن $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ فإن :

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{k} (q + pe^t) = (q + pe^t)^k .$$

والتي تمثل الدالة المولدة للعزوم لتوزيع ذى الحدين بمعلمتين k , p .

مثال (٨- ٩١) إذا كان $X_1 , X_2, ..., X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة حيث $X_i \sim POI(\mu_i)$ أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$. ومنها استنبط دالة كثافته الاحتمالية .

الحل :

$$M_{X_i}(t) = \exp[\mu_i (e^t - 1)],$$

وعلي ذلك :

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{k} \exp[\mu_i (e^t - 1)]$$

$$= \exp \sum_{i=1}^{k} \mu_i (e^t - 1).$$

والتي تمثل الدالة المولدة للعزوم لتوزيع بواسون بمعلمة $\sum_{i=1}^{k} \mu_i$.

نظرية (٨-١٧) $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها توزيع طبيعي قياسي $N(0,1)$ فإن $W = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \sim \chi^2(k)$.

البرهان : من مثال (٨-٨٢) أثبتنا أن Z_i^2 يتبع $\chi^2(1)$, $i=1,2,\ldots k$. ومن نظرية (٨-١٦) وبوضع $Y=W$ و $v_i = 1$ وعلى ذلك W يتبع $\chi^2(k)$.

نتيجة (٨-٤) ليكن $X_1, X_2, \ldots, X_k$ متغيرات عشوائية مستقلة حيث $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. المتغير العشوائي :

$$W = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

يتبع توزيع مربع كاى بدرجات حرية k.

تحويلة Mellen   Mellen Transformation

تناولنا في البند (٨-٤) طريقة الدالة المولدة للعزوم في إيجاد توزيع مجموع متغيرات عشوائية مستقلة . في هذا الجزء سوف نتناول طريقة أخرى تساعدنا في إيجاد توزيع حاصل الضرب لمتغيرات عشوائية مستقلة وغير ساليه . سوف نحصل علي دالة تسمى تحويلة Mellen وسوف نرمز لها بالرمز $T_X(\theta)$ وذلك لمتغير عشوائي X حيث :

$$T_X(\theta) = E(X^\theta) = E(\exp[\theta \ln X])$$
$$= M_{\ln X}(\theta).$$

والتي لها الخاصية التالية :

$$T_{XY}(\theta) = T_X(\theta) T_Y(\theta) \qquad (٨-٤٠)$$

وذلك لأن :

$$T_{XY}(\theta) = M_{\ln XY}(\theta) = M_{\ln X + \ln Y}(\theta) = M_{\ln X}(\theta) M_{\ln Y}(\theta)$$
$$= T_X(\theta) T_Y(\theta).$$

$$T_X(k) = E(X^k).$$

أيضـــا :

$$T_{bX^a}(\theta) = M_{\ln(bX^a)}(\theta) = M_{a\ln X + \ln b}(\theta)$$
$$= e^{\theta \ln b} M_{\ln X}(a\theta) = b^\theta T_X(a\theta).$$

والتي تتحقق لقيم b>0 و $a\theta$ في مدى تعريف $T_X(\theta)$.

وأخيرا فإن $T_X(\theta)$ لها خاصية الوحدانية .

مثال (٨-٩٢) إذا كان W متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بيتا بمعلمتين r , s حيث $-r < \theta < \infty$ وإذا كان :

$$T_W(\theta) = E(W^\theta) = \frac{\int_0^1 w^\theta w^{r-1}(1-w)^{s-1} dw}{B(r,s)}$$

$$= \frac{B(r+\theta, s)}{B(r,s)} = \frac{\Gamma(r+\theta)}{\Gamma(r)} \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+s+\theta)}.$$

(٨-٤١)

الآن إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بيتا بمعلمتـين r = a و s = b وأن Y متغـيراً عشوائياً يتبع توزيع بيتا بمعلمتين r= a + b, s = c وإذا كان X , Y مستقلين أوجد التوزيـــع للمتغير X Y .

الحل :

$$T_{XY}(\theta) = T_X(\theta) T_Y(\theta) = \frac{\Gamma(a+\theta)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+\theta)} \frac{\Gamma(a+b+\theta)\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a+b)\Gamma(a+b+c+\theta)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+\theta)\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+c+\theta)}.$$

ومن المعادلة (٨-٤١) يمكننا استنتاج أن المتغير XY يتبع توزيع بيتا بمعلمتين a , b + c

تمـاريــن :

-١- إذا كان X متغيرا عشوائيا حيــث $X \sim N(0, 1)$ و Y متغــيرا عشــوائيا حيــث $Y \sim \chi^2_{(v)}$ وإذا كان X , Y مسـتقلين .

(أ) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركين للمتغيرين العشوائيين

$$V = \frac{X}{\sqrt{Y + X^2}} \quad , \quad W = Y + X^2$$

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشـية لكل من المتغيرين V , W .

(ج) أثبت أن V^2 له توزيع بيتا .

-٢- إذا كان X_1 متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ذي الحدين السـالب بمعالم u , p حيث u عــدد صحيح وإذا كان X_2 يتبع التوزيع الهندسي الزائد بمعلمة p وإذا كان X_1, X_2 مستقلين . أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ للمتغــيرين $Y_2 = X_2, y_1 = X_1 + X_2 - 1$ وأوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_1 .

-٣- إذا كان $X_1, X_2 \sim BVN(\mu_1, \mu_2), (\sigma_1^2, \sigma_2^2, p))$ أوجد دالة كثافة الاحتمــال المشتركة للمتغيرين العشوائيين :

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X_1}{\sigma_1} + \frac{X_2}{\sigma_2}\right), Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X_1}{\sigma_1} + \frac{X_2}{\sigma_2}\right)$$

وهل Y_1 , Y_2 مستقلين . أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشــية لكــل مــن المتغــيرين Y_1 , Y_2

-٤- إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين حيث X يتبع توزيع بيتا بمعلمتــين r , s و Y يتبع توزيع جاما بمعلمتين $\theta = 1, r + s$.

(أ) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين $V = XY , \ W = (1-X)Y$

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من V , W وأثبت أن V , W مســتقلين .

-٥- إذا كان X , y متغيرين عشوائيين يتبعان توزيع Dirichlet بمعلمتين $a,b,c > 0$

(أ) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين

$$W = X / Y \quad , \quad V = X + Y$$

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية لكل من V , W وهل $W^* = (b/a)\,W$

V , W^* مستقلين ؟

-٦- إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim UNF(0,1)$, $i = 1,2$

وإذا كان $W = \max(X_1 , X_2)$, $V = \min(X_1 , X_2)$

(أ) أثبت أن :

$$F_{V,W}(v,w) = 1 \qquad 1 \le v < w < \infty$$

$$= 2v - v^2 \qquad 0 \le v \le 1 < w < \infty$$

$$= 2vw - v^2 \qquad 0 \le v \le w \le 1$$

$$= 0 \text{ elsewhere..}$$

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين V , $R = w - V$ وتحقق من أن R

V , لهما توزيع Dirichlet وهل V , R مستقلين ؟

-٧- إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim \exp(1)$, $i = 1,2$ وإذا

كان $W = \max(X_1 , X_2)$, $V = \min(X_1 , X_2)$.

(أ) إذا كان $Y_1 = 1 - \exp(-X_1)$, $Y_2 = 1 - \exp(-X_2)$ أثبت أن Y_2 , Y_1

مستقلان وأن $Y_i \sim UNF(0,1)$, $i = 1,2$.

(ب) تذكر أن $\max(Y_1 , Y_2) = \exp(-W)$ وأن $\min(Y_1 , Y_2) = \exp(-V)$

استخدم النتائج في تمرين (٦) لإيجاد دالة كثافة الاحتمال لمشتركة للمتغيرين V

. W

-٨- إذا كان X_1 , X_2 , X_3 متغيرات مستقلة حيث X_1 تتبع توزيع جاما بمعلمة θ_i , r_i و $i = 1,2,3$ وإذا كان :

$$Y_i = \frac{X_i}{X_1 + X_2 + X_3}, i = 1,2,3$$

$$Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

(أ) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات Y_1 , Y_2 , Y_3 .

(ب) أثبت أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغيرين Y_2 , Y_1 تتبع توزيع Dirichlet الثنائي .

-٩- إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين كل منهما يتبع توزيع كوشي بمعلمة θ . اثبت أن $Y = a X_1 + b X_2$ حيث $a , b > 0$, $a + b = 1$ لهما توزيع كوشي بمعلمة θ.

-١٠- إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين كل منهما يتبع توزيع وايبل بمعالم $\theta = 1$, $\beta = 2$ وإذا كان $Y = Y_1^2 + X_2^2$, $Z = X_1 + X_2$.

(أ) أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z .

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين $V_1 = X_1^2$, $V_2 = X_2^2$ ثم أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y .

-١١- إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين بمتوسطي μ_1 , μ_2 وتبايني σ_1^2 , σ_2^2 . أوجد معامل الارتباط للمتغير $Z = X - Y$ بدلاله $\mu_1 , \mu_2 , \sigma_1^2 , \sigma_2^2$.

-١٣- ليكن X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين بتباين أكبر من الصفر . أوجد معامل الارتباط للمتغير X_1 , $Y = X_1 / X_2$ بدلاله متوسطي وتبايني X_1 , X_2 .

١٤- أثبت أنه إذا كانت $X_1, \ldots, X_r$ متغيرات عشوائية مستقلة حيث $X_i, i = 1, \ldots, r$ تتبع توزيع الهندسي الزائدي بمعلمة $i = 1, \ldots, r, p_i = p$ فإن $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i - r$ تتبع توزيع ذي الحدين السالب بمعلمة r, p.

١٥- إذا كانت $X_1, \ldots X_s$ متغيرات عشوائية مستقلة حيث $X_i, i = 1, \ldots, r$ تتبع توزيع جاما بمعلمة θ, r_i ، $i = 1, \ldots, s$.

(أ) أثبت أن $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$ لها توزيع جاما بمعلمة $\theta, r = \sum_{i=1}^{s} r_i$.

(ب) أثبت أنه إذا كانت $X_1, \ldots X_s$ متغيرات عشوائية حيث $X_i, i = 1, \ldots, s$ وكانت X_i تتبع التوزيع الآسي بمعلمة θ فإن $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$ لها توزيع جاما بمعلمة θ , s

١٦- إذا كان $X_1, \ldots, X_r$ متغيرات عشوائية مستقلة حيث $X_i \sim UNF(0,1)$ ، $i = 1, \ldots, r$

(أ) عندما $r = 2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X_1 + X_2$.

(ب) عندما $r = 3$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

(ج) أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$ حيث r عامه.

١٧- إذا كان X متغير عشوائي بدالة كثافة احتمال :

$$f(x) = 4x^3 \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

استخدم طريقة دالة التوزيع التجميعي في إيجاد توزيع كل من المتغيرات الآتية :

(أ) $Y = X^4$ (ب) $W = e^X$ (ج) $Z = \ln X$

(د) $U = (X - .5)^2$.

١٨- إذا كان X متغيرا عشوائيا حيث $X \sim UNIF(0,1)$ استخدم طريقة دالة التوزيع التجميعي في إيجاد توزيع كل من المتغيرات التالية :

(أ) $Y = X^{1/4}$! (ب) $Z = 1-e^{-X}$.

(د) $U = X(1-X)$.

١٩- إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع وايبل حيث $X \sim WEI(0, \beta)$ أوجد كل من دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التجميعي لكل من المتغيرات الآتية :

(أ) $W = \ln X$ (ب) $Z = (\ln X)^2$.

٢٠- إذا كان $X \sim UNUF(0, 1)$ أوجد التحويلة $Y = G_1(u)$, $W = G_2(u)$ بحيث أن :

(أ) $Y = G_1(u) \sim Exp(1)$

(ب) $W = G_2(u) \sim BIN(3, ½)$.

٢١- إذا كان X متغيرا عشوائيا له داله كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = (1/2)\exp(1-|x|) \qquad -\infty < x < \infty$$

(أ) أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = |X|$.

(ب) ليكن $W = 0$ وإذا كان $X \leq 0$ و $W = 1$ إذا كان $X > 0$ أوجد دالة التوزيع التجميعي للمتغير W .

٢٢- إذا كان $X \sim BIN(r, p)$ أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X - r$.

٢٣- إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = x^2/24 \qquad -2 < x < 4$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^2$.

٢٤- إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية :

$$f(x,y) = 4\ e^{-2(x+y)} \qquad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

(أ) أوجد دالة التوزيع التجميعي للمتغير $W = X + Y$.

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين $V = X$, $U = X/Y$.

(ج) أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير U .

.

-٢٥- إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين حيث $X_i \sim GAM(2,1/2)$ أوجد :

(أ) دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = \sqrt{X_1 + X_2}$.

(ب) دالة كثافة الاحتمال للمتغير $W = X_1 / X_2$.

-٢٦- إذا كان X_1 , X_2 , X_3 , X_4 متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس دالة كثافة الاحتمـــال التالية :

$$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

أوجد المتوسط والتباين للمتغير $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

-٢٧- إذا كان $X_1 , X_2, \ldots, X_5$ متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس دالة كثافة الاحتمـــال التالية :

$$f(x) = 6x(1-x) \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$.

-٢٨- إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{3} \qquad x = 1,2,3$$
$$= 0 \quad \text{elswhere} .$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = 2X + 1$.

٢٩- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغيرين عشوائيين X_1 , X_2 علي الشكل :

$$f(x_1,x_2)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1+x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x_1-x_2},(x_1,x_2)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1).$$

$$=0 \quad \text{elsewhere}.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغيرين $Y_1 = X_2 - X_3$ و $Y_2 = X_1 + X_2$.

٣٠- ليكن X متغيرا عشوائيا له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \qquad x=1,2,3,...$$

$$=0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^3$.

٣١- إذا كان X_2 , X_1 متغيرين عشوائيين دالة كثافة احتمال علي الشكل :

$$f(x_1,x_2)=x_1\ x_2/36 \qquad x_1=1,2,3, \quad x_2=1,2,3$$

$$=0 \quad \text{elsewhere}$$

أوجد أولا كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين $Y_1 = X_1 - X_2$ و $Y_2 = X_2$ ثم أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_1 .

٣٢- إذا كان X_2 , X_1 متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X_i \sim BIN(n_i, p_i)$, $i = 1,2$ أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 $= X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_2$ ثم أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_1 .

أستخدم الحقيقة أن :

$$\sum_{w=0}^{k}\binom{n_1}{w}\binom{n_2}{k-w}=\binom{n_1+n_2}{k},$$

٣٣- إذا كان X متغيرا عشوائيا بدالة كثافة احتمال علي الشكل :

$$f(x)= x^2/9 \qquad 0<x<3$$

$$=0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^3$.

٣٤- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X علي الشكل :

$$f(x) = 2\ x\ \bar{e}^{x^2} \qquad 0 < x < \infty$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^2$.

٣٥- إذا كان X_2 , X_1 متغيرين عشوائيين حيث $i = 1,2, X_i \sim N(0,1)$ أوجـــد دالـــة كثافة الاحتمال للمتغير $Y_1 = X_2 / X_1$.

٣٦- إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = (x-1)/2 \qquad 1 < x < 3$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

أوجد الدالة $u(x)$ بحيث أن $Y = u(X)$ لها توزيع منتظم في الفترة $(0, 1)$.

٣٧- إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين لهما نفس دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{9} \qquad 1 < x < 10$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y_1 = X_1\ X_2$.

٣٨- إذا كان T له توزيع T بدرجات حرية $v = 14$ أوجد قيمة b بحيث أن $P(-b < T < b) = 0.9$.

٣٩- إذا كان F متغيراً عشوائياً يتبع توزيع F بدرجات حرية $v_1 = 5$, $v_2 = 10$ أوجـــد القيمة a , b بحيث أن $P(F \le a) = .05$ و $P(F \le b) = .95$ وعلـــي ذلـــك $P(a < F < b) = 0.9$.

ملحوظة : أكتب $P(\frac{1}{F} \ge 1/a) = P(F \le a) = 1 - P(1/F \le 1/a)$.

٤٠- أثبت أن $Y = \frac{1}{1+(\nu_1+\nu_2)F}$ حيث F يتبع توزيع F بدرجات حرية ν_1, ν_2،
يتبع توزيع بيتا .

٤١- إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين حيث $X_i \sim Exp(1)$. اثبـــــت أن
$Z = X_1 / X_2$ لها توزيع F .

٤٢- إذا كان X_1 , X_2 , X_3 متغيرات عشوائية مستقلة حيث :
$X_i \sim Exp(1)$ أثبت أن المتغيرات التالية مستقلة :

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \quad , \quad Y_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}$$

$$Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

٤٣- إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \frac{1}{4} \qquad 1 < x < 3$$

$$= 0 \text{ elsewhere}$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y = X^2$.

الفصل التاسع

نهايات التوزيعات

Limiting Distributions

(٩-١) مقدمــــــــــــــة Introduction

تناولنا في الفصل الثامن طرق عامة لاشتقاق التوزيع الاحتمالي لدالة في n من المتغيرات العشوائية ، لتكن $Y_n = u(X_1, X_2, ..., X_n)$. في بعض الحالات يمكن الحصول علي دالــــة كثافة الاحتمال للمتغير Y_n بسهولة ولكن في كثير من الحالات الهامة يكون من الصعب تقديرها . علي سبيل المثال ليكن $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع بدالــــة كثافة احتمال علي الشكل :

$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

الدالة المولدة للعزوم للمتغير $Y_n = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ حيــث $X_1, X_2, ..., X_n$ متغــيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع و $X_i \sim UNIF(0,1)$ تعطي من الصيغــــة $[M(t/n)]^n$ مــن نظرية (٨-١٥) حيث $a_i = 1/n$. وعلى ذلك الدالة المولدة للعزوم للمتغــير Y_n هــي :

$$M(t) = \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{e^t - 1}{t} \qquad t \neq 0$$
$$= 1 \qquad t = 0.$$

وعلى ذلك :

$$E(e^{tY_n}) = \left(\frac{e^{t/n} - 1}{t/n}\right)^n, t \neq 0$$
$$= 1. \qquad , t = 0$$

أي أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y_n تعتمد علي n ، وبالتالي فإن توزيع Y_n يعتمد علــي n . في الحقيقة هناك طرق رياضية مختلفة يمكن استخدامها لتقدير دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_n لعدد موجب n ولكن دالة كثافة الاحتمال تكون من التعقيد بحيــــث أن القلــة يــهتمون في استخدامها في حساب الاحتمالات الخاصة بالمتغير Y_n . واحد من أهداف هذا الفصل هو تقديم طرق التقريب ، لقيم كبيرة من n وذلك لتلك الدوال الاحتمالية البالغة التعقيد .

بفرض أن توزيع يعتمد علي n . من الواضح أن دالة التوزيع التجميعي F لهذا التوزيع أيضــــا سوف تعتمد علي n . خلال هذا الفصل سوف نوضح هذه الحقيقة بكتابة دالة التوزيع التجميعي علي الشكل F_n ودالة كثافة الاحتمال المقابلة لها علي الشكل f_n . أيضا لتوضيح الحقيقة أننــــا

نعمل مع متابعة من التوزيعات سوف تضع الدليل n علي المتغير العشوائي . علي سبيل المثال ، سوف نكتب :

$$F_n(y_n) = \int_{-\infty}^{y_n} \frac{1}{\sqrt{1/n}\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{nw^2/2} \, dw,$$

لدالة التوزيع التجميعي للمتغير $Y_n = \overline{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ حيث $X_i \sim N(0,1)$, $i = 1,2,...,n$ وبالتالي فإن $Y_n \sim N(0,1/n)$ تبعا لنظرية (٨-١٤) حيث $a_i = 1/n$. الآن سوف نقدم تعريف لنهاية التوزيع لمتغير عشوائي توزيعه يعتمد على n .

تعريف : لتكن دالة التوزيع التجميعي $F_n(y)$ لمتغير عشوائي Y_n تعتمد علي n . إذا كانت $F(y)$ داله توزيع وإذا كان $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$ عند كل نقطة y تكون الدالة $F(y)$ عندها متصلة ، فإنه يقال أن للمتغير العشوائي Y_n نهاية توزيع بدالة توزيع تجميعي $F(y)$ ويعبر عن هذا بالرمز $Y_n \xrightarrow{d} Y$ أو $Y \sim F(y)$.

مثال (٩-١) إذا كانت $X_1, X_2,..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع بداله كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \qquad 0 < x < \theta, \; 0 < \theta < \infty$$
$$= 0 \;\; \text{elsewhere}$$

إذا كان $Y_n = X_{n:n} = \max(X_1, X_2,..., X_n)$ أوجد نهاية التوزيع للمتغير Y_n .

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_n هي :

$$g_n(y) = \frac{n\; y^{n-1}}{\theta^n} \qquad 0 < y < \theta$$
$$= 0 \;\; \text{elsewhere}$$

ودالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_n هي :

$$F_n(y) = 0 \qquad y < 0$$
$$= \int_0^y \frac{n\, z^{n-1}}{\theta^n} dz = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n \qquad 0 \le y < \theta$$
$$= 1. \qquad \theta \le y < \infty$$

وبالتالي فإن :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = 0 \qquad -\infty < y < \theta$$
$$= 1. \qquad \theta \le y < \infty$$

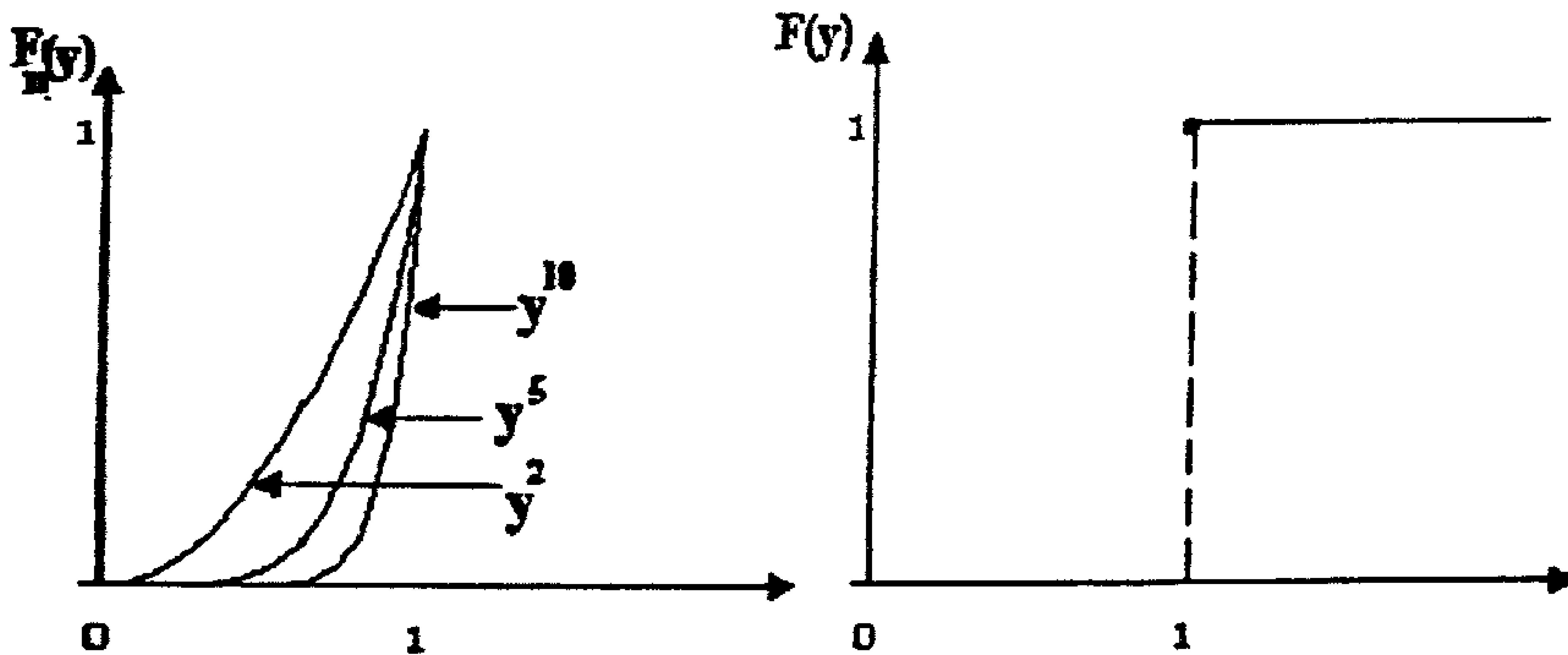
الآن :

$$F(y) = 0 \qquad -\infty < y < \theta$$
$$= 1. \qquad \theta \le y < \infty$$

تمثل دالة توزيع تجميعي . بالإضافة إلي ذلك فإن $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$ عند كل نقط الاتصال للدالة $F(y)$. تبعا لتعريف نهاية التوزيع ، فإن المتغير العشوائي Y_n له نهاية توزيع بدالة توزيع تجميعي $F(y)$. في هذا المثال يلاحظ أن نهاية التوزيع للمتغير Y_n هو توزيع متقطع لمتغير عشوائي يطلق عليه خامل . عندما $\theta = 1$ فإن دالة التوزيع التجميعي $F(y)$ سوف تكون علي الشكل :

$$F(y) = 0 \qquad y < 1$$
$$= 1. \qquad y \ge 1$$

شكل (٩-١) يوضح مقارنة لدوال توزيع تجميعي $F_n(y)$ عند $n = 2$, $n = 5$, $n = 10$ مع نهاية التوزيع وذلك عندما $\theta = 1$.



شكل (٩-١)

تعريف : يقال للدالة $F(y)$ أنها دالة توزيع تجميعي لمتغير عشوائي متقطع خـامل degenerate عند القيمة $y = c$ إذا كان :

$$F(y) = 0 \qquad y < c$$
$$= 1 \qquad y \geq c$$

بمعنى آخر ، فإن الدالة $F(y)$ هي دالة التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي من النوع المتقطع والـتي تعين الاحتمال واحد عند القيمة $y = c$ وغير ذلك فإن الاحتمال يساوى صفراً .في كثير مـن الأحيان فإن نهاية التوزيع لا تكون لمتغير عشوائي خامل ما وفي بعض الأحيان لا يوجد نهاية علـى الإطلاق .

مثال (٩-٢) إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة متطابقة التوزيع بدالـة كثافـة احتمـال $X_i \sim N(0,1)$, $i = 1,2,...,n$ أوجـد نهايـة التوزيـع للمتغـير

$$Y_n = \overline{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$$

الحل :

$$F_n(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{1/n}\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{nw^2/2}\, dw$$

بوضع $v = \sqrt{n}w$ فإن :

$$F_n(y) = \int_{-\infty}^{\sqrt{n}\,y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{v^2/2}\, dv$$

من الواضح أن :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = 0 \qquad y < 0$$
$$= \frac{1}{2} \qquad y = 0$$
$$= 1 \qquad y > 0$$

الآن الدالة :

$$F(y) = 0 \qquad y < 0$$
$$= 1 . \qquad y \geq 0$$

تمثل دالة توزيع تجميعي وعلي ذلك $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$ عند كل نقط الاتصـــال للدالــة $F(y)$. يجب أن نكون متأكدين من أن $\lim_{n\to\infty} F_n(0) \neq F(0)$ ولكن $F(y)$ لن تكون متصلــة عند $y = 0$. تبعا لذلك فإن المتغير العشوائي Y_n له نهاية توزيع بدالة توزيع تجميعـــي $F(y)$. مرة أخرى نهاية التوزيع يكون من النوع المتقطع لمتغير عشوائي خامل حيث $P(Y=0)=1$ وصفر غير ذلك .

مثال (٩-٣) في الحقيقة فإن نهاية التوزيعات ، إذا وجدت ، عموما لا يمكن تقديرها بأخذ النهاية لدالة كثافة الاحتمال. الآن سوف نوضح هذه الحقيقة . ليكن X_n متغيرا عشوائيا لها دالة كثافة الاحتمالية التالية :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 \qquad && x = 2+\frac{1}{n} \\ &= 0 \ \text{elsewhere} && \end{aligned}$$

من الواضح أن $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ لجميع قيم x ، وهذا يدعو إلى الاعتقاد بأن X_n ليـــس لها نهاية توزيع ،وهذا غير صحيح لأن دالة التوزيع للمتغير X_n هي :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= 0 \qquad && x < 2+\frac{1}{n} \\ &= 1. && x \geq 2+\frac{1}{n} \end{aligned}$$

وأيضا :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_n(x) &= 0 \qquad && x \leq 2 \\ &= 1. && x > 2 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \qquad && x < 2 \\ &= 1. && x \geq 2 \end{aligned}$$

تمثل دالة توزيع تجميعي ومنها فإن : $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ عند جميع قيم الاتصـــال للدالـــة $F(x)$.

مثال (٩-٤) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولهـــا نفـــس التوزيـــع المعرف في مثال (٩-١) . ليكن $Z_n = n(\theta - Y_n)$ حيث :
$Y_n = X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ أوجد نهاية التوزيع للمتغير Z_n .

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z_n هي :

$$h_n(z) = \frac{(\theta - z/n)^{n-1}}{\theta^n} \qquad 0 < z < n\theta$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

دالة التوزيع التجميعي للمتغير Z_n هي :

$$\begin{aligned} F_n(z) &= 0 & z<0 \\ &= \int_0^z \frac{(\theta - w/n)^{n-1}}{\theta^n}\, dw = 1 - \left(1 - \frac{z}{n\theta}\right)^n, & 0 \le z < n\theta \\ &= 1 & n\theta \le z \end{aligned}$$

وعلي ذلك :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_n(z) &= 0 & z < 0 \\ &= 1 - \bar{e}^{z/\theta} & 0 < z < \infty \end{aligned}$$

الآن :

$$\begin{aligned} F(z) &= 0 & z < 0 \\ &= 1 - \bar{e}^{z/\theta}. & 0 \le z \end{aligned}$$

هي دالة التوزيع التجميعي عند جميع نقط الاتصال للدالة $F(z)$. وعلي ذلك المتغير العشـــوائي Z_n له نهاية توزيع بدالة توزيع تجميعي $F_n(z)$. هذا المثال يعطينا نهاية توزيع غير خامل .

مثال (٩-٥) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس دالة كثافة

الاحتمال حيث $X_i \sim Exp(\theta)$ وإذا كان :

$Y_n = X_{1:n} \quad = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$ أوجد دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_n

وأوجد نهاية التوزيع .

الحل :

دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_n هي :

$$F_n(y) = 1 - e^{-ny/\theta} \qquad y > 0$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

الآن دالة التوزيع التجميعي $F(y)$ يمكن الحصول عليها كالتالي :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = 1 \qquad y > 0 \ (e^{-y/\theta} < 1 \text{ لأن })$$
$$= 0. \qquad y < 0$$

أي أن دالة التوزيع $F(y)$ سوف تكون لمتغير خامل عند القيمة y=0.

مثال (٩-٦) إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس دالة كثافة الاحتمال حيث $X_i \sim PAR(1,1)$ وإذا كانت دالة التوزيع التجميعي للمتغير X_i هي :

$$F(x) = 1 - (1 + x)^{-1} \qquad x > 0$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

أوجد نهاية دالة التوزيع للمتغير $Y_n = nX_{1:n} = n \ \min (X_1, X_2, ..., X_n)$.

الحل :

دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_n هي :

$$F_n(y) = 1 - \left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-n} \qquad y > 0$$

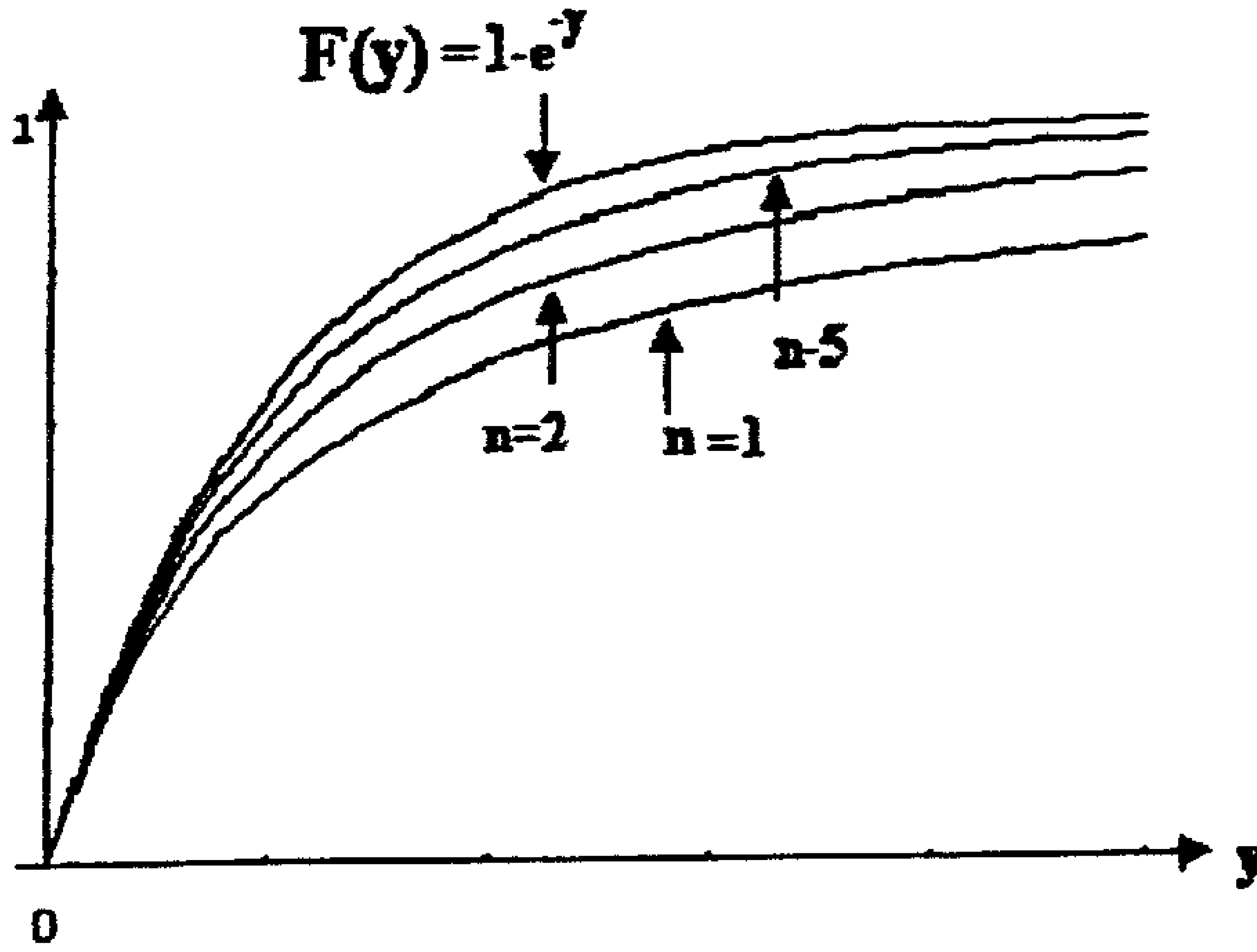
باستخدام الصيغة التالية :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{nb} = e^{cb} \qquad (٩-١)$$

فإن :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y) = 1 - \bar{e}^{y} \qquad y > 0$$
$$= 0 \ \text{elsewhere .}$$

والذي يمثل دالة التوزيع التجميعي لتوزيع أسي Exp (1) . شكل (٩-٢) يوضح بيـــان $F_n(y)$ عندما $n = 1,2,5$.



شكل (٩-٢)

مثال (٩-٧) المثال التالي يوضح أنه ليس من الضروري أنه يكون لمتابعة من المتغيرات العشوائية نهاية توزيع . للمتغيرات العشوائية في مثال (٩-٦) وإذا كان :

$Y_n = X_{n\,n} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ فإن دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_n هي :

$$F_n(y) = \left(\frac{y}{1+y}\right)^n \qquad y > 0$$

$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

ولأن $y/(1+y) < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = 0$ لجميع قيم y، أي أنها ليســـت دالـــة توزيع تجميعي لأنها لا تقترب من 1 عندما $y \to \infty$.

مثال (٩-٨) للمثال السابق (مثال (٩-٧)) وبفرض أن $Y_n = (1/n)\ X_{n:n}$ والذي لـــه داله التوزيع التجميعي :

$$F_n(y) = \left(1 + \frac{1}{ny}\right)^{-n} \qquad y > 0$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

باستخدام الصيغة (٩-١) نحصل علي نهاية داله التوزيع التجميعي كما يلي :

$$F(y) = e^{-1/y} \qquad y > 0$$
$$= 0 \ \text{elsewhere.}$$

مثال (٩-٩) للمثال (٩-٥) وإذا كان :

$$Y_n = (1/\theta)X_{n:n} - \ln n = (1/\theta)\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \ln\ n.$$

أوجد نهاية داله التوزيع للمتغير Y_n .

الحل :

دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_n هي :

$$F_n(y) = \left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)\bar{e}^{y}\right]^n \qquad y > -\ln\ n$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}$$

وعلى ذلك نهاية دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_n باستخدام الصيغة (٩-١) هي :

$$F(y) = \exp(-\bar{e}^{y}). \qquad -\infty < y < \infty$$

مثال (٩-١٠) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيـــع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ وإذا كان $Y_n = \overline{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ أوجد نهاية داله التوزيع للمتغـــر Y_n إذا كانت $Y_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ من نظرية (٨-١٤) حيث $a_i = 1/n$.

الحـــل :

دالة التوزيع للمتغير Y_n هي :

$$F_n(y) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(y-\mu)}{\sigma}\right)$$

نهاية الدالة $F_n(y)$ عندما $n \to \infty$ سوف تكون علي الشكل :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = 0 \quad y < \mu$$
$$= 1/2 \quad y = \mu$$
$$= 1 \quad y > \mu$$

أي أن نهاية $F_n(y)$ سوف تكون لمتغير خامل عند $y = \mu$

نظرية (٩-١) إذا كانت النهاية لمتابعة من دوال التوزيع التجميعي متصلة حيث: $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$ فإنه لكل $a_n > 0$, b_n يكون :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n y + b_n) = F(ay + b)$$

إذا وفقط إذا كان $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$.

نظرية (٩-٢) إذا كانت النهاية لمتابعة من دوال التوزيع التجميعي متصلة حيث $\lim_{n\to\infty} F_n(a_n y + b_n) = G(y)$ لكل $a_n > 0$ وكل القيم الحقيقية y فإن $\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n y + \beta_n) = G(y)$ لكل $\alpha_n > 0$ إذا وفقط إذا كان $\alpha_n / a_n \to 1$ و $(\beta_n - b_n)/a_n \to 0$ عندما $n \to \infty$.

(٩-٢) التقارب التصادفي Stochastic Coverngence

إذا كانت نهاية التوزيع لمتغير عشوائي X من النوع الخامل ، فإنه يقال أن التقارب تصادفي إلي ثابت باحتمال واحد . وعلي ذلك الأمثلة من (٩-١) إلي (٩-٣) توضح ليس فقط صيغة نهاية التوزيع ولكن أيضا مفهوم التقارب التصادفي . في مثال (٩-١) المتغير Y_n يتقارب تصادفيا إلي θ . في مثال (٩-٢) المتغير Y_n يتقارب تصادفيا إلي صفر وفي مثال (٩-٣) المتغير العشوائي Y_n يتقارب تصادفيا إلي 2 . سوف نستخدم متباينة تشيبيشف لبرهنة التقارب التصادفي .

نظرية (٩-٣) ليكن $F_n(y)$ هي دالة التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي Y_n والذي توزيعه يعتمد علي عدد صحيح موجب n . ليكن c ترمز للثابت c والذي لا يعتمد علي n . المتغير العشوائي Y_n يتقارب تصادفيا إلي الثابت c ، إذا وفقط إذا كان ، لكل $\epsilon > 0$ فإن :

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - c| < \epsilon) = 1.$$

البرهان :

أولا ، بفرض أن $\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - c| < \epsilon) = 1$ لكل $\epsilon > 0$ والمطلـــــوب إثبـــات أن المتغـــير العشوائي Y_n يقترب من الثابت c . أي أن المطلوب إثبات أن :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = 0 \qquad y < c$$
$$= 1 \qquad y > c$$

الآن :

$$P(|Y_n - c| < \epsilon) = F_n[(c+\epsilon)-] - F_n[(c-\epsilon)],$$

حيث : $F_n[(c+\epsilon)-]$ النهاية من اليسار للدالة $F_n(y)$ عند $y = c+\epsilon$ وعلي ذلك :

$$1 = \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - c| < \epsilon) = \lim_{n\to\infty} F_n[(c+\epsilon)-] - \lim_{n\to\infty} F_n[(c-\epsilon)],$$

ولأن $0 \le F_n(y) \le 1$ لكل قيم y ولكل عدد صحيح موجب n ، لذ لك لابد أن :

$$\lim_{n\to\infty} F_n[(c-\epsilon)] = 0, \lim_{n\to\infty} F_n[(c+\epsilon)-] = 1$$

والتي تكون صحيحة لكل $\epsilon > 0$ وعلي ذلك :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = 0 \qquad y < c$$
$$= 1. \qquad y > c.$$

لاكمال إثبات النظرية سوف نفترض أن

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = 0 \qquad y < c$$
$$= 1 \qquad y > c.$$

والمطلوب إثبات أن

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - c| < \epsilon) = 1,$$

لكل $\epsilon > 0$.

لأن :

$$P(|Y_n - c| < \epsilon) = F_n[(c+\epsilon)-] - F_n[(c-\epsilon)],$$

ولأن :

$$\lim_{n\to\infty} F_n[(c+\epsilon)-] = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n[(c-\epsilon)] = 0$$

لكل $\epsilon > 0$ نحصل علي النتيجة المطلوبة . وهنا يكمل برهان النظرية :

سوف نحصل علي حقيقة مفيدة من العلاقة التالية :

$$P(|Y_n - c| < \epsilon) + P(|Y_n - c| \geq \epsilon) = 1.$$

أي أن نهاية $P(|Y_n - c| < \epsilon)$ يساوي واحد صحيح إذا وفقط عندما :

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - c| \geq \epsilon) = 0$$

النهاية الأخيرة أيضا ضرورية وشرط كافي للتقارب التصادفي لمتغير عشوائي Y_n إلي ثابت c.

أيضا يطلق علي التقارب التصادفي أسم التقارب بالاحتمال ويعبر عنه بالرمز $Y_n \xrightarrow{P} c$ وبهـــذا فإن التقاربين متكافئان .

مثال (٩-١١) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس دالة التوزيـــع حيث $X_i \sim BIN(1,p)$ $i = 2,\ldots,3$. وإذا كان $\hat{p} = Y_n / n = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ والذي يطلق عليه نسبة صفة ما في مجتمع .أثبت أن $\hat{p} \xrightarrow{P} p$

البرهان :

للتسهيل سوف نضع $Y_n = Y$ وعلما أن $Y \sim BIN(n,p)$ وعلى ذلك :

$$Var(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} Var(Y) = npq/n^2, E(\hat{p}) = np/n = p.$$

وباستخدام متباينة تشيبيشف فإن :

$$P(|\hat{p} - p| \geq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

لأي $\epsilon > 0$ وعلى ذلك :

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{p} - p| \geq \epsilon) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{p} - p| < \epsilon) = 1$$

أي أن $\hat{p} \xrightarrow{P} p$.

في الأمثلة السابقة ، فإن دالة التوزيع التجميعي المضبوطة كانت معروفة لكل n محددة ونهاية التوزيع للمتغير $Y_n = u(X_1, X_2, ..., X_n)$ أمكن الحصول عليه باستخدام الصيغة $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$. الآن سوف نتناول كيفية إيجاد نهاية التوزيع للمتغير Y_n و n محددة باستخدام الدالة المولدة للعزوم والمقابلة لدالة التوزيع $F_n(y)$.

نهايات الدوال المولدة للعزوم Limiting Moments - Generating Functions

إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y_n موجودة والمقابلة لدالة التوزيع التجميعي $F_n(y)$ فإنه يمكن استخدامها في تقدير نهاية دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_n وذلك باستخدام خاصية الوحدانية للدوال المولدة للعزوم .سوف نرمز للدالة المولدة للعزوم للمتغير Y_n والتي تعتمد علي n بالرمز $M(t, n)$.

نظرية (٩-٤) إذا كان Y_n متغيرا عشوائيا له دالة التوزيع التجميعي $F_n(y)$ والدالة المولدة للعزوم $M(t; n)$ موجودة حيث $-h < t < h$ لجميع قيم n . إذا وجدت دالة التوزيع التجميعي $F(y)$ والدالة المولدة للعزوم المقابلة لها $M(t)$ والمعرفة لقيم $|t| \leq h_1 < h$ بحيث أن $\lim_{n\to\infty} M(t;n) = M(t)$ فإن Y_n يكون له نهاية توزيع بدالة توزيع تجميعي $F(y)$.

مثال (٩-١٢) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس دالة التوزيع حيث $X_i \sim BIN(1,p)$ $i = 2,\ldots,3$. ليكن $p \to 0$ عندما $n \to \infty$ بحيث أن $np = \mu$ حيث $\mu > 0$ ثابتة. أي أن $p = \mu / n$. المطلوب نهاية التوزيع للمتغير $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ وذلك عن طريقة أيجاد نهاية الدالة $M(t; n)$.

الحل :

$$M(t;n) = E\left(e^{tY_n}\right) = \left[(1-p) + pe^t\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{\mu e^t}{n} - \frac{\mu}{n}\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{\mu(e^t - 1)}{n}\right]^n.$$

ومن الصيغة (٩-١) فإن $\lim_{n\to\infty} M(t;n) = e^{\mu(e^t - 1)}$.

لجميع القيم الحقيقية من t . نهاية الدالة المولدة للعزوم التي حصلنا عليها هي الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمعلمة μ (متوسط التوزيع). أي أن $Y_n \xrightarrow{d} Y$ و $Y \sim POI(\mu)$. النتيجة من هذا المثال تساعدنا في استخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذي الحدين عندما n كبيرة و p صغيرة . هذا التقريب يكون جيد عندما $p \le 0.05$, $n \ge 20$ و جيد جدا عندما $n p \le 10$, $n \ge 100$. أي أننا نستخدم جداول بواسون في حساب الاحتمالات الخاصة بتوزيع ذي الحدين . لتسهيل استخدام التقريب سوف نفترض أن Y متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ذي الحدين بمعلمتين $n = 50, p = \frac{1}{25}$ وعلي ذلك :

$$P(Y \le 1) = \left(\frac{24}{25}\right)^{50} + 50\left(\frac{1}{25}\right)\left(\frac{24}{25}\right)^{49} = .400.$$

بما أن $\mu = np = 2$ فإن تقريب بواسون لهذا الاحتمال سوف يكون :

$$P(Y \le 1) = \bar{e}^2 + 2\bar{e}^2 \approx .406.$$

ومن جدول بواسون في ملحق (٣) فإن $P(Y \le 1) \approx 0.406$.

مثال (٩-١٣) إذا كان Z_n متغيراً عشوائياً يتبع $\chi^2(n)$. المتوسط والتباين للمتغير Z_n هما علي التوالي n, $2n$. نهاية التوزيع للمتغير العشوائي $Y_{n}=(Z_n-n)/\sqrt{2n}$ سوف نحصل عليه كالتالي :

$$M(t;n)=E\left\{\exp\left[t\left(\frac{Z_n-n}{\sqrt{2n}}\right)\right]\right\}$$

$$=\bar{e}^{tn/\sqrt{2n}}E\left(e^{tZ_n/\sqrt{2n}}\right)$$

$$=\exp\left[-\left(t\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(1-2\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^{-n/2}\right. \quad t<\frac{\sqrt{2n}}{2}.$$

باستخدام مفكوك تيلور يوجد عدد $d(n)$ بين 0 و $t\sqrt{2/n}$ بحيث أن :

$$e^{t\sqrt{2/n}}=1+t\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2+\frac{e^{d(n)}}{6}\left(t\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^3.$$

بوضع المجموع في الطرف الأيمن من الصيغة السابقة بدلا من $e^{t\sqrt{2/n}}$ في الصيغة الأخيرة من $M(t;n)$ نحصل علي :

$$M(t;n)=\left(1-\frac{t^2}{n}+\frac{\Psi(n)}{n}\right)^{-n/2}.$$

حيث :

$$\Psi(n)=\frac{\sqrt{2}\ t^3e^{d(n)}}{3\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{2}\ t^3}{\sqrt{n}}-\frac{2t^4e^{d(n)}}{3n}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} d(n)=0$ فإن $\lim_{n\to\infty} \Psi(n)=0$ لأي قيمة ثابتة t . وعلي ذلك:

$$\lim_{n\to\infty} M(t;n)=e^{t^2/2}.$$

لجميع القيم الحقيقية من t . الصيغة الأخيرة تمثل صيغة الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي الذي متوسطه صفر وتباينه 1 .

مثال (١٠-١٤) (قانون برنولي للأعداد الكبيرة) للمثال (٩-١١) وبفرض أن p ثابتة المطلوب إيجاد نهاية التوزيع للمتغير $\hat{p} = \frac{Y_n}{n}$.

الحـــل : باستخدام مفكوك تيلور :

$$e^u = 1 + u + u^2/2 + \ldots$$

حيث $u = t/n$ نحصل على :

$$M(t;n) = M_{\hat{p}}(t) = \left(pe^{t/n} + q\right)^n$$

$$= \left[p(1 + \frac{t}{n} + \ldots) + q\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{pt}{n} + \frac{d(n)}{n}\right]^n$$

حيث $d(n)/n$ يشمل على الحدود الغير مذكورة من مفكوك تيلور . باستخدام الصيغة :

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{c}{n} + \frac{d(n)}{n}\right]^{nb} = e^{cb}$$

عندما $\lim_{n\to\infty} d(n) = 0$ فـــإن :

$$\lim_{n\to\infty} M_{\hat{p}}(t) = e^{pt}$$

والتي تمثل الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي متقطع خامل عند $y = p$ وعلى ذلك $\hat{p}$ تقترب تصادفيا من p عندما $n \to \infty$ كما سبق أن أثبتنا من قبل في مثال (٩-١١) .

أى أن $\hat{p} \xrightarrow{d} p$.

مثال (٩-١٥) للمثال (٩-١١) وإذا كان :

$$W_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$$

المطلوب إيجاد نهاية التوزيع للمتغير W_n.

ويمكن تبسيط الصيغة السابقة بوضع $\sigma_n = \sqrt{npq}$ وعلى ذلك :

$$W_n = Y_n / \sigma_n - np/\sigma_n$$

وباستخدام مفكوك تيلور للمثال السابق فإن :

$$M_{W_n}(t) = e^{-npt/\sigma_n}(p\ e^{t/\sigma_n} + q)^n$$

$$= \left[e^{-pt/\sigma_n}(p\ e^{t/\sigma_n} + q)\right]^n$$

$$= \left[\left(1 - \frac{pt}{\sigma_n} + \frac{p^2t^2}{2\sigma_n^{\ 2}} + \ldots\right)\left(1 + \frac{pt}{\sigma_n} + \frac{p^2t^2}{2\sigma_n^{\ 2}} + \ldots\right)\right]^n$$

$$= \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{d(n)}{n}\right)^n.$$

حيث $d(n) \to 0$ عندما $n \to \infty$ وعلى ذلك :

$$\lim_{n\to\infty} M(t;n) = e^{t^2/2}.$$

والتي تمثل الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي.

نظرية (٩-٥) للمتابعة من المتغيرات العشوائية $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ وإذا كان :

$$Y_n \xrightarrow{P} Y$$

فــإن

$$Y_n \xrightarrow{d} Y$$

نظرية (٩-٦) إذا كان $Y_n \xrightarrow{P} c$ وعلى ذلك فإنه لأي داله $g(y)$ والمتصلة عند c فإن

$$g(Y_n) \xrightarrow{P} g(c)$$

نظرية (٩-٧) إذا كان Y_n , X_n متتابعتين من المتغيرات العشوائية بحيث أن $X_n \xrightarrow{P} c$

و $Y_n \xrightarrow{P} d$ فإن :

أ- $aX_n + bY_n \xrightarrow{P} ac + bd$

ب- $X_n Y_n \xrightarrow{P} cd$

ج- $X_n / c \xrightarrow{P} 1$ و $c \neq 0$

د- $1/X_n \xrightarrow{P} 1/c$ إذا كانت $P[X_n \neq 0] = 1$ لكل $n, c \neq 0$.

ذ- $\sqrt{X_n} \xrightarrow{P} \sqrt{c}$ إذا كان $P[X_n \geq 0] = 1$ لكل قيم n .

مثال (٩-١٦) إذا كان $Y_n \sim BIN(n, p)$ فإننــا نعلــم أن $\hat{p} = Y_n / n \xrightarrow{P} P$
وعلي ذلك $\hat{p}(1-\hat{p}) \xrightarrow{P} p(1-p)$.

نظرية (٩-٨) إذا كان X_n , Y_n متتابعتين من المتغيرات العشوائية بحيث أن :
$X_n \xrightarrow{P} c$ و $Y_n \xrightarrow{d} Y$ فإن :

أ- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} c + Y$

ب- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cY$

ت- $Y_n / X_n \xrightarrow{d} Y/c$ و $(c \neq 0)$

مثال (٩-١٧) من مثال (٩-١٥) نعلم أن :

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

أيضا نعلم أن $\hat{p}(1-\hat{p}) \xrightarrow{P} p(1-p)$ وبالقسمة علـــي $[\hat{p}(1-\hat{p}) / \; p(1-p)]^{\frac{1}{2}}$
نحصل على :

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

أيضا يمكن تعميم نظرية (٩-٦) .

نظرية (٩- ٩) إذا كان $Y_n \xrightarrow{d} Y$ فإنه لأي دالة متصلة $g(y)$ فإن $g(Y_n) \xrightarrow{d} g(Y)$ حيث $g(y)$ لا تعتمد علي n .

نظرية (٩-١٠) إذا كان $\sqrt{n}(Y_n - m)/c \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$ و إذا كانت $g(y)$ لها مشتقة تفاضلية غير صفرية عند $y = m$, $g'(m) \neq 0$ فإن :

$$\frac{\sqrt{n}[g(Y_n)-g(m)]}{|cg'(m)|} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

تمارين :

-١- إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية عددها n لها دالة التوزيع التجميعي $F(x) = 1-1/x$ عند $1 \leq x \leq \infty$ وصفر غير ذلك .

أ- أوجد دالة التوزيع التجميعي للمتغير $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

ب- أوجد نهاية التوزيع للمتغير Y_n .

ج- أوجد نهاية التوزيع للمتغير Y_n^n .

-٢- إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة عددها n لها دالة التوزيع التجميعي $F(x) = (1-e^{-x})^{-1}$ لجميع قيم x الحقيقية .

أ-هل $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ لها نهاية توزيع ؟

ب-هل المتغير $Y_n - \ln n$ له نهاية توزيع ؟ وما هو إذ وجد ؟

-٣- إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة لها دالة التوزيع التجميعي $F(x) = 1 - x^{-2}$ إذا كان $x > 1$, 0 غير ذلك . أوجد نهاية التوزيع لكل من :

أ- $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ؟

ب- $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

ت- $\max(X_1, X_2, ..., X_n)\, n^{-1/2}$

٤- إذا كان $Z_i \sim N(0,1)$ و إذا كان $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ متغيرات مستقلة استخدم الدالـة المولدة للعزوم لإيجاد نهاية التوزيع $\sum_{j=1}^{n} (Z_j + 1/n)/\sqrt{n}$.

الفصل العاشر

توزيعات المعاينة

Sampling Distributions

(١٠-١) الإحصاءات Statistics

تناولنا فى الفصل الثامن طرق مختلفة لاشتقاق توزيعات لدوال فى متغيرات عشوائية . فى هذا الفصل سوف نتناول بعض الدوال فى متغيرات عشوائية والمسماة بالإحصاءات statistics والتي لها أهمية كبيرة فى التطبيقات الإحصائية. يمكن تسهيل فهم الإحصاءات من المثاليين التاليين : إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية (مستقلة أو غير مستقلة) لها دالة كثافة احتمال مشتركة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، بفرض أن $n = 1$ وإذا كان X_1 متغيراً عشوائياً حيث $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن $Y = (X_1 - \mu)/\sigma$ متغيراً عشوائياً حيث $Y \sim N(0,1)$ و $Y=u(X)$. عندما n عدد صحيح موجب وإذا كان : $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع (أي لها نفس دالة كثافة الاحتمال) حيث $X_i \sim BIN(1,p)$, $i = 1,2,\ldots,n$. أي أن دالة كثافة الاحتمال للمتغير X_i على الشكل :

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere} .$$

وإذا كان $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ فإن Y متغيرا عشوائيا ، $Y = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ، حيث $Y \sim BIN(n, p)$. يلاحظ هنا أن $Y = u(X_1) = (X_1 - \mu)/\sigma$ دالة فى X_1 يعتمد على المعلمتين μ, σ بينما المتغير العشوائي $Y = u(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ لا يعتمد على p ، المعلمة الشاملة لدالة كثافة الاحتمال لكل من المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$. الاختلاف فى هاتين الدالتين يوضحهما التعريف التالي :

تعريف : الدالة فى متغير عشوائي أو أكثر والتي لا تعتمد على المعلمة المجهولة تسمى الإحصاء .

تبعا لهذا التعريف يمكن القول أن المتغير العشوائي $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ والذي ناقشناه فى أعلاه هو إحصاء بينما المتغير العشوائي $Y = (X_1 - \mu)/\sigma$ ليس إحصاء فيما عدا إذا كان كل من μ, σ معلومتين . ويجب أن ننوه هنا أنه بالرغم من أن الإحصاء لا يعتمد على معلمة مجهولة ، فإن توزيع الإحصاء قد يعتمد على المعالم المجهولة .

مثال (١٠-١) إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمال $f(x;\mu,\sigma^2)$ حيث μ,σ^2 معلمتين مجهولتين وعلى ذلك $X-\mu$ ليس احصاء . أيضا X/σ ليس إحصـــــاء لان كـل منهما يحتوى على معلمة مجهولة ولكن X و $X+3$ و $X^2+\log X$ تمثل إحصاءات .

مثال (١٠-٢) إذا كانت $X_1,X_2,\ldots,X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع له دالة كثافـــة الاحتمال $f(x;\theta)$ فإن :

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

يمثل إحصـــاء و :

$$\frac{1}{2}\{\min[X_1,X_2,\ldots,X_n]+\max[X_1,X_2,\ldots,X_n]\}$$

أيضا يمثل إحصاء . إذا كانت θ مجهولة فإن $\overline{X}-\theta$ ليس إحصاء وذلك لأنه يعتمد علـــى θ المعلمة المجهولة .

في هذا الجزء سوف نوضح أهمية دراسة توزيـــع الإحصـــاء : ليكــن X متغــيرا عشوائيا معرف على فضاء العينة S وإذا كان R هو فضاء المتغير العشوائي X . فى كثـــير من الحالات يكون توزيع المتغير العشوائي X معروف بينما معالمه غير معروفة . للحصـــول على معلومات عن هذا التوزيع (أو المعلمة المجهولة) فإننا نكرر التجربة العشوائية n مـــن المرات تحت نفس الظروف. ليكــن المتغــير العشــوائى X_i دالـــة فـــى النتيجـــة i حيـــث $i=1,2,\ldots,n$ فإن $X_1,X_2,\ldots,X_n$ تسمي مشاهدات لعينة عشوائية مأخوذة من التوزيـــع تحت الدراسة . بفرض أننا تمكنا من تعريف الإحصاء $Y=\hat{u}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ والـــذي دالة كثافته الاحتمالية $g(y)$ تم الحصول عليها . بمجرد إجراء التجربـــة وتكرارهـــا n مـــن المرات فإننا سوف نحصل على $X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n$ وعلى ذلك :

$y=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ تمثل قيمة معروفة . فى هذه الحالة ، فإننا نأمل أن تســـاعدنا هذه القيمة فى الحصول على معلومات عن المعلمة المجهولة (تقدير لها) وهذا يبرهن أهميـــة الإحصاء . على سبيل المثال بفرض أن X متغيرا عشوائيا يمثل قطر حفره تم حفرها بمثقـــاب معين . بفرض أن الخبرة الماضيـــة تفـــترض أن X يتبـــع التوزيـــع الطبيعـــي بمعلمتيـــن مجهولتين μ,σ^2.. الطريق الوحيد للحصول على معلومات عن المعلمتين μ,σ^2 هو إجـــراء التجربة وتكرارها تحت نفس الظروف وذلك بحفر ، على سبيل المثال ، 20 حفره ، $n=$ 20 ، وقياس قطر كل حفره X_i حيث $i=1,2,\ldots,20$. أي أن $X_1,X_2,\ldots,X_{20}$

مشاهدات لعينة عشوائية مختارة من توزيع طبيعي . بمجرد الحفر وقياس القطر لكـــل حفــرة سوف نحصل على 20 قيمة تساعدنا في الحصول على معلومات عن μ, σ^2 .

تعريف : إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيـــع بدالـــة كثافة احتمال $f(x)$. أي أن دالة كثافة الاحتمال للمتغيرات $X_1, X_2, ..., X_n$ هــي علـــى التوالي :

$$f_1(x_1) = f(x_1), f_2(x_2) = f(x_2), ..., f_n(x_n) = f(x_n).$$

وعلى ذلك داله كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشــوائية $X_1, X_2, ..., X_n$ هــي : $f(x_1)\ f(x_2)...f(x_n)$. في هذه الحالة يقال للمتغيرات العشوائية $X_1, X_2, ..., X_n$ أنها تمثل عينة عشوائية من توزيع له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$.

في البنود التالية سوف يكون اهتمامنا في اشتقاق توزيع بعض الإحصـــاءات ســواء المضبوطة أو التقريبية وذلك من التوزيع المشـــترك للمتغـيرات $X_1, X_2, ..., X_n$. هـذا التوزيع غالبا ما يطلق عليه توزيع المعاينة sampling distribution للإحصاء وذلك لأنـــه يتم اشتقاقه من التوزيع المشترك للمشاهدات في العينة العشوائية. المثال التالي يوضـــح كيــف يمكننا الحصول على التوزيع بالضبط لدالة في متغيرين عشـــوائيين (إحصـــاء) فـــي عينـــة عشوائية .

مثال (١٠-٣) إذا ألقي نردين مرتين وكان كل نرد له أربعة وجوه وإذا تم ملاحظة الوجـــه الظاهر على كل نرد وليكن X_1 عدد النقاط على النرد الأول و X_2 عدد النقاط على الـــنرد الثاني . وهذا يكافئ القول أن X_1, X_2 مشاهدتين من عينة عشوائية من الحجم $n = 2$ مـــن توزيع بدالة كثافة احتمال :

$$f(x) = \frac{1}{4} \qquad x = 1,2,3,4.$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

والمطلوب إيجاد توزيع المدى range أي : $W = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$.

الحل :

لإيجاد توزيع المدى W نعلم أن الحادثة { W = 0 } تحدث إذا وقعت الحادثة $\{X_1 = X_2\}$ وعلى ذلك :

$$h(0) = P(W = 0) = \frac{4}{16}.$$

الحادثة $\{W=3\}$ تقع إذا وقعت الحادثة $\{X_1=1, X_2=4\}$ أو $\{X_1=4 \;,\; X_2=1\}$
وعلى ذلك :

$$h(3)=P(W=3)=\frac{2}{16}.$$

وبنفس الشكل $h(1)=P(W=1)=6/16$ و $h(2)=P(W=2)=4/16$. لإيجاد متوسط W ، فإن :

$$E(W)=0\left(\frac{4}{16}\right)+1\left(\frac{6}{16}\right)+2\left(\frac{4}{16}\right)+3\left(\frac{2}{16}\right)=\frac{5}{4}.$$

ولإيجاد تباين W نحسب :

$$E(W^2)=(0)^2\left(\frac{4}{16}\right)+(1)^2\left(\frac{6}{16}\right)+(2)^2\left(\frac{4}{16}\right)+(3)^2\left(\frac{2}{16}\right)=\frac{5}{2}.$$

وعلى ذلك تباين W هو :

$$\sigma^2 = E(W^2)-[E(W)]^2$$
$$=\frac{5}{2}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{5}{2}-\frac{25}{16}=\frac{15}{16}.$$

الآن سوف نعرف ونناقش بعض الإحصاءات المهمة وسوف نبدأ بعزوم العينة .

(١٠-٢) الإحصاءات وعزوم العينة

Statistics and Sample Moments

تعريف : (عزوم العينة) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع معطى فإن العزم من الدرجة r حول الصفر ، يرمز له بالرمز m'_r ، يعرف كالتالى :

$$m'_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

عندما $r=1$ فإننا نحصل عي متوسط العينة sample mean والذي يرمز له بالرمز $\overline{X}$.
أى أن :

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

أيضا العزم من الدرجة r حول المتوسط ، يرمز له بالرمز m_r ، يعرف كالتالى :

$$m_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^r.$$

أى أن عزوم العينة تعتبر أمثله لإحصاءات .

نظرية (١٠-١) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع معطـــى . القيمـة المتوقعة لعزم العينة من الدرجة r (حول الصفر) يساوى العزم من الدرجة r للمجتمـع . أي أن :

$E[m'_r] = \mu'_r$ (إذا وجدت μ'_r)

أيضا :

$$Var[m'_r] = \frac{1}{n}\{E[X^{2r}] - (E[X^r])^2\}$$

$$= \frac{1}{n}[\mu'_{2r} - (\mu'_r)^2]$$ (إذا وجدت μ'_{2r})

البرهان :

$$E[m'_r] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^r\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i^r] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu'_r = \mu'_r.$$

$$Var[m'_r] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^r\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} Var[X_i^r]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \left\{E\left[X_i^{2r}\right] - (E[X_i^r])^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\{E[X^{2r}] - (E[X^r])^2\}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\mu'_{2r} - (\mu'_r)^2.\right]$$

بوضع $r = 1$ نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (١٠-١) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيـــع معطـــى وإذا كـــان $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ هو متوسط العينة ، فإن :

$$E[\overline{X}] = \mu \quad \text{and} \quad Var[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n},$$

حيث μ, σ^2 هما المتوسط والتباين على التوالـــى لدالــة كثافــة الاحتمــال $f(x)$ للمتغــير X_i حيث $i = 1,2,...,n$. خواص متوسط العينة سوف نتناولها بالتفصيل فى البند التالى :

تعريف : (تباين العينة) إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ عينة عشوائية مأخوذة مـــن توزيـــع معطى فإن :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad n > 1$$

يسمى تباين العينة .

يرجع سبب اختيار S^2 بدلا من m_2 في تعريفنا لتباين العينة (كـــلا S^2 و m_2 يمثـــلان مقياس للانتشار) هو أن القيمة المتوقعة لتباين العينة S^2 يساوى تباين المجتمع .

نظرية (١٠-٢) إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ عينة عشوائية من توزيع معطى وإذا كان :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

فإن :

$$E[S^2] = \sigma^2,$$
$$Var[S^2] = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right) \qquad n > 1 .$$

البرهان :

(فقط سوف نبرهن الجزء الأول) . مره أخرى

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] , \quad \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] .$$

سوف نستفيد فى المتطابقة التالية فى البرهان

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu)^2 \qquad (١-١٠)$$

حيث أن :

$$\sum (X_i - \mu)^2 = \sum (X_i - \overline{X} + \overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sum [(X_i - \overline{X}) + (\overline{X} - \mu)]^2$$
$$= \sum [(X_i - \overline{X})^2 + 2(X_i - \overline{X})(\overline{X} - \mu) + (\overline{X} - \mu)^2]$$

$$= \sum (X_i - \overline{X})^2 + 2(\overline{X} - \mu)\sum (X_i - \overline{X}) + n(\overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sum (X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu)^2 .$$

باستخدام المتطابقة (١٠-١) نحصل على :

$$E\left[S^2\right] = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu)^2] - n\ E[(\overline{X} - \mu)^2]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - n\ \mathrm{Var}[\overline{X}] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\ \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2 .$$

تعتبر عزوم العينة أمثلة لإحصاءات وعلى ذلك يمكن استخدامها لتقدير عزوم المجتمع . على سبيل المثال m'_r يقدر μ'_r و $\overline{X}$ يقدر μ , S^2 يقدر σ^2 . فى كل حالة فإننا نحصل على دالة فى العينة يمكن ملاحظتها واستخدام القيمة لهذه الدالة فى العينة وذلك لتقدير معلمة المجتمع المجهولة .

(١٠-٣) متوسط العينة Sample Mean

العزم الأول للعينة حول الصفر هو متوسط العينة ويعرف كالتالي :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

حيث $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع معطى بدالة كثافة احتمال $f(x)$ ، . يعتبر $\overline{X}$ داله فى المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ وعلى ذلك فإنه يمكن الحصول على توزيع $\overline{X}$. عموماً ، توزيع $\overline{X}$ يعتمد على داله كثافة الاحتمال $f(x)$ للمتغير X_i ، حيث $i = 1, 2, \ldots, n$ ، ، والتي اختيرت منها العينة العشوائية . التوزيع بالضبط لمتوسط العينة

$\overline{X}$ سوف يعطى لبعض دوال كثافة الاحتمال. يعطى $\overline{X}$ بعض المعلومات عن المتوسط μ للدالة $f(x)$.أى أن واحد من أهداف أخذ العينة هو تقدير μ بمتوسط العينة $\overline{X}$.

(١٠-٣-١) المتوسط والتباين Mean and Variance

نظرية (١٠-٣) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع معطى ، بدالة كثافة احتمال $f(x)$، والذى لـه متوسط μ وتباين منتهى σ^2 ، وإذا كان $\overline{X}=(1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ فإن :

$$E[\overline{X}]=\mu \ , \ \ Var[\overline{X}]=\sigma^2_{\overline{X}}=\frac{1}{n}\sigma^2.$$

تعتبر النظرية (١٠-٣) بالضبط تكرار النتيجة (١٠-١) . $E(\overline{X})=\mu$ يعنى أن فى المتوسط $\overline{X}$ يساوى المعلمة μ أو أن توزيع $\overline{X}$ يرتكز عند μ . أيضا يعنى $Var[\overline{X}]=(1/n)\sigma^2$ أن الانتشار لقيم $\overline{X}$ حول μ صغير للعينة ذات الحجم الكبير إذا ما قورنت بالعينة الصغيرة .

(١٠-٣-٢) قانون الأعداد الكبيرة Law of Large Numbers

ليكن $f(x;\theta)$ داله كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي X . أوضحنا فى البند السابق أن واحد من الطرق للحصول على معلومات عن داله كثافة الاحتمال $f(x;\theta)$ هو ملاحظة عينة عشوائية وعمل استدلال من العينة إلى المجتمع (كل المشاهدات تحت الدراسة) . إذا كانت θ معلومة فإن دوال كثافة الاحتمال تكون معرفة تماماً ولا يكون من الضرورى الاستدلال من العينة إلي المجتمع .

إذا كان $E[X]$ يمثل متوسط التوزيع μ لمتغير عشوائى X . المشكلة تقدير μ . من المعروف أن $E[X]$ هو المتوسط لعدد لا نهائى من قيم المتغير العشوائى X . فى أى مشكلة فإننا نلاحظ فقط عدد محدود من قيم المتغير العشوائى X (عينه عشوائية من الحجم n) السؤال الأن هل العدد المحدود من قيم X تكفى للاستدلال عن $E[X]$ ، الإجابة نعم وسوف نبرهن ذلك مما يسمى بالقانون الضعيف للأعداد الكبيرة weak law of large numbers . ينص القانون على التالى : العدد الصحيح الموجب n يمكن تقديره بحيث أنـه إذا اختيرت عينة عشوائية من الحجم n أو أكبر وذلك بدالـة كثافـة احتمـال $f(x)$ (حيث $E(X)=\mu$) ، يمكننا جعل الاحتمال يقترب من 1 (حسب الرغبة) أن متوسط العينة

$\overline{X}$ ينحرف عن μ بمقدار اختيارى صغير جدا . بصورة أوضح فإن القانون الضعيف للأعداد الكبيرة ينص على أنه يوجد عدد صحيح n لأى عدد ين اختياريين $\delta, \in$ حيث $\in > 0$ و $0 < \delta < 1$ وبحيث إذا اختيرت عينة عشوائية من الحجم n أو أكبر من داله كثافة احتمال $f(x)$ وإذا كان متوسط العينه هو $\overline{X}_n$ يتم حسابه ، فإن الاحتمال سوف يكون أكبر من $1-\delta$ (يقترب من 1) أن $\overline{X}_n$ ينحرف عن μ بقيمة أقل من $\in$ (وبالمثل يقترب من μ) . ويمكن التعبير عن القانون الضعيف للأعداد الحقيقية كالتالي :

لأى $\in > 0$ و $0 < \delta < 1$ يوجد عدد صحيح n بحيث أنه لكل الأعداد الصحيح $m \geq n$ فإن :

$$P|\overline{X}_m - \mu| < \in \geq 1-\delta$$

نظرية (١٠-٤) (القانون الضعيف للأعداد الكبيرة) إذا كانت $f(x)$ دالة كثافة احتمال بمتوسط μ وتباين منتهى σ^2 وإذا كان $\overline{X}_n$ متوسط العينة العشوائية من الحجم n من $f(x)$ ، ليكن $\delta, \in$ عددين بحيث أن $\in > 0$ و $0 < \delta < 1$. إذا كان n أى عدد صحيح أكبر من $\sigma^2 / \in^2 \delta$ فإن :

$$P[-\in < \overline{X}_n - \mu < \in] \geq 1-\delta$$

البرهان :

من متباينة تشيبيشف فإن :

$$\begin{aligned} P[-\in < \overline{X}_n - \mu < \in] &= P[|\overline{X}_n - \mu| < \in] \\ &= P[|\overline{X}_n - \mu|^2 < \in^2] \\ &\geq 1 - \frac{E[(\overline{X}_n - \mu)^2}{\in^2} \\ &= 1 - \frac{(1/n)\sigma^2}{\in^2} \geq 1-\delta \end{aligned}$$

حيث $\delta > \sigma^2 / n\in^2$ أو $n > \sigma^2 / \in^2 \delta$

مثال (١٠-٤) بفرض أن توزيع له متوسط غير معلوم وتباين يساوى الواحد الصحيح . ما هو حجم العينة اللازم اختياره بحيث يكون لدينا على الأقل احتمال قدره 0.95 أن الفرق المطلق $|\overline{X}_n - \mu|$ أقل من 0.5 .

الحل :

$\sigma^2 = 1$, $\in = .5$, $\delta = .05$ وعلى ذلك :

$$n > \frac{\sigma^2}{\delta \in^2} = \frac{1}{.05(.5)^2} = 80.$$

مثال (١٠-٥) ما هو حجم العينة اللازم اختياره بحيث أن الفرق المطلق $|\overline{X}_n - \mu|$ أقل من $.5\sigma$ باحتمال قدره على الأقل $.99$ ؟

الحل :

, $\in = .5\sigma$, $\delta = .01$ وعلى ذلك :

$$n > \frac{\sigma^2}{\delta \in^2} = \frac{\sigma^2}{.01(.5)^2 \sigma^2} = \frac{1}{.01(.5)^2} = 400.$$

مثال (١٠-٦) ليكن $\overline{X}_n$ يرمز لمتوسط عينة عشوائية من الحجم n مأخوذة من توزيع له متوسط μ وتباين موجب σ^2 . وعلى ذلك المتوسط والتباين للإحصاء $\overline{X}_n$ هو μ و σ^2 / n على التوالي . اعتبر لكل ثابت $\in > 0$ وتبعا لمتباينة تشيبيشف فإن :

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \in) \leq \frac{\sigma^2}{\in^2 n}.$$

وعلى ذلك لأي $\in > 0$ فإن :

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \in) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2}{n \in^2} = 0$$

وعلى ذلك $\overline{X}_n$ تتقارب تصادفيا من μ إذا كانت σ^2 منتهية . النوع الأقوى من التقارب يعطى من الصيغة $P(\lim_{n \to \infty} |Y_n - c| < \in) = 1$ حيث $\in > 0$. فى هذه الحالة يقال أن Y_n تتقارب إلى c باحتمال 1 . من المعلوم أن متوسط العينة $\overline{X}_n$ يتقارب باحتمال 1 من متوسط التوزيع μ والذى يعتبر شكل من القانون القوى للأعداد الكبيرة .

(١٠-٤) الدوال العشوائية المرتبطة بالتوزيعات الطبيعية

Random Functions Associated with Normal Distributions :

غالبا ، فى التطبيقات الإحصائية يفترض أن المجتمع الذى اختيرت منـــه العينـــة يتبـــع التوزيع الطبيعى $N(\mu,\sigma^2)$ ويكون الاهتمام بتقدير المعلمتين μ,σ^2 أو إجـــراء اختبـــارات فروض تخص μ أو σ^2. عادة يستخدم ، فى هذه الحالة ، الإحصاء $\overline{X}$ ، متوسط العينـــة ، وتباين العينة S^2 . وعلى ذلك فإننا نحتاج إلى معرفة توزيع كل من μ,S^2 أو دوال فيهما .

نظرية (١٠-٥) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من الحجم n من توزيع طبيعـي $N(\mu,\sigma^2)$ ، فإن توزيع متوسط العينة $\overline{X}=(1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ هو $N(\mu,\sigma^2/n)$

البرهان :

بما أن الدالة المولده للعزوم لكل X هى :

$$M_X(t)=\exp(\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}) ,$$

فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير (الإحصاء) $\overline{X}$ ، :

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

وذلك من نظرية (٨- ١٥) وبوضع $a_i=1/n, i=1,2,\ldots,n,$ هي ،

$$M_{\overline{X}}(t)=\left\{\exp\left[\mu\left(\frac{t}{n}\right)+\frac{\sigma^2(t/n)^2}{n}\right]\right\}^n$$

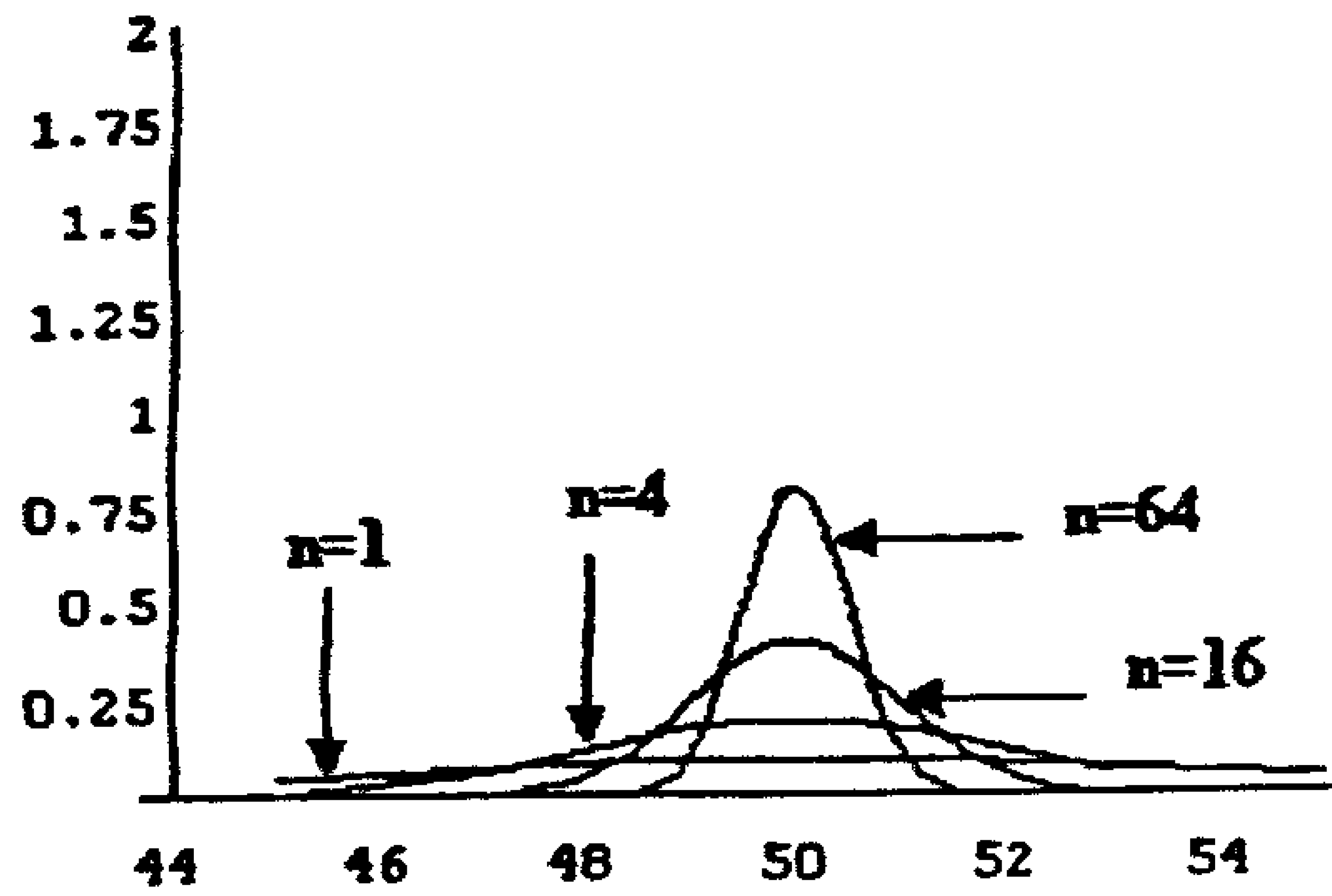
$$=\exp\left[\mu t+\frac{(\sigma^2/n)t^2}{2}\right].$$

وبما أن الدالة المولدة للعزوم تمتاز بخاصية الوحدانية . وحيـــث أن $M_{\overline{X}}(t)$ تمثـل الدالــة المولدة للعزوم لمتغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وتباين σ^2/n فإن متوسط العينة $\overline{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2/n أى أن $\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$

توضح نظرية (١٠-٥) أنه إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ ، فإن التوزيع الاحتمالى للإحصاء $\overline{X}$ أيضا طبيعي بنفس المتوسط μ ولكن بتباين σ^2/n . وهذا يعنى أن $\overline{X}$ لها احتمال أكبر للوقوع فى فترة تحتوى على μ عن مشاهدة واحدة ، لتكن X_1 . على سبيل المثال إذا كان $\mu = 50$, $\sigma^2 = 16$, $n = 64$ فإن $P(49 < \overline{X} < 51) = 0.9544$ بينما $P(49 < X_1 < 51) = 0.1974$ والذى يتضح اكثر فى المثال التالى :

مثال (١٠-٧) لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعى ($N(50, 16)$. نعلم أن توزيع $\overline{X}$ هو ($N(50, 16/n)$. لتوضيح تأثير n فإن بيان دالة كثافة الاحتمال للمتغير $\overline{X}$ معطى فى شكل (١٠-١) حيث $n = 1, 4, 16, 64$. عندما $n = 64$ قارن بين المساحة التى تمثل :

$$P(49 < X_1 < 51)\ ,\ P(49 < \overline{X} < 51).$$



شكل (١٠-١)

نظرية (١٠-٦) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من الحجم n من توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ ، وإذا كان :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \ ,$$

فـــإن :

(أ) $\overline{X}$ والحدود $X_i - \overline{X}$ حيث $i = 1, \ldots, n$ مستقلين .

(ب) $\overline{X}, S^2$ مستقليـــــن .

(ج) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ تتبع $\chi^2(n-1)$.

البرهـــان :

لاثبـــــات (أ) سوف نستفيد من العلاقة التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{x} - \mu)^2}{\sigma^2} \quad (١٠-٢)$$

وذلك لأن الحد :

$$2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(\overline{x} - \mu)(x_i - \overline{x})}{\sigma^2} = \frac{2(\overline{x} - \mu)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0.$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ يمكن التعبير عنها كالتالي :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu)^2\right)\right].$$

الأن بفرض التحويلة التالية :

$$y_1 = \overline{x} \quad , \quad y_i = x_i - \overline{x} \quad , \quad i = 2, \ldots, n$$

نعلم أن :

$$x_1 - \overline{x} = -\sum_{i=2}^{n}(x_i - \overline{x}) = -\sum_{i=2}^{n} y_i$$

وعلى ذلك :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \left(-\sum_{i=2}^{n} y_i\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} y_i^2$$

و بالتالي فإن :

$$g(y_1,y_2,...,y_n)=\frac{|J|}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}$$

$$\times\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(-\sum_{i=2}^{n}y_i\right)^2+\sum_{i=2}^{n}y_i^2+n(y_1-\mu)^2\right]\right\}.$$

يمكن بسهولة إثبات أن $J=n$ وعلى ذلك $|J|=n$. يمكن تقسيم الدالـة $g(y_1,y_2,...,y_n)$ إلى دالتين هامشيتين بحيث أن الأولى في y_1 والثانية تخص فقط $y_2,y_3,...,y_n$ والتـي تثبت أن $Y_1=\overline{X}$ والحدود $Y_i=X_i-\overline{X}$ حيث $i=2,...,n$ مستقلين . ولان :

$X_1-\overline{X}=-\sum\limits_{i=2}^{n}(X_i-\overline{X})$ فإن هذا يعنى أن $\overline{X}$, $X_1-\overline{X}$ أيضا مستقلان .

يمكن إثبات (ب) من (أ) وذلك لأن S^2 دالة فقط في $X_i-\overline{X}$.

الآن سوف نبرهن (ج). مرة أخرى بتطبيق المعادلة (١٠-٢) على العينة العشوائية فإن :

$$W\overset{\wedge}{=}\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+Z^2.$$

بما أن $(X_i-\mu)/\sigma$ حيث $i=1,2,...,n$ متغيرات عشوائية مستقلة تتبع

$N(0,1)$ وعلى ذلك : $W=\sum\limits_{i=1}^{n}((X_i-\mu)/\sigma)^2$ من نتيجة (٨-٤) لنظريـة (٨-١٧) ، يتبع $\chi^2(n)$. أيضا بما أن $\overline{X}$ يتبع $N(\mu,\sigma^2/n)$ فإن :

$$Z^2=\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2=\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$$

يتبع $\chi^2(1)$ من مثال (٨-٨٢) .

ويما أنه من (ب) $\overline{X}$, S^2 مستقلين فإن Z^2 , $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ مستقلين وعلى ذلك الدالة المولدة للعزوم للمتغير W هى :

$$E\left[e^{t\{(n-1)S^2/\sigma^2+Z^2\}}\right]$$
$$=E\left[e^{t(n-1)S^2/\sigma^2}e^{tZ^2}\right]$$
$$=E\left[e^{t(n-1)S^2/\sigma^2}\right]E\left[e^{tZ^2}\right].$$

وبما أن W و Z^2 يتبعان χ^2 فإن :

$$(1-2t)^{-n/2}=E\left[e^{t(n-1)S^2/\sigma^2}\right](1-2t)^{-\frac{1}{2}}.$$

والتى تكافئ :

$$E\left[e^{t(n-1)S^2/\sigma^2}\right]=(1-2t)^{-(n-1)/2},\quad t<\frac{1}{2}.$$

وهى الدالـــة المولـــدة للعـــزوم لمتغـــير عشـــوائى يتبـــع $\chi^2(n-1)$ وعلـــى ذلـــك فـــإن $(n-1)S^2/\sigma^2$ يتبع $\chi^2(n-1)$. من نتيجة (٨-٤) لنظرية (٨ - ١٧) نجد أنـــه عند المعاينة من توزيع طبيعى فإن :

$$W=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$

تتبع $\chi^2(n)$ و:

$$U=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$$

تتبع $\chi^2(n-1)$.

أى أنه عند استبدال متوسط المجتمع μ في $\sum (X_i-\mu)^2$ بمتوسط العينة $\overline{X}$ فإننـــا نفقـــد درجة حرية واحدة .

مثال (١٠-٨) إذا كان X_1, X_2, X_3, X_4 عينة عشوائية من الحجم 4 من توزيـــع طبيعـــى $N(76.4\ ,\ 383)$ فإن :

$$W=\sum_{i=1}^{4}\frac{(X_i-76.4)^2}{383}$$

يتبع $\chi^2(4)$ أيضا :

$$U = \sum_{i=1}^{4} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{383}$$

يتبع $\chi^2(3)$. على سبيل المثال :

$$P(0.711 \le W \le 7.779) = 0.95 - 0.1 = .85,$$
$$P(0.352 \le U \le 6.251) = 0.95 - 0.1 = .85.$$

في الإحصاء التطبيقي يكون الاهتمام في تقدير المتوسط μ أو اختبارات الفروض التي تخص المتوسط عندما يكون التباين σ^2 مجهول . بفرض أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن $(\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ يتبع $N(0,1)$ و $(n-1)S^2/\sigma^2$ يتبع $\chi^2(n-1)$ وبما أن المتغيرين مستقلين فإن :

$$T = \frac{(\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{(n-1)S^2/\sigma^2(n-1)}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$

يتبع توزيع t بدرجات حرية $v = n-1$. الإحصاء T يلعب دوراً مهماً في التطبيقات الإحصائية.

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ عينتين عشوائيين من توزيعين طبيعيين $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ على التوالي . توزيع $\overline{X}$ هو $N(\mu_X, \sigma_X^2/n)$ وتوزيع $\overline{Y}$ هو $N(\mu_Y, \sigma_Y^2/m)$. بما أن $\overline{Y}$ و $\overline{X}$ مستقلين فإن توزيع $\overline{X} - \overline{Y}$ هو $N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m)$ من نظرية (٨- ١٤) وعلى ذلك :

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}}$$

يتبع $N(0, 1)$. الإحصائيين :

$$\frac{(n-1)\ S_X^2}{\sigma_X^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_X^2}$$

و

$$\frac{(m-1)\ S_Y^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (Y_i - \overline{Y})^2}{\sigma_Y^2}$$

هما توزيعين $\chi^2(n-1)$ و $\chi^2(m-1)$ على التوالى . وعلى ذلك توزيع المتغير :

$$U = \frac{(n-1)\ S_X^2}{\sigma_X^2} + \frac{(m-1)\ S_Y^2}{\sigma_Y^2}$$

يتبع $\chi^2(n+m-2)$. المتغير العشوائى T والذى يتبع توزيع t بدرجات حرية :
$v = n + m - 2$ هو :

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/(n+m-2)}}$$

$$= \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_X-\mu_Y)/\sqrt{\sigma_X^2/n+\sigma_Y^2/m}}{\left[(n-1)S_X^2/\sigma_X^2+(m-1)S_Y^2/\sigma_Y^2\right]/[n+m-2]}.$$

في التطبيقات الإحصائية قد يفترض أن $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ وفى هذه الحالة فإن :

$$T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\left\{[(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2]/(n+m-2)\right\}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right]}}.$$

حيث T وتوزيعه لا يعتمد على σ^2 . الصيغة الأخيرة للمتغير T تستخدم لمقارنة متوسطي توزيعين طبيعين .

مثال (١٠-٩) إذا كان $X_1, X_2, ..., X_9$ و $Y_1, Y_2, ..., Y_{16}$ عينتين عشوائيين من الحجم $n = 9$, $m = 16$ مأخوذتين من توزيعين مستقلين طبيعيين $N(\mu_Y, \sigma^2), N(\mu_X, \sigma^2)$ على التوالي ، حيث σ^2 مجهولة . وعلى ذلك :

$$P\left(-2.306 < \frac{\overline{X}-\mu_X}{S_X/\sqrt{9}} < 2.306\right) = .95. \qquad (١٠-٣)$$

وذلك لأن $(\overline{X}-\mu_X)/(S_X/\sqrt{9})$ تتبع توزيع t بدرجات حرية $v=8$ أيضا .

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\left[8\ S_X^2+15\ S_Y^2)/23\right]\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right]}}$$

يتبع توزيع t بدرجات حرية $v=9+16\text{-}2=23$ وعلى ذلك :

$$P(-1.714\le T\le 1.714)=.90. \qquad (١٠-٤)$$

يجب أن نتذكر أن المعادلتان (١٠-٣) و (١٠-٤) بعد الحصول على البيانات وحساب $\overline{X},\overline{Y},S_X^2,S_Y^2$ يمكن حسابهما ويتبقى فقط μ_X,μ_Y مجهولتان .

أيضا توزيع F له تطبيقات كثيرة فى نظرية المعاينة الطبيعية . على سبيل المثال بفرض أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ عينتين عشوائيين من الحجم n , m على التوالى مأخوذتين من توزيعين طبيعيين $N(\mu_X,\sigma_X^2), N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ على التوالي. نعلم أن $(n-1)S_X^2/\sigma_X^2$ يتبع $\chi^2(n-1)$ و $(m-1)S_Y^2/\sigma_Y^2$ يتبع $\chi^2(m-1)$. وعلى ذلك الاستقلال بينهما يعنى استقلال S_X^2 , S_Y^2 وبالتالي فإن :

$$F=\frac{(m-1)S_Y^2/\sigma_Y^2(m-1)}{(n-1)S_X^2/\sigma_X^2(n-1)}=\frac{S_Y^2/\sigma_Y^2}{S_X^2/\sigma_X^2},$$

له توزيع F بدرجات حرية $v_1=m-1$, $v_2=n-1$. الصيغة الأخيرة للمتغير F تستخدم لمقارنة تبايني توزيعين طبيعيين .

(١٠-٥) نظرية النزعة المركزية

The Central Limit Theorem

وجدنا من البند (١٠-٢) أن المتوسط $\overline{X}$ لعينة عشوائية من الحجم n من توزيع بمتوسط μ وتباين $\sigma^2>0$ متغيرا عشوائيا يحقق الآتى :

$$E(\overline{X}) = \mu \quad , \quad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

وعلى ذلك عندما تزيد n فإن التباين للمتغير $\overline{X}$ يقل . من الواضح أن توزيع $\overline{X}$ يعتمد على n ، أى أننا نهتم بمتتابعة من التوزيعات .

فى نظرية (١٠-٥) أوجدنا دالة كثافة الاحتمال للمتغير $\overline{X}$ عند المعاينة من توزيع طبيعى $N(\mu \ ,\sigma^2)$ وقد وجدنا أن توزيع $\overline{X}$ هو $N(\mu \ ,\sigma^2/n)$. يوضح شكل (١٠-١) منحنيات لدالة كثافة الاحتمال للمتغير $\overline{X}$ عند قيم مختلفة من n . يتضح انه عندما تزيد n فإن الاحتمال يرتكز فى فترة صغيرة مركزها μ أي أنه بزيادة n فإن $\overline{X}$ تتجه إلى الاقتراب من μ أو أن $(\overline{X} - \mu)$ يتجه إلى الاقتراب من الصفر .

عموماً بوضع :

$$W_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} ,$$

حيث $\overline{X}$ هو متوسط العينة العشوائية من الحجم n من توزيع له متوسط μ وتباين σ^2 ، وعلى ذلك لكل قيمة موجبة صحيحة n فإن :

$$E(W_n) = E\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = \frac{E(\overline{X}) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\mu - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 0 ,$$

و

$$Var(W_n) = E(W_n^2) = E\left[\frac{(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2/\ n}\right]$$

$$= \frac{E[(\overline{X} - \mu)^2]}{\sigma^2/\ n} = \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n} = 1$$

السؤال الآن ما هو توزيع W_n عندما تزيد n ؟

عند المعاينة من توزيع طبيعى فإنه تبعا لنظرية (١٠-٥) نعلم أن $\overline{X}$ يتبع $N(\mu \ ,\sigma^2/n)$ وعلى ذلك W_n يتبع $N(0,1)$ لكل عدد صحيح موجب n . وبالتالى فإن نهاية التوزيع للمتغير

W سوف يكون $N(0,1)$. النظرية التالية سوف تثبت أنه عند المعاينة من توزيع آخـــر غـــير التوزيع الطبيعى فإن نهاية التوزيع للمتغير W_n سوف يكون أيضا $N(0,1)$. تعد هذه النظريـــة من أهم النظريات الإحصائية فى نظرية الاحتمال كما أن لها من فائدة كبيرة وخاصة فيما يتعلـــق بحساب الاحتمالات واختبارات الفروض وبدونها فإن كثير من الحسابات تكون مستحيلة.

نظرية (١٠-٧) نظرية النزعة المركزية

Central Limit Theorem

إذا كان $\overline{X}$ هو متوسط عينة عشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ من الحجم n من توزيـــع لـــه متوسط منتهى μ وتباين منتهى موجب σ^2 فإن توزيع المتغير العشوائي التالي :

$$W_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

هو $N(0, 1)$ عند $n \to \infty$.

ملحوظة : في التطبيق تستخدم نظرية النزعة المركزية عندما n كبيرة بدرجة كافية وتكون دالة التوزيع التجميعي للمتغير W_n هي :

$$P(W_n \le w) \approx \int_{-\infty}^{w} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^{2/2}} dz = \Phi(w).$$

البرهان :

$$M_{W_n}(t) = E\left[e^{tW_n}\right] = E\left[\exp(tW_n)\right]$$
$$= E\left[\exp\left(t \; \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)\right]$$
$$= E\left[\exp\left(\frac{t}{n} \sum \; \frac{X_i - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= E\left[\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{t}{n}.\frac{X_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\left(\frac{t}{\sqrt{n}}.\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

وذلك تحت فرض أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقلين . الآن إذا كان $Y_i=(X_i-\mu)/\sigma$ فإن $M_{Y_i}(t)$ هي الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y_i مستقلة عن i لأن كل Y_i لها نفس التوزيع. ليكن $M_Y(t)$ يرمز إلى $M_{Y_i}(t)$ فإن :

$$\prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\left(\frac{t}{\sqrt{n}}.\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)\right]=\prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\left(\frac{t}{\sqrt{n}}.Y_i\right)\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{n} M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\prod_{i=1}^{n} M_{Y}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\left[M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

وعلى ذلك :

$$M_{W_n}(t)=\left[M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

المشتقة التفاضلية من الدرجة r للدالة المولدة للعزوم $M_Y(t/\sqrt{n})$ والمقدرة عند $t=0$ تعطى العزوم من الدرجة r حول المتوسط لدالة كثافة الاحتمال $f(\cdot)$ مقسومة على $(\sigma\sqrt{n})^r$. وعلى ذلك يمكن كتابة :

$$M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=1+\frac{\mu_1}{\sigma}\ \frac{t}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2!}\ \frac{\mu_2}{\sigma^2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2+\frac{1}{3!}\ \frac{\mu_3}{\sigma^3}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3+\ldots,$$

وبما أن $\mu_1=0$ ، $\mu_2=\sigma^2$ فإن الدالة $M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ يمكن كتابتها على الشكل :

$$M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3!\sqrt{n}}\frac{\mu_3}{\sigma^3}t^3+\frac{1}{4!n}\frac{\mu_4}{\sigma^4}t^4+\dots\right).$$

(٥-١٠)

الآن $\lim_{n\to\infty}(1+u/n)^n=e^{\frac{1}{2}t^2}$ ، حيث u تمثل الحـــدود داخـــل القـــوس فى المعادلـــة (١٠-٥) وعلى ذلك $\lim_{n\to\infty}M_{W_n}(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}$ ، أي أن نهاية توزيـــع W_n هو التوزيـــع الطبيعى القياسى الذى له الدالة المولدة على الشكل $e^{\frac{1}{2}t^2}$. درجة التقريب تعتمد ، بالطبع على حجم العينة وعلى دالة كثافة الاحتمال .

تعنى نظرية النزعة المركزية أنه إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ عينة عشـــوائية مـــن أى توزيع بمتوسط μ وتباين σ^2 وبصرف النظر عما إذا كان هذا التوزيع متصل أو منفصل فـــإن توزيع المتغير العشوائى $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma}$ هو تقريباً التوزيع الطبيعى القياسى وعليه فإن توزيـــع $\bar{X}_n$ سوف يتبع تقريباً التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وتباين σ^2/n وهو مطابق للقول أن المجموع $\sum_{i=1}^{n}X_i$ يتوزع تقريباً طبيعى بمتوسط $n\mu$ وتباين $n\sigma^2$. وغالبا ما نقول أن عنـــد معـــايرة $\bar{X}$ standardized كالتالي :

$$W_n=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

فإن $W_n \xrightarrow{d} Z\sim N(0,1)$ والذي يعتبر حالة خاصة من التعريف التالي.

تعريف : إذا كان $Y_1 , Y_2 , \dots , Y_n$ متابعة من المتغيرات العشوائية وإذا كان c , m ثـــابتين بحيث أن :

$$W_n=\frac{Y_n-m}{c/\sqrt{n}}\xrightarrow{d}Z\sim N(0,1)$$

عندما $n \to \infty$ ~~حيث W_n دالة في $X_1, X_2, \ldots, X_n$~~ فإننا نقول أن Y_n لها توزيع طبيعي محازى أو تقريباً asymptotically distribution بمتوسط محازى m وتباين محازى c^2/n .

مثال (١٠-١٠) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع منتظم حيث $X_i \sim UNF(0,1)$ وإذا كان :

$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. لان $E(X_i) = 1/2$ و $Var(X_i) = 1/12$ سوف يكون لدينا التقريب التالى : $Y_n \sim N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{12}\right)$ على سبيل المثال ، عندما $n = 12$ فإن التقريب : $Y_{12} - 6 \sim N(0, 1)$. هذا التقريب يستخدم في توليد أعداد عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي القياسي وذلك في التطبيقات على الحاسب الآلي . بالطبع فإن ذلك يحتاج إلى توليد 12 عدد عشوائي يتبع التوزيع المنتظم وذلك للحصول على عدد عشوائي واحد يتبع التوزيع الطبيعي القياسي .

مثال (١٠-١١) إذا كان $\overline{X}$ هو متوسط عينة عشوائية من الحجم $n = 15$ من توزيع له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = (3/2)\ x^2 \qquad -1 < x < 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere} \ .$$

هنا $\mu = 0$, $\sigma^2 = 3/5$ أوجد $P(0.03 \le \overline{X} \le 0.15)$.

الحـل :

$$P(0.03 \le \overline{X} \le 0.15) = P\left(\frac{0.03-0}{\sqrt{3/5}/\sqrt{15}} \le \frac{\overline{X}-0}{\sqrt{3/5}/\sqrt{15}} \le \frac{0.15-0}{\sqrt{3/5}/\sqrt{15}}\right)$$
$$= P(0.15 \le W_n \le 0.75)$$
$$\approx P(0 < Z < .75) - P(0 < Z \le .15)$$
$$= 0.2734 - 0.0596 = 0.2138.$$

حيث $Z \sim N(0, 1)$.

مثال (١٠-١٢) إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ تمثل عينة عشوائية من الحجم 20 مأخوذة من توزيع منتظم UNIF(0,1) . هنا $E(X_i)=1/2$, $Var(X_i)=1/12$ حيث $i=1,2,\ldots,n$ إذا كان $Y_n=\sum_{i=1}^{20} X_i$ أوجد :

(أ) $P(Y_n \le 9.1)$ (ب) $P(8.5 \le Y_n \le 11.7)$

الحل :

(أ)
$$P(Y_n \le 9.1)=P\left(\frac{Y_n-20(1/2)}{\sqrt{20/12}} \le \frac{9.1-10}{\sqrt{20/12}}\right)$$

$$=P(W_n \le -0.697)$$
$$\approx P(Z \le -0.697)=.5-P(0<Z\le 0.697)=.5-.258$$
$$=0.242.$$

(ب)
$$P(8.5 \le Y_n \le 11.7)=P\left(\frac{8.5-10}{\sqrt{5/3}} \le \frac{Y_n-10}{\sqrt{5/3}} \le \frac{11.7-10}{\sqrt{5/3}}\right)$$
$$=P(-1.162 \le W_n \le 1.317)$$
$$\approx P(0<Z<1.162)+P(0<Z<1.317)$$
$$=0.3770+0.4066=0.7836.$$

مثال (١٠-١٣) إذا كان $\overline{X}$ هو المتوسط لعينة عشوائية من الحجم 25 من توزيع له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = x^3/4 \qquad 0<x<2$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد $P(1.5 \le \overline{X} \le 1.65)$.

الحل :

$\mu=8/5=1.6$, $\sigma^2=8/75$ وعلى ذلك :

$$P(1.5 \le \overline{X} \le 1.65)$$
$$=P\left(\frac{1.5-1.6}{\sqrt{8/75}/\sqrt{25}} \le \frac{\overline{X}-1.6}{\sqrt{8/75}/\sqrt{25}} \le \frac{1.65-1.6}{\sqrt{8/57}/\sqrt{25}}\right)$$
$$=P(-1.531 \le W_n \le 0.765)$$
$$\approx P(-1.531<Z<0.765)$$
$$=0.437+0.2794=0.7164.$$

توضح الأمثلة السابقة كيف أن نظرية النزعة المركزية يمكن استخدامها كتقريب لبعض الاحتمالات التي تخص المتوسط $\overline{X}$ أو المجموع $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ لعينة عشوائية . أي أن $\overline{X}$ تقريبا تتبع $N(\mu, \sigma^2/n)$ وأن Y_n تقريبا تتبع $N(n\mu, n\sigma^2)$ عندما n تكون كبيرة بدرجة كافية حيث μ, σ^2 هما المتوسط والتباين للتوزيع تحت الدراسة والذى اختيرت منه العينة . عموما ، إذا كانت n كبيرة عن 25 أو 30 فإن تلك التقريبات سوف تكون جيدة . إذا كان التوزيع تحت الدراسة متماثل ، له منوال وحيد ، وكان من النوع المتصل ، فإن العينة من الحجم $n = 4$ أو $n = 5$ يمكن أن تعطى تقريب جيد . بالإضافة إلى ذلك إذا كان التوزيع الاحتمالى تقريبا طبيعى فإن $\overline{X}$ سوف يكون لها توزيع يقترب من الطبيعى عندما $n = 2$ أو $n = 3$. فى الحقيقة ، فإننا نعلم أنه إذا كان التوزيع الذى اختيرت منه العينة طبيعى $N(\mu, \sigma^2)$ فإن $\overline{X}$ تتبع بالضبط التوزيع الطبيعى $N(\mu, \sigma^2/n)$ لأي $n = 1,2,3,...$.

الأمثلة التالية سوف تساعد فى فهم القواعد السابقة .

مثال (١٠-١٤) إذا كان X_1, X_2, X_3, X_4 عينة عشوائية من توزيع منتظم (UNIF (0,1 فإن $\mu = 1/2$, $\sigma^2 = 1/12$. سوف نقارن بيان الدالة $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ببيان الدالة $N[(n(1/2), n(1/12))]$ عندما $n = 2,4$ على التوالي.

لإيجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y_n = X_1 + X_2$ فإننا نحصل أولا على دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1, X_2 حيث :

$$f(x_1, x_2) = 1 \qquad 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

دالة التوزيع التجميعى للمتغير Y_n هي :

$$G(y) = P(Y_n \le y) = P(X_1 + X_2 \le y).$$

عندما $0 < y < 1$ فإن :

$$G(y) = \int_0^y \int_0^{y-x_1} 1 \, dx_2 \, dx_1 = \frac{y^2}{2},$$

وعندما $1 < y < 2$ فإن :

$$G(y) = 1 - \int_{y-1}^{1} \int_{y-x_1}^{1} 1 \, dx_2 \, dx_1 = 1 - \frac{(2-y)^2}{2} .$$

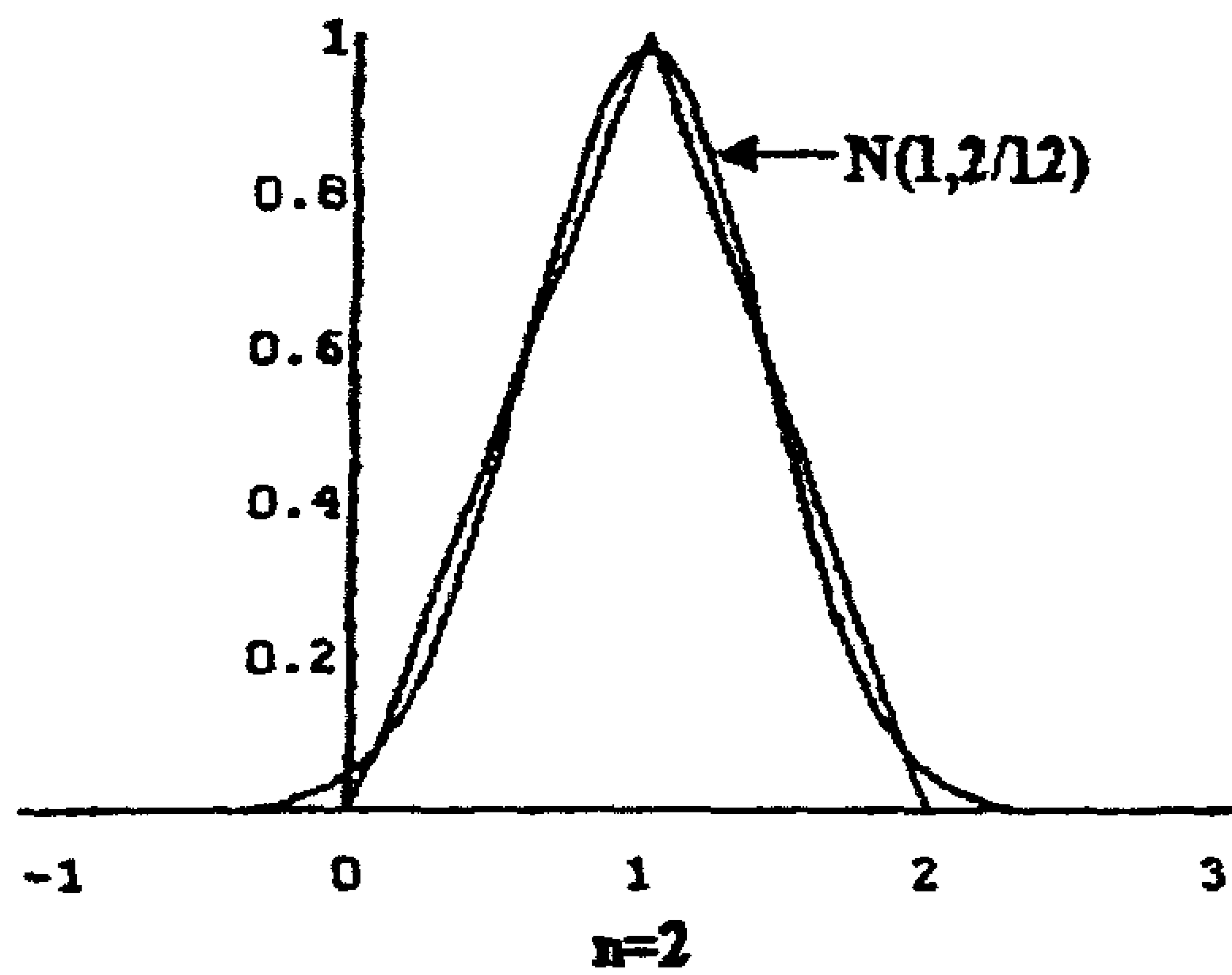
وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_n هي :

$$g(y)=\frac{dF(y)}{dy}=y \qquad 0<y<1$$

$$=2-y \qquad 1<y<2.$$

بإضافة النقطة $g(1)=1$ نحصل على دالة كثافة الاحتمال المثلثة والذى بيانها فى شكل (١٠-٢). أيضا في شكل (١٠-٢) بيان دالة كثافة الاحتمال $N[2(1/2),2(1/12)]$ موضحة أيضا .

شكل (١٠-٢)



دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y_n=X_1+X_2+X_3+X_4$ يمكن الحصول عليها بنفس الطريقة السابقة وسوف تكون على الشكل :

$$g(y)=\frac{y^3}{6} \qquad 0\le y<1$$

$$=\frac{-3y^3+12y^2-12y+4}{6} \qquad 1\le y<2$$

$$=\frac{3y^3-24y^2+60y-44}{6} \qquad 2\le y<3$$

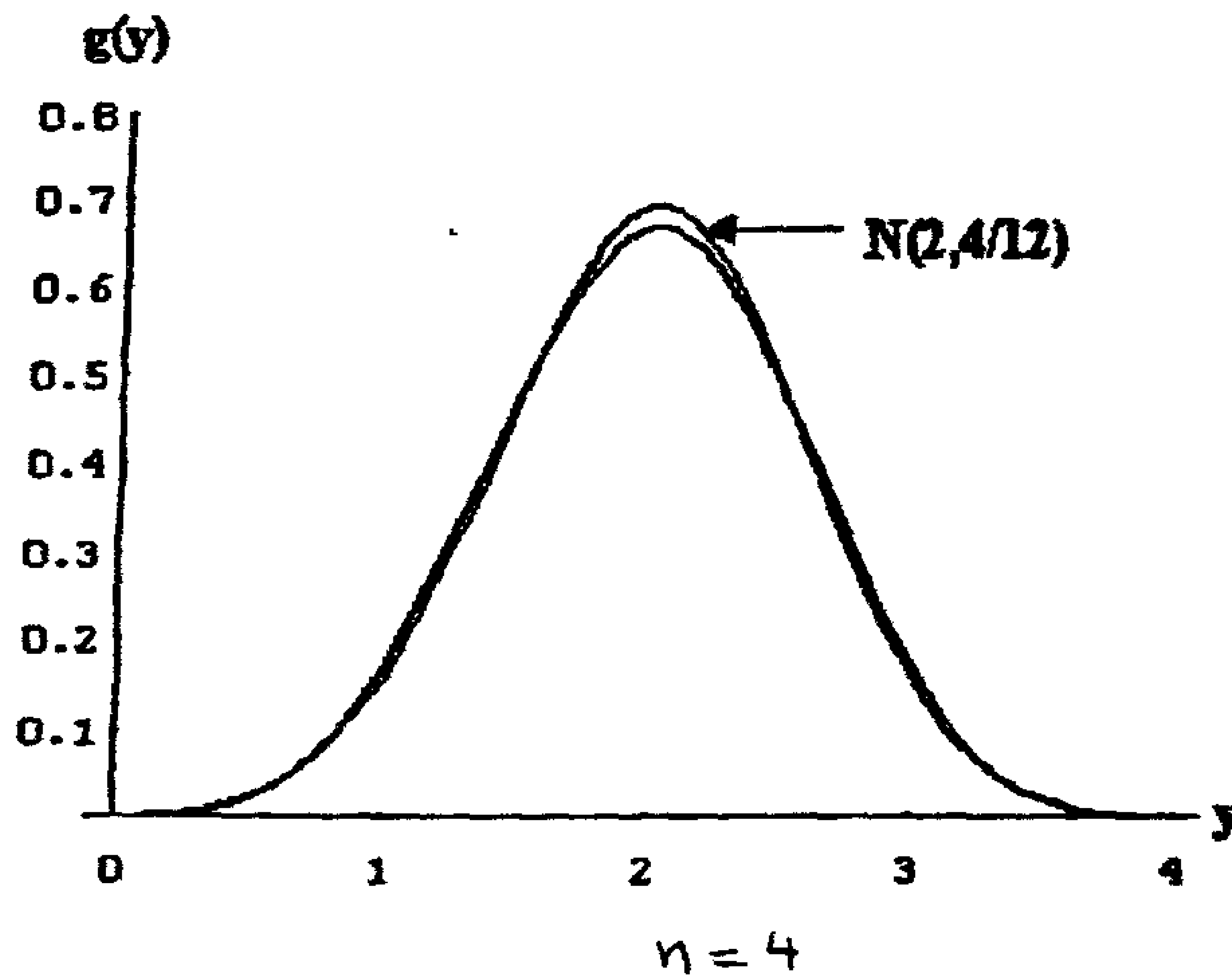
$$=\frac{-y^3+12y^2-48y+64}{6} \qquad 3\le y\le 4.$$

هذه الدالة موضحة فى شكل (١٠-٣) مع الدالة $N[4(1/2), 4(1/12)]$.عند اهتمامنا فى أيجاد $P(1.7 \le Y \le 3.2)$ فإننا يمكن حساب :

$$\int_{1.7}^{3.2} g(y)\ dy$$

والتي تكون صعبه فى الحساب . فى هذه الحالة يكون من الأسهل استخدام التقريب الطبيعى .

شكل (١٠-٣)



في المثال (١٠-١٤) يتضح أنه حتى للقيم الصغيرة من n مثل n=4 فإن مجموع مشاهدات العينة تقريبا تتبع التوزيع الطبيعى . المثال التالى يوضح أنه لبعض التوزيعات تحت الدراسة فإن n لا بد أن يكون كبير بدرجة كافية . النتيجة التالية سوف تساعدنا فى حل المثال التالى :

ليكن $f(x)$, $F(x)$ هما دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التجميعي للمتغير X على التوالى من النوع المتصل له متوسط μ وتباين σ^2 . ليكن $W=(X-\mu)/\sigma$. دالة التوزيع التجميعي للمتغير W تعطى كالتالى :

$$G(w)=P(W\le w)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le w\right)$$
$$=P(X\le \sigma w+\mu)=F(\sigma w+\mu).$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير W تعطى كالتالى :

$$g(w)=\frac{dF(\sigma w+\mu)}{dw}=\sigma f(\sigma w+\mu).$$

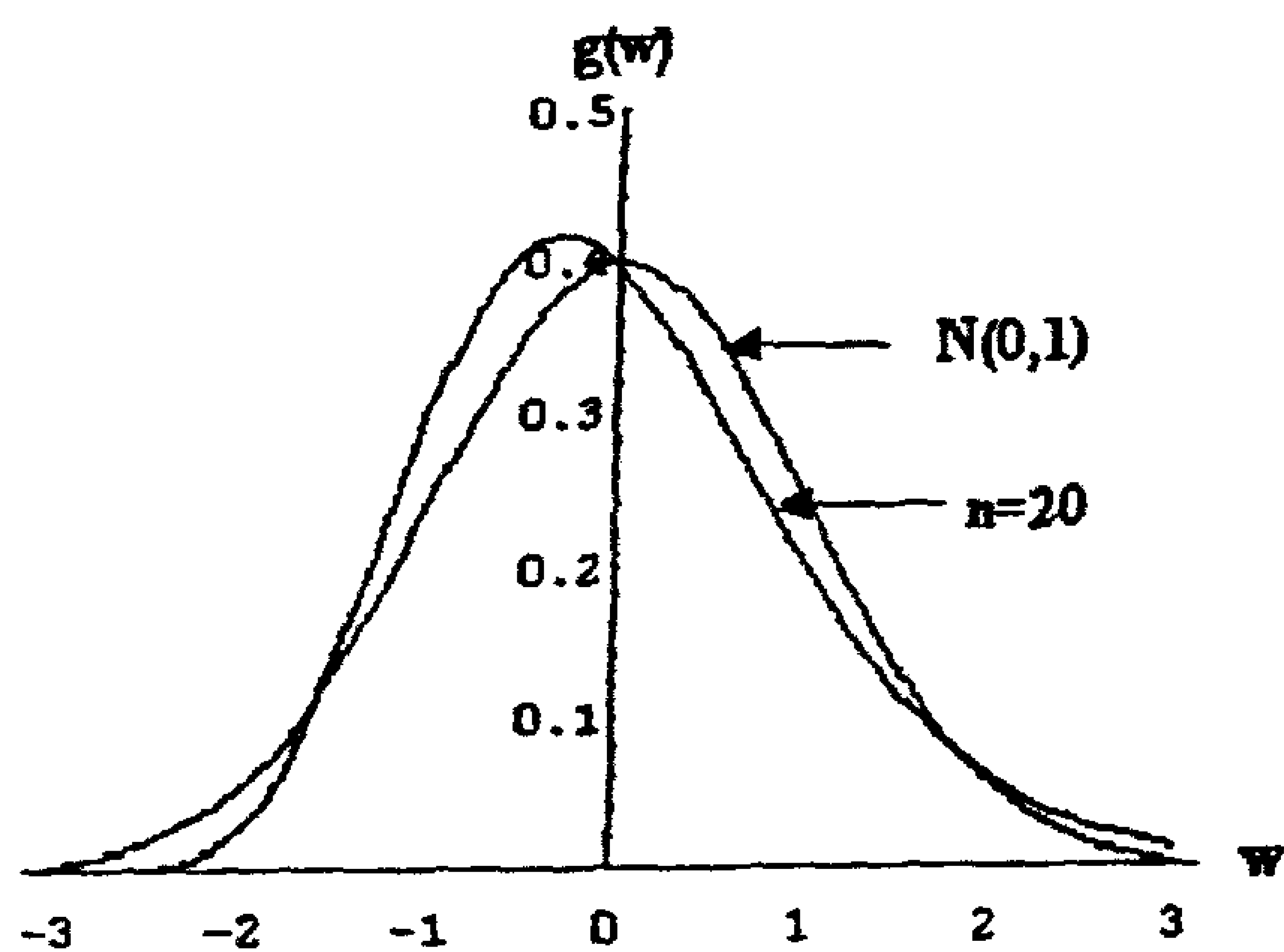
مثال (١٠-١٥) إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_{100}$ عينة عشوائية من الحجم 100 من توزيع $\chi^2(1)$. إذا كان $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ فإن $Y_n\sim\chi^2(n)$, $E(Y_n)=n$, $Var(Y_n)=2n$. ليكن :

$$W_n=\frac{Y_n-n}{\sqrt{2n}}.$$

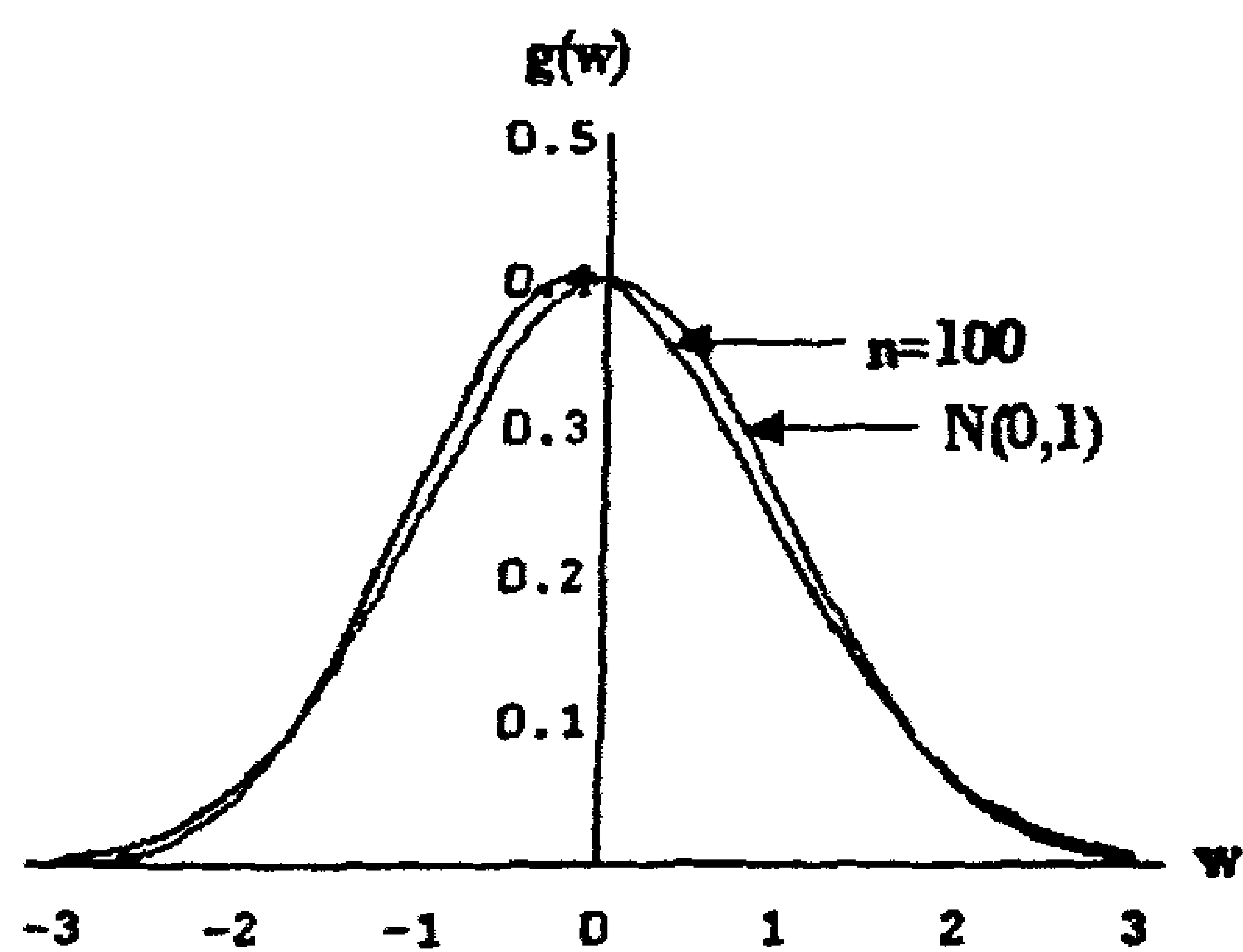
فإن دالة كثافة الإحتمال للمتغير W_n تعطى كالتالى :

$$g(w)=\sqrt{2n}\,\frac{(\sqrt{2}nw+n)^{n/2-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{n/2}}\,\bar{e}^{(\sqrt{2n}w+n)/2},$$
$$-n/\sqrt{2n}<w<\infty$$

تذكر أن $w>-n/\sqrt{2n}$ تقابل $y>0$. شكل (١٠-٤) وشكل (١٠-٥) يعطى بيان W_n مع $N(0,1)$ عند $n=20$, $n=100$ على التوالى .



شكل (١٠-٤)



شكل (١٠-٥)

مثال (١٠-١٦) إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_{100}$ عينة عشوائية من الحجم 100 مأخوذة من توزيع له دالة كثافة الاحتمال $UNIF\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ وعلى ذلك $E(X_i)=0$, $Var(X_i)=\frac{1}{12}$ حيث $i=1,2,...,100$. إذا كان $Y_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ أوجد $P(-5 \le Y \le 5)$.

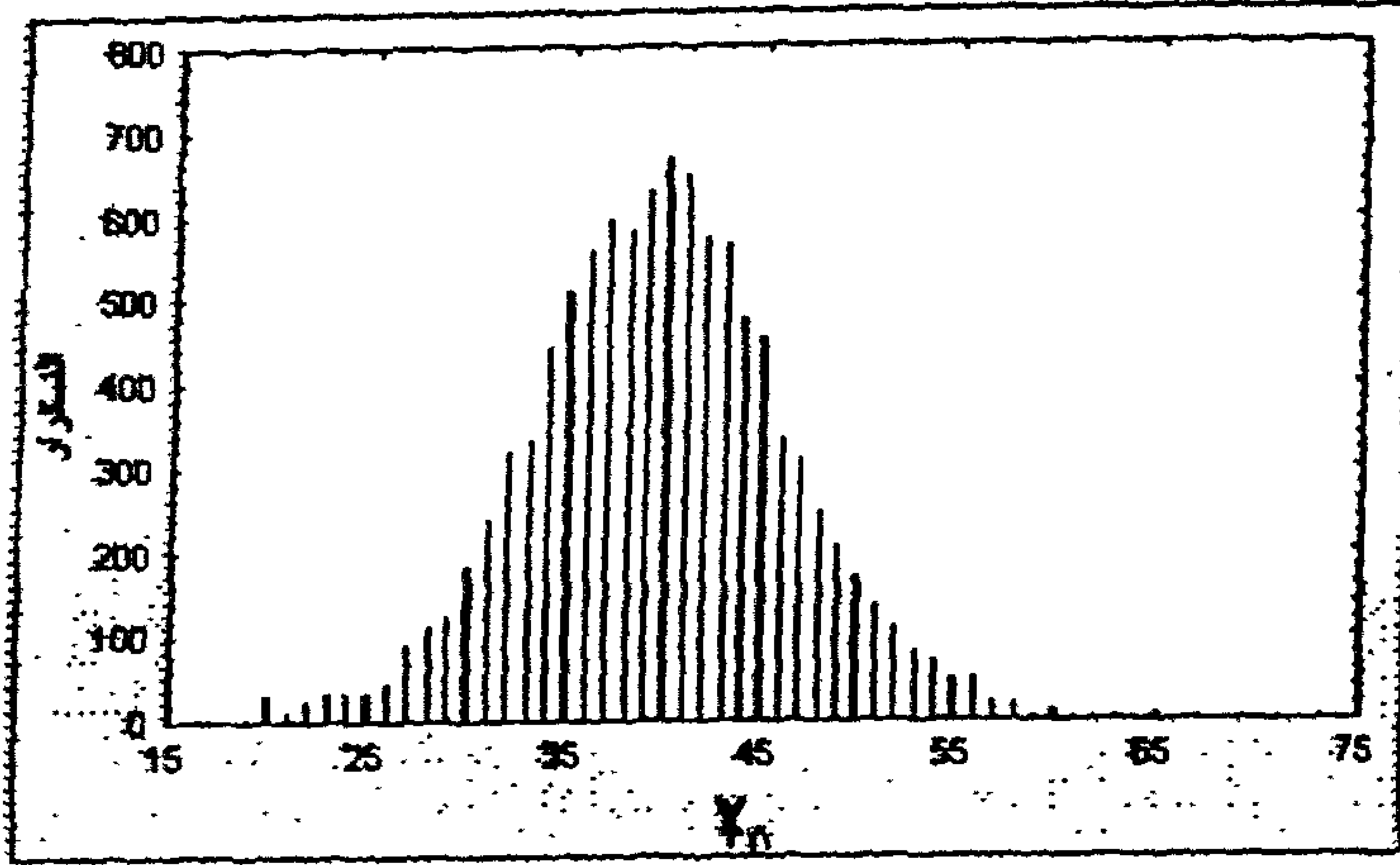
الحل :

$$P\left(\frac{-5-0}{\sqrt{1/12}.\sqrt{100}}<\frac{Y_n-0}{\sqrt{1/12}.\sqrt{100}}<\frac{5-0}{\sqrt{1/12}.\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx P(-1.732 \le Z \le 1.732)=2(.4582)=.9164.$$

مثال (١٠-١٧) إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_{20}$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع له دالة كثافة احتمال $POI(\mu)$ ($\mu=2$) وإذا كان $Y_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$. تبعا لنظرية النزعة المركزية فإن Y_n تقريبا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 40 = (2)(20) . باستخدام الحاسب الآلي تم توليد 10,000 قيمة من Y_n والمعطاه في الجدول التالي حيث القيمة في العمود الأول والثالث والتكرار في العمود الثاني والرابع.

19	1	42	573
20	2	43	566
21	4	44	476
22	5	45	454
23	12	46	331
24	18	47	309
25	26	48	248
26	44	49	206
27	89	50	167
28	114	51	133
29	125	52	110
30	183	53	83
31	236	54	71
32	319	55	48
33	333	66	29
34	442	57	21
35	508	58	19
36	558	59	5
37	598	60	10
38	579	61	3
39	627	62	1
40	664	63	1
41	648	64	1
		65	1

المدرج التكراري لهذا التوزيع التكراري موضح فى شـــكل (١٠-٦). يلاحـظ أن المـدرج التكرارى يقترب من التوزيع الطبيعى .



شكل (١٠-٦)

مثال (١٠-١٨) إذا تم تسجيل زمن الوصول لشخص ما إلى محطة القطار خــلال 100 يــوم والمطلوب حساب احتمال أن متوسط وصوله إلى المحطة خلال 100 يوم يقع بين 17 ,18 دقيقة إذا كان زمن الوصول يتبع توزيع UNIF [15 , 20] .

أوجد : $P(17 \le \overline{X} \le 18)$.

الحـل :

$E(X) = 17.5$ و $Var(X) = \frac{25}{12}$ دقيقة وعلى ذلك :

$$
\begin{aligned}
& P(17 \le \overline{X} \le 18) \\
& = P\left(\frac{17-17.5}{0.144} \le \frac{\overline{X}-17.5}{0.144} \le \frac{18-17.5}{0.144}\right) \\
& \approx P(-3.472 \le Z \le 3.472) \\
& = 2.P(0 \le Z \le 3.472) \\
& = 2(0.5) = 1.0.
\end{aligned}
$$

مثال (١٠-١٩) إذا تم شحن إنتاج مصنع إلى المستورد وإذا كانت العبوات التي تصل لها متوسط 300 رطل وانحراف معياري 50 رطل . بفرض أنه تم اختيار عينة عشوائية من الحجم n = 25 عبوة . المطلوب حساب احتمال أن الوزن الكلى لعبوات العينة العشوائية من الحجم 25 يزيد عن 8200 .

الحل : يمكن تحويل المشكلة بدلاله متوسط الوزن للعينة ، أي أن المطلوب أيجاد احتمال أن متوسط العينة يزيد عن 8200/25 = 328 رطلا لكل عبوة . وبما أن متوسط المجتمع $\mu = 300$ رطلا والانحراف المعياري للمجتمع هو $\sigma = 50$ رطلا فإن متوسط العينة $\overline{X}$ له متوسط $\mu = 300$ رطلا وانحراف معياري $\sigma/\sqrt{n} = 10$ رطلا والذي تقريبا يتبع التوزيع الطبيعي .
الآن المطلوب حساب ($P(\overline{X} > 328$. وعلى ذلك :

$$= P(\overline{X} > 328)$$
$$= P\left(\frac{\overline{X} - 300}{10} > \frac{328 - 300}{10}\right)$$
$$\approx P(Z > 2.8) = 0.5 - 0.4974 = 0.0026.$$

(١٠-٦) تقريبات لتوزيع ذي الحدين

Approximation for the Binomial Distribution

فى هذا البند سوف نوضح كيفية استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين .
ليكن $X_1, X_2, ..., X_n$ عينة عشوائية من توزيع بر نولى بمتوسط $\mu = \rho$ وتباين $\sigma^2 = p(1-p)$ حيث $0 < p < 1$. أى أن $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ حيث $Y_n \sim b(x; n, p)$.
تنص نظرية النزعة المركزية على أن :

$$W_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \qquad (\hat{p} = Y_n / n)$$

يتبع توزيع N (0, 1) عندما $n \to \infty$.

وعلى ذلك إذا كانت n كبيرة بدرجة كافية و p ثابتة فإن الاحتمالات لتوزيـــع ذى الحديــن يمكن تقريبها باستخدام التوزيع الطبيعي $N[np, np(1-p)]$.

مثال (١٠–٢٠) إذا كان احتمال أن لاعب كرة السلة يحصل على هـــدف هـــو $p=.5$. بفرض أنه سوف يلعب 20 مباراة ما هو احتمال أن يحصل على هدف على الأقل 9 مرات.

الحـــل :

$$Y_{20} = X_1 + X_2 + \dots + X_{20}$$

الاحتمال بالضبط هو :

$$\begin{aligned} P(Y_{20} \geq 9) &= 1 - P[Y_{20} \leq 8] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{8} b(k; 20, 0.5) = 1 - 0.252 \\ &= 0.748. \end{aligned}$$

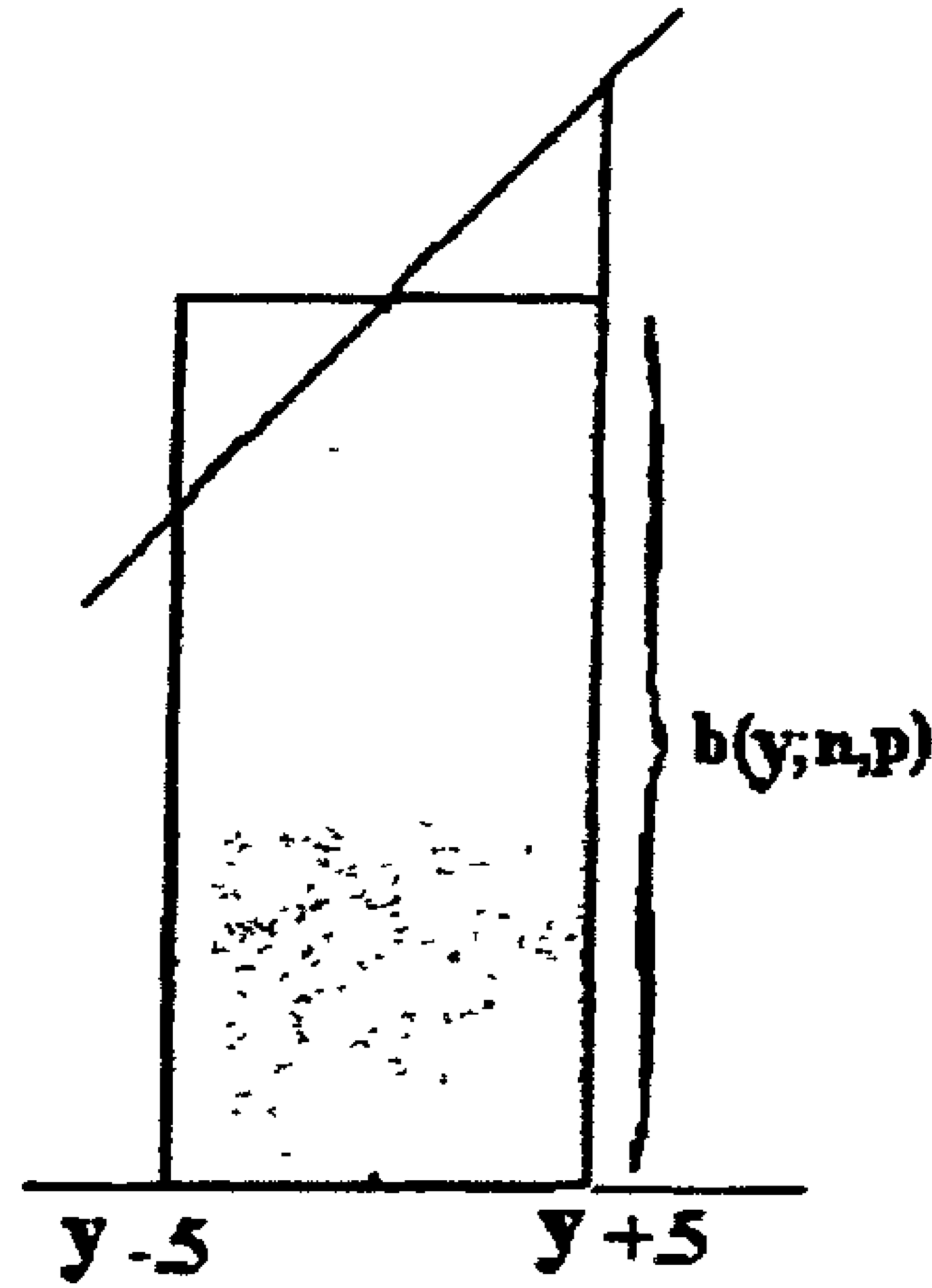
وذلك من جدول توزيع ذي الحدين في ملحق (١) .

يعتبر التقريب الطبيعي جيدا عندما p تقترب من 0.5 وذلك لأن توزيع ذى الحديـــن ســـوف يكون متماثل عند $p=.5$. الدقة المطلوبة فى أى تقريب تعتمد على التطبيق . وكقاعدة عامـــه يمكن استخدام التقريب الطبيعى عندما يكون كل مـــن $np \geq 5$, $nq \geq 5$. الآن ســـوف نحسب الاحتمال المطلوب باستخدام التقريب الطبيعى :

$$\begin{aligned} P(Y_{20} \geq 9) &= 1 - P(Y_{20} \leq 8) \\ &= 1 - P\left(\frac{Y_{20} - 10}{\sqrt{5}} \leq \frac{8.0 - 10}{\sqrt{5}}\right) \\ &\approx 1 - P(Z \leq -0.89) = 1 - (0.5 - 0.3133) \\ &= 0.8133. \end{aligned}$$

ولما كان التوزيع الطبيعى متصل بينما توزيع ذي الحدين متقطع ، فإنه يمكننا تحسين التقريـــب باستخدام معامل تصحيح والذى يسمى تصحيـــح الاتصـــال **continuity correction**. للتوضيح فإن كل احتمال لذى الحدين ، $b(y; n, p)$، يساوى مساحة المستطيل الذي طولـــه وقاعدتـــــــــــه تســـــــــاوى الفـــــــــــــترة $[y-.5, y+.5]$ شكل (١٠–٧) . أي أن طول قاعدته تساوى وحدة واحدة . وعلـــى

ذلك يمكن تقريب هذه المســاحة بالمســاحة تحت المنحنى الطبيعى للمتغير Y حيث $Y_n \sim N(np, npq)$ والموضحة بالمساحة المظللة فى شكل (١٠-٧) .



شكل (١٠-٧)

عموما ، إذا كان $Y_n \sim BIN(n,p)$ وإذا كان $a \le b$ عددين صحيحين ، فإن :

$$P[a \le Y_n \le b] \approx P(z_1 \le Z \le z_2)$$

حيث :

$$z_1 = \frac{(a-0.5)-np}{\sqrt{npq}} \;,\; z_2 = \frac{(b+0.5)-np}{\sqrt{npq}}$$

للتسهيل سوف نضع $x_1 = a - 0.5 \;,\; x_2 = b + 0.5$ أى أن :

$$z_1 = \frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}} \;,\; z_2 = \frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

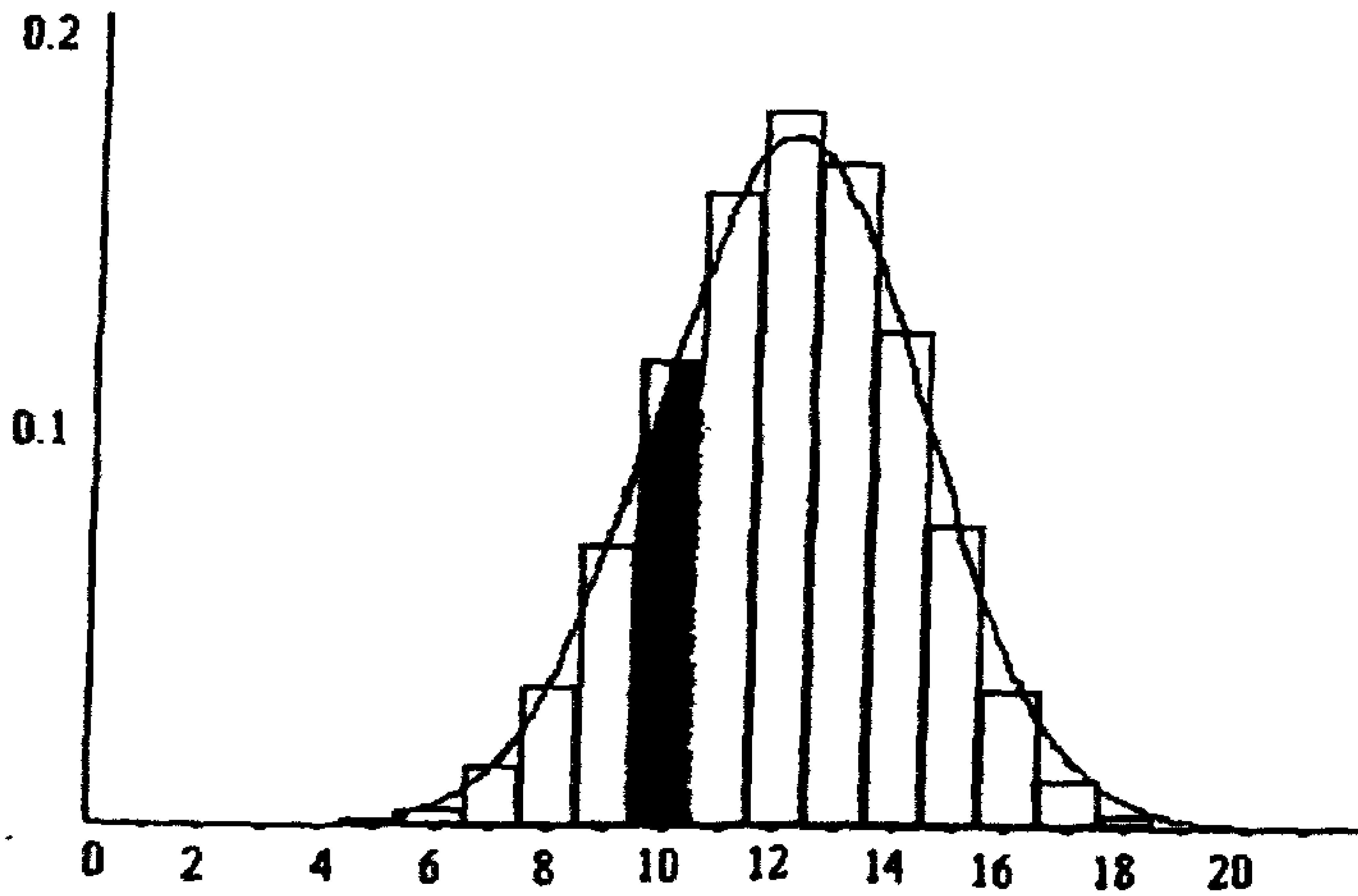
للتوضيح، بفرض أن X متغير عشوائي يتبع ذي الحدين حيث n=20 و 0.6 = p. شكل (١٠-٨) يوضح المدرج الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي وأيضا المنحني الطبيعي بمتوسط وانحراف معياري :

$$\sigma=\sqrt{(20)(0.6)(0.4)}=2.19 \quad , \mu=(20)(0.6)=12.$$

على سبيل المثال لحساب P(X=10) وباستخدام صيغة توزيع ذي الحدين فإن :

$$P(X=10)=\sum_{k=0}^{10}b(k;20,0.6)-\sum_{k=0}^{9}b(k;20,0.6)$$
$$=0.245-0128=0.117.$$

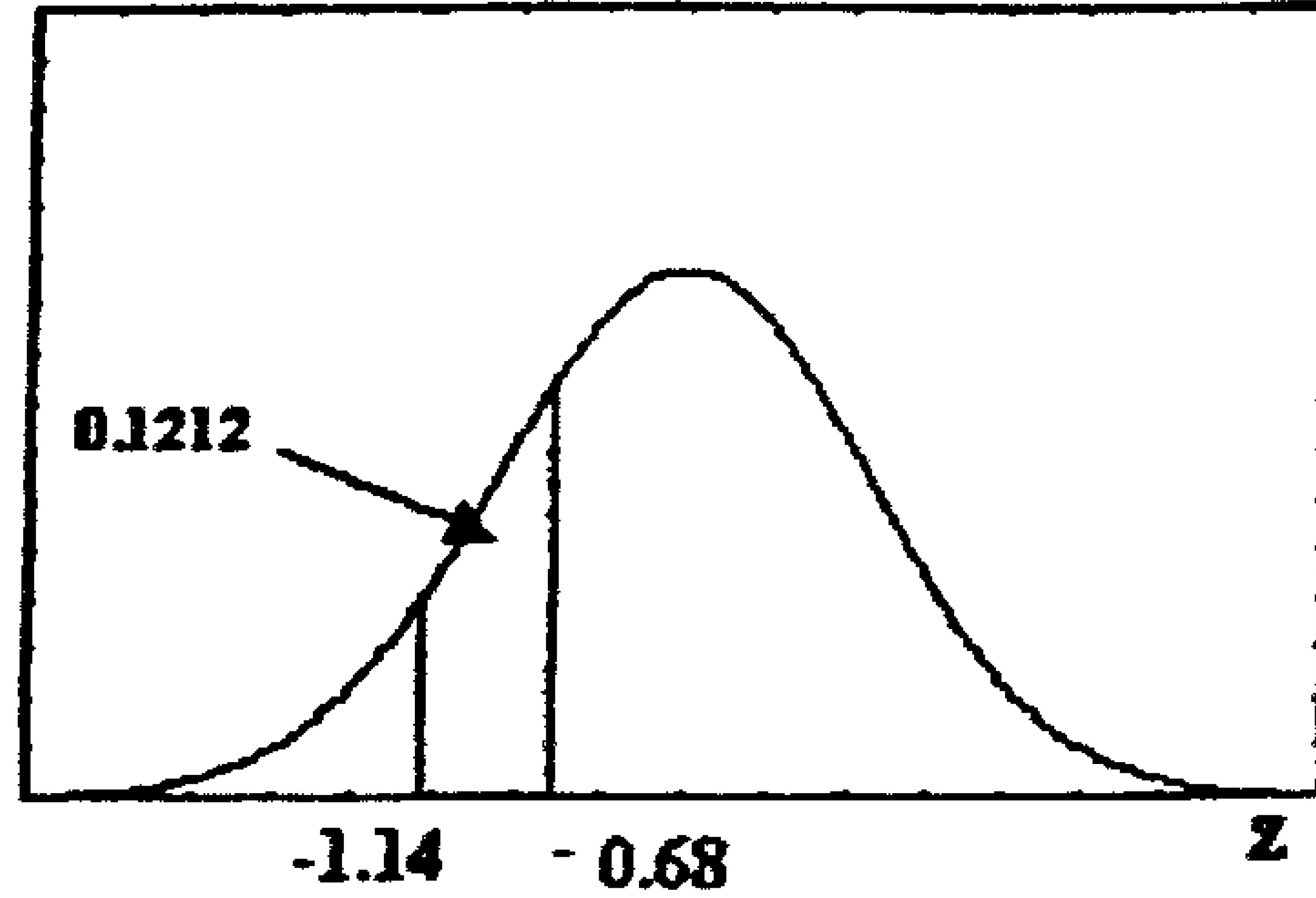
نفس الاحتمال السابق تقريبا يساوى المساحة المظللة تحت المنحنى الطبيعي بين $x_1=9.5$ و $x_2=10.5$ كما فى شكل (١٠-٩)٠



شكل (١٠-٨)

أي أنه عندما $x_1=9.5$ فإن :

$$z_1=\frac{9.5-12}{2.19}=-1.14.$$



شكل (١٠-٩)

وعندما $x_2 = 10.5$ فإن :

$$z_2 = \frac{10.5-12}{2.19} = -.68.$$

إذا كان X متغير عشوائي يتبع ذي الحدين وZ متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي فإن

$$P(X=10) = b(10;,20,0.6) \approx P(-1.14 \le Z \le -0.68)$$
$$= 0.3729 - 0.2517 \quad = 0.1212.$$

والتي تتفق مع القيمة المضبوطة التي حصلنا عليها باستخدام صيغة ذي الحدين **(0.117)** .

مثال (١٠-٢١) إذا ألقيت زهرتا نرد 120 مرة وإذا كان اهتمامنا بمجموع النقـــط الـــتي تظهر على السطح العلوي للنردين . فما هو احتمال ظهور المجموع 7 على الأقل 15مرة .

الحل . بفرض أن المحاولات مستقلة وبما أن احتمال ظهور مجموع 7 في المحاولة الواحدة هـــو $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$. فإذا كان X متغير عشوائي يتبع ذي الحدين ويمثل عدد مرات ظهور المجموع 7 . فإن $x = 0,1,\dots,120$ وعلى ذلك فان الاحتمال المطلوب هو :

$$P(X \ge 15) = \sum_{x=15}^{120} b(x;120,\frac{1}{6}).$$

و لصعوبة حساب قيمة هذا الاحتمال فإننا نلجأ إلى التوزيع الطبيعي ،كتقريب لتوزيع ذي الحدين، والذى متوسطه وانحرافه المعياري على التوالي :

$$\mu = np = (120)(\frac{1}{6}) = 20\ ,$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(120)(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})} = \sqrt{\frac{50}{3}} = 4.08.$$

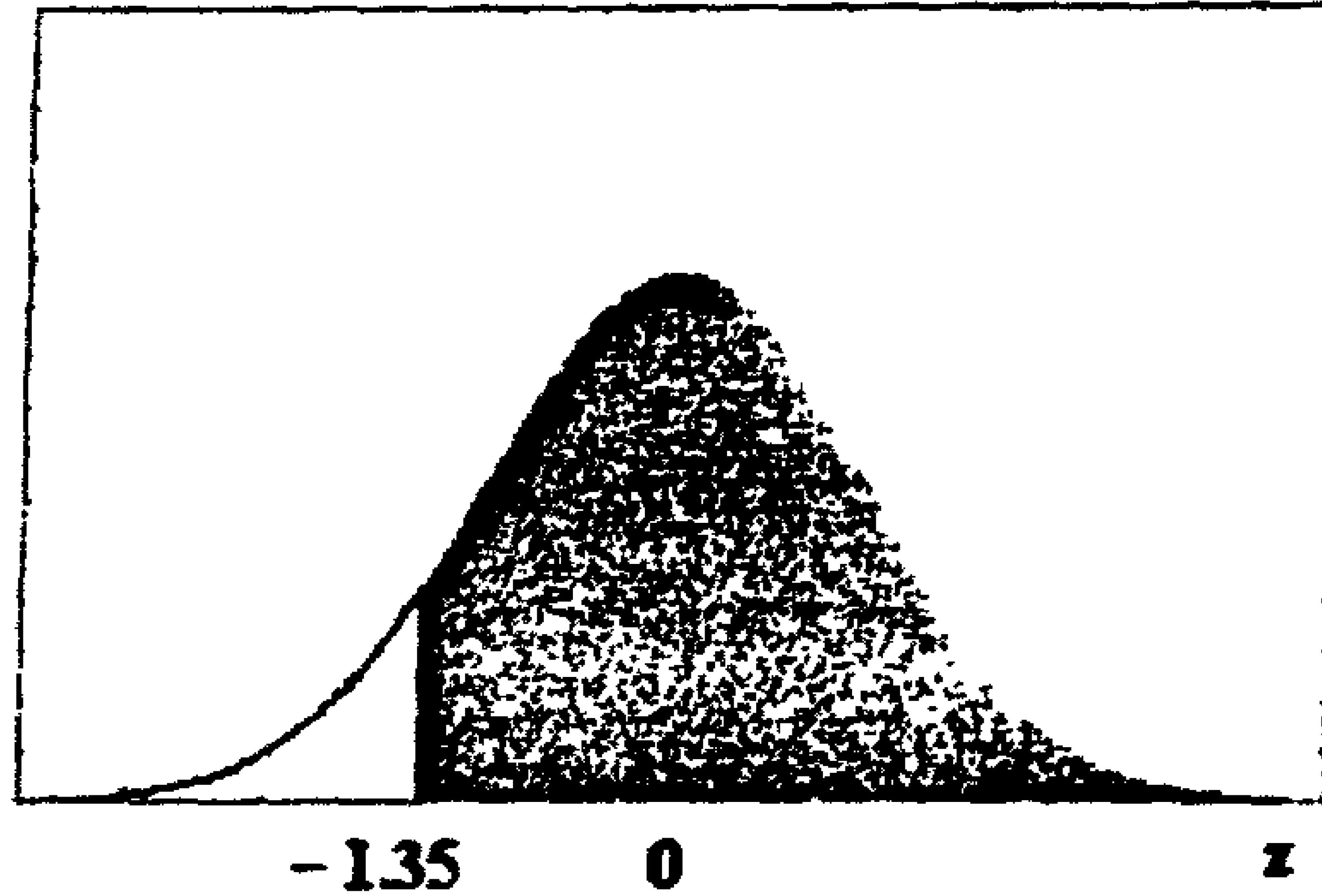
للحصول على الاحتمال المطلوب فإننا نحتاج إلى حساب المساحة على يمين القيمة $x_1 = 14.5$ •

عندما $x_1 = 14.5$ فإن :

$$z_1 = \frac{14.5 - 20}{4.08} = -1.35$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة فى شكل (١٠-١٠) ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي فى ملحق (٩) فإن :

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= \sum_{x=15}^{120} b(x;120,\frac{1}{6}) \approx P(Z \geq -1.35) \\ &= 0.5 + P(-1.35 \leq Z \leq 0) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.35) \\ &= 0.5 + 0.4115 = 0.9115. \end{aligned}$$



شكل (١٠-١٠)

مثال (١٠-٢٢) إذا كانت نسبة المصابين بارتفاع ضغط الدم فى مجتمع كبير 4%. فإذا تم اختيار 500 شخصا عشوائيا من هذا المجتمع وتم قياس ضغط دمهم، فما هو احتمال وجود 15 شخصا على الأقل مصابين بارتفاع ضغط الدم.

الحل . إذا كان X هو عدد الأشخاص المصابين بارتفاع ضغط الدم فانه يكون عبارة عن متغير عشوائي متقطع يتبع توزيع ذي الحدين حيث :

$$b(x;500,0.04)=\binom{500}{x}(0.04)^{x}\ (0.96)^{500-x} \qquad ,x=0,1,\ldots,500.$$

والاحتمال المطلوب هو :

$$b(x\geq 15)=b(15;500,0.04)+b(16;500,0.04)+\ldots+b(500;500,0.04)$$

ومن الصعب حساب قيمة هذا الاحتمال وبالتالي فإننا نلجأ إلى التوزيع الطبيعي، كتقريب لتوزيع ذي الحدين، والذى متوسطه وتباينه على التوالي هما :

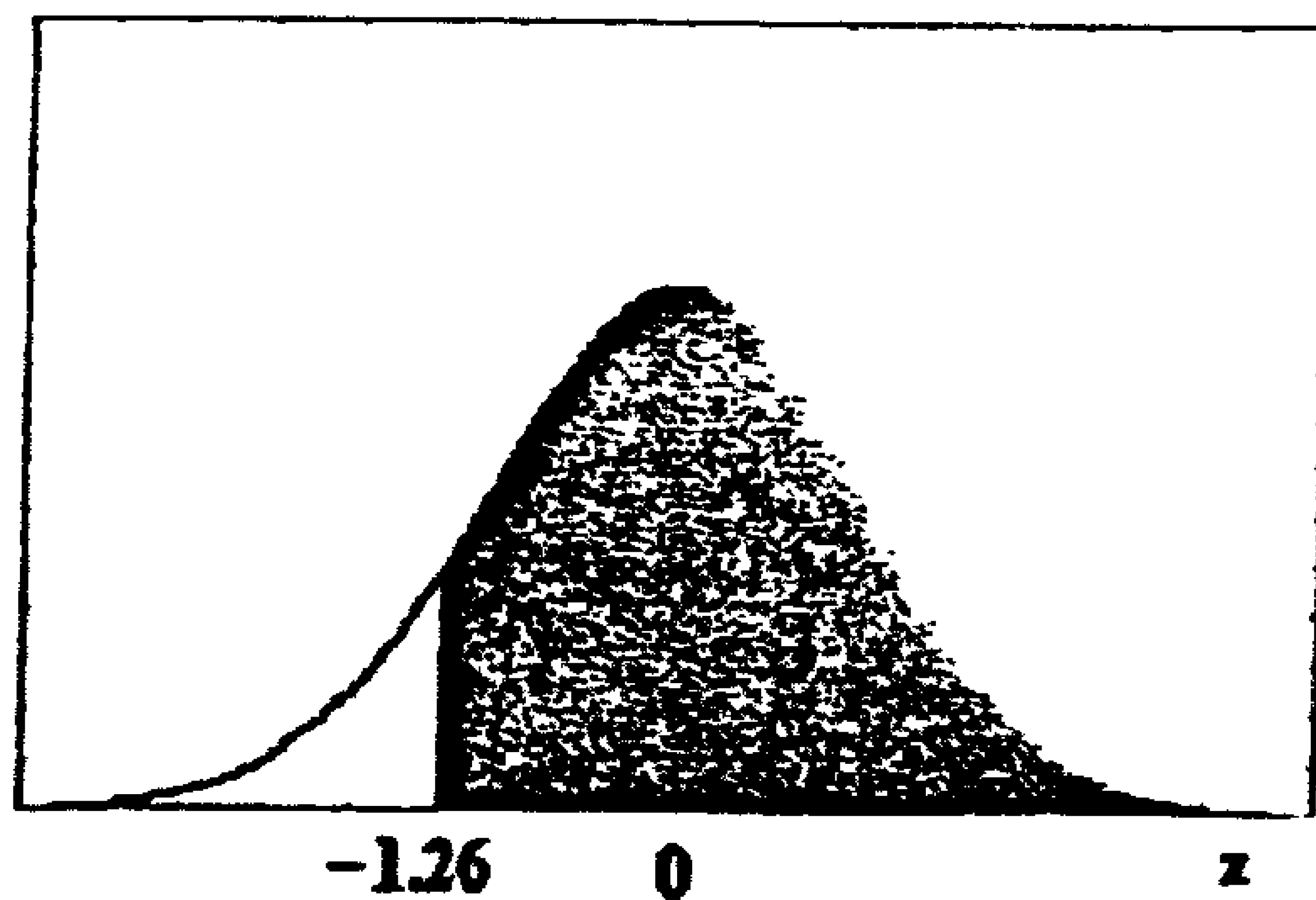
$$\mu=np=(500)(0.04)=20,$$

$$\sigma^{2}=npq=(500)(0.04)(0.96)=19.2.$$

أي أن $\sigma=4.38$ ، للحصول على الاحتمال المطلوب فإننا نحتاج إلى حساب المساحة على يمين القيمة $x_1=14.5$ ، عندما $x_1=14.5$ فإن :

$$z_1=\frac{14.5-20}{4.38}=-1.26.$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة فى شكل (١٠-١١) ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي فى ملحق (٧) فإن :



شكل (١٠-١١)

$$P(X\geq 15)\approx p(Z\geq -1.26)$$
$$=0.5+P(-1.26\leq Z\leq 0)$$
$$=0.5+P(0\leq Z\leq 1.26)$$
$$=0.5+0.3962=0.8962.$$

مثال (١٠-٢٣) إذا كان من المعروف أن 6% من الأفراد الذكور مصابون بعمى الألـــوان . فإذا تم اختيار عينة من 200 فرد من الذكور وتم اختبارهم لمعرفة إصابتهم بعمى الألوان من عدمه . أوجد احتمال أن يكون عدد المصابين بعمى الألوان :

(أ) على الأقل 20 فـــردا (ب) علـــى الأكـــثر 15 فـــردا (جــــ) بـــالضبط 15 فـــردا (د) $P(15 \leq X \leq 20)$.

الحل . (أ) سوف نستخدم التوزيع الطبيعي، كتقريب لذي الحدين، بمتوسط

$$\mu = np=(200)(0.06)=12$$

وتباين :

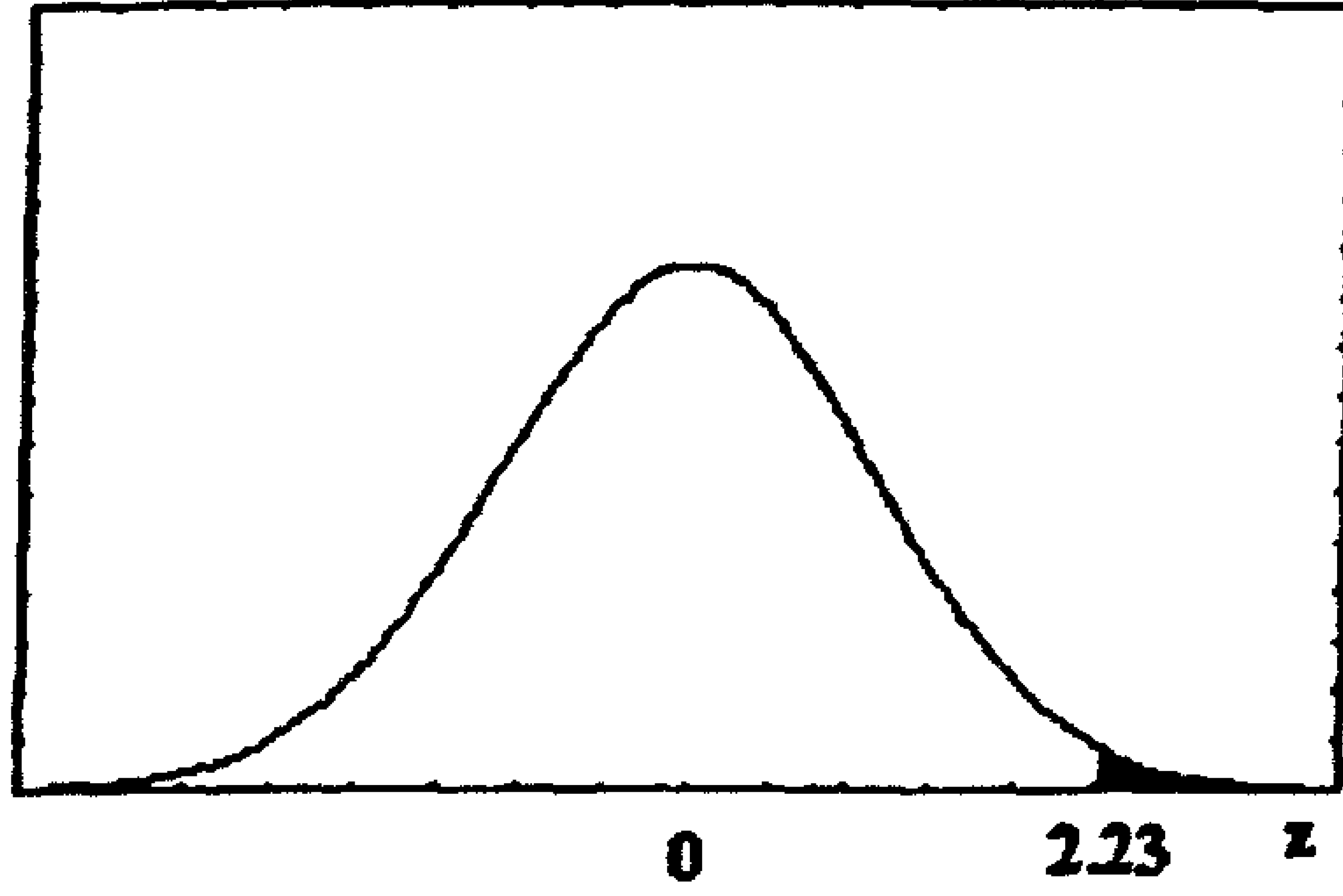
$$\sigma^2 =npq=(200)(0.06)(0.94)=11.28.$$

أي أن $\sigma=3.36$. (ا) للحصول على الاحتمال $P(X\geq 20)$ فإننا نحتـــاج إلى حســـاب المساحة على يمين القيمة $x_1=19.5$ ، عندها $x_1=19.5$ فإن :

$$z_1=\frac{19.5-12}{3.36}=2.23.$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة فى شكل (١٠-١٢) ومن جدول التوزيع الطبيعـــي القياسي فى ملحق (٧) فإن :

$$P(X\geq 20) = \sum_{x=20}^{200} b(x;200,0.06)$$
$$\approx P(Z\geq 2.23)$$
$$=0.5-P(0\leq Z\leq 2.23)$$
$$=0.5-0.4871=0.0129.$$



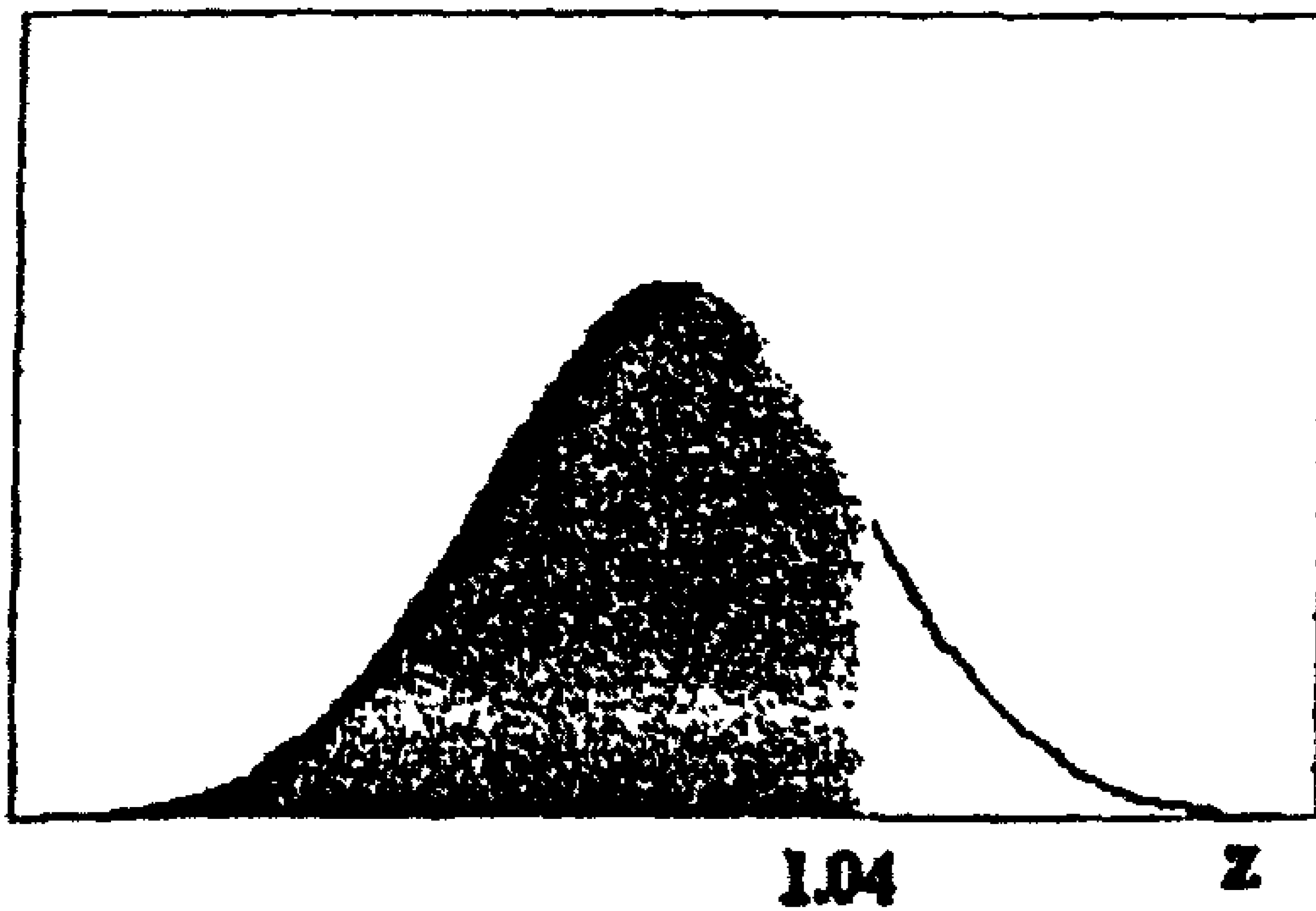
شكل (١٠-١٢)

(ب) للحصول على الاحتمال $P(X \leq 15)$ فإننا نحتاج إلى حساب المساحة على يسار القيمة $x_1 = 15.5$. عندما $x_1 = 15.5$ فإن :

$$z_1 = \frac{15.5 - 12}{3.36} = 1.04.$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة فى شكل (١٠-١٣) . ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي فى ملحق (٧) فإن :

$$\begin{aligned} P(X \leq 15) &= \sum_{x=0}^{15} b(x; 200, 0.06) \\ &\approx P(Z \leq 1.04) \\ &= 0.5 + p(0 \leq Z \leq 1.04) \\ &= 0.5 + 0.3508 = 0.8508. \end{aligned}$$



شكل (١٠-١٣)

جـ) $P(X=15)=\sum_{x=0}^{15} b(x;200,0.06)-\sum_{x=0}^{14} b(x;200,0.06).$

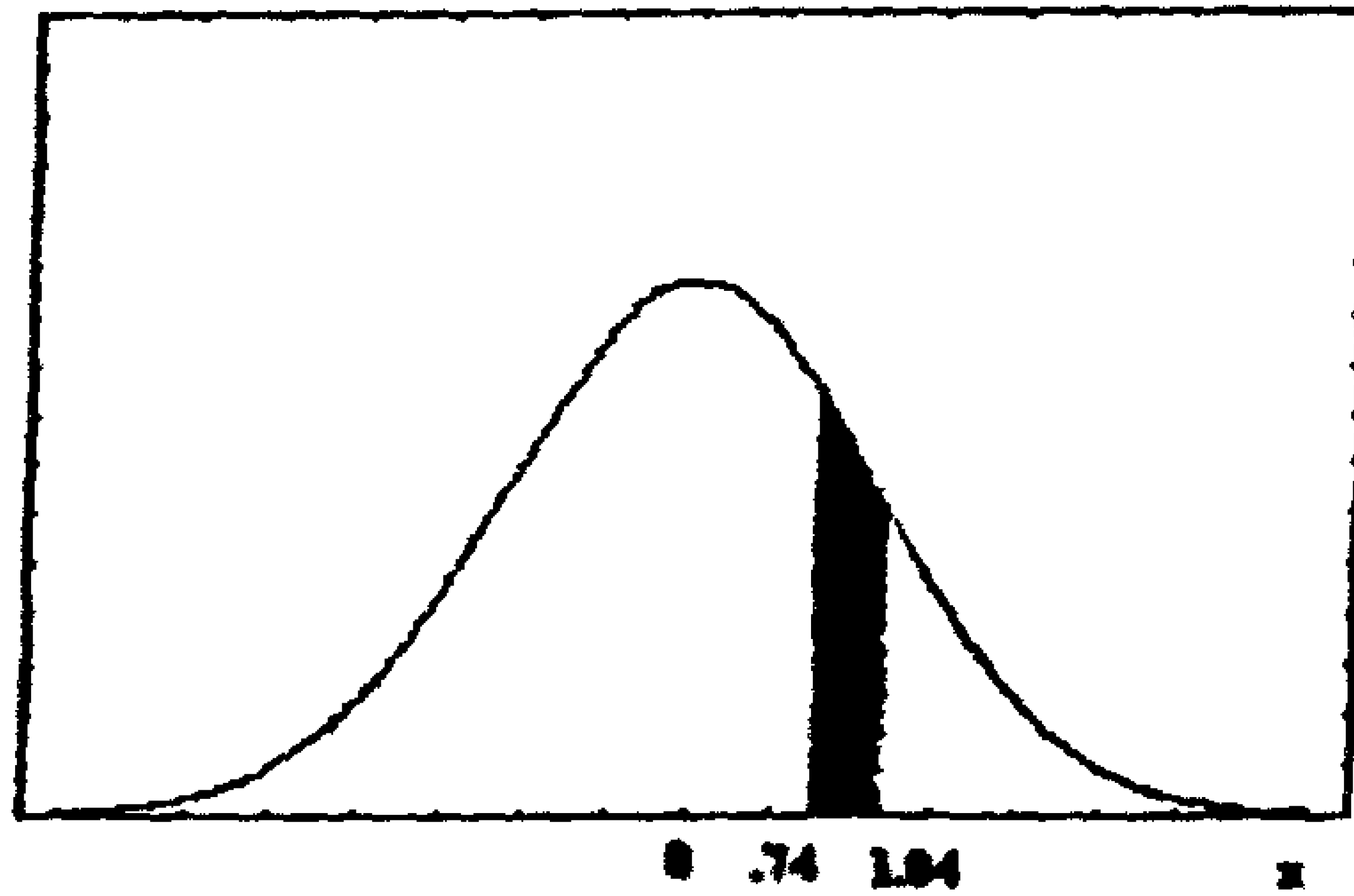
نفس الاحتمال السابق تقريبا يساوى المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $x_1=14.5$ و $x_2=15.5$ ، عندما $x_1=14.5$ فإن :

$$z_1=\frac{14.5-12}{3.36}=0.74.$$

وعندما $x_2=15.5$ فإن :

$$z_2=\frac{15.5-12}{3.36}=1.04.$$

الاحتمال المطلوب يساوى المساحة المظللة فى شكل (١٠-١٤) ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي فى ملحق (٧) فإن :



شكل (١٠-١٤)

$$\begin{aligned}P(X=15)&\approx P(0.74\le Z\le 1.04)\\&=P(0\le Z\le 1.04)-P(0\le Z\le 0.74)\\&=0.3508-0.2704=0.0804.\end{aligned}$$

د) $P(15\le X\le 20)=\sum_{x=0}^{20} b(x;200,0.06)-\sum_{x=0}^{14} b(x;200,0.06).$

نفس الاحتمال السابق تقريبا يساوى المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $x_1 = 14.5$ و $x_2 = 20.5$.

عندما $x_1 = 14.5$ فإن :

$$z_1 = \frac{14.5 - 12}{3.36} = 0.74.$$

وعندما $x_2 = 20.5$ فإن :

$$z_2 = \frac{20.5 - 12}{3.36} = 2.53.$$

ملحوظة : أن السؤال الآن كم يجب أن يكون حجم العينة (n) حتى يمكن تطبيق التقريب وما هو مقدار الخطأ فى التقريب الطبيعى . كلا السؤالين لهما علاقة بسرعة تقارب الاحتمال $P(Y_n \le a)$ إلى $\Phi(a)$. بمعنى معدل تقارب

$$P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\right] - \Phi(a)$$

من الصفر ومن الواضح أن معدل التقارب يجب أن يعتمد على توزيع X_i حيث $i = 1,2,\ldots,n$.

فإذا كان توزيع X_i متماثلا فإننا نتوقع بأن التقريب سيكون جيدا حتى إذا كان حجم العينة ليس كبيرا بدرجة كافية. وفيما يلى أفضل نتيجة معروفة لمقدار الخطأ estimate of error فى التقريب الطبيعى :

إذا كانت $E\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right|^3 < \infty$ فإن :

$$\left|P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\right) - \Phi(a)\right|$$

$$=\left|P\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\leq a\right)-\Phi(a)\right|$$

$$\leq 0.7975\ E\left(\frac{|X_i-\mu|^3}{\sigma^3}\right).$$

والجدول الآتى يتضمن حدود الخطأ error bounds لبعض التوزيعات :

التوزيـــع	حدود الخطأ
برنولى (p)	$0.7975[1-2p(1-p)]/\sqrt{np(1-p)}$
بواسون (μ)	$0.7975(8\mu^2+6\mu+1)/\sqrt{n\mu}$
المنتظم (-.5 , .5)	$1.036/\sqrt{n}$
الأســى (متوسط θ)	$0.1653/\sqrt{n}$

(١٠-٧) تقريبات العينات الكبيرة

Large – Sample Approximations

يتناول هذا البند بعض التوزيعات العينية التقريبية والتي تستخدم للعينات الكبيرة.

نظرية (١٠-٨) إذا كان $Y_\nu \sim \chi^2_{(\nu)}$ فإن :

$$Z_\nu=\frac{Y_\nu-\nu}{\sqrt{2\nu}}\xrightarrow{d}Z\sim N(0,1)$$

عندما $\nu\to\infty$.

ملحوظة : فى التطبيقات الإحصائية فإن ν دائما دالة فى n .

البرهـــان :

يمكن إثبات هذه النظرية باستخدام نظرية النزعة المركزية حيث Y_ν تتوزع تبعا للمجمــوع $\sum_{i=1}^{\nu}X_i$ ، حيث $X_1, X_2, ..., X_\nu$ مستقلين و X_i يتبع $\chi^2_{(1)}$ وعلى ذلك : $E(X_i)=1$, $Var(X_i)=2$. أيضا نتوقع أن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z_ν تقترب من دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z عندما ν كبيرة .

أي أن المئينات لتوزيع مربع كاى يمكن تقريبها بدلالة مئينات التوزيع الطبيعي القياسي خصوصا .

$$1-\alpha = P\left[\; Y_\nu \le \chi^2_{1-\alpha}(\nu) \;\right]$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha}(\nu)-\nu}{\sqrt{2\nu}}\right)$$

مثال (١٠-٢٤) إذا كان S_n^2 يمثل تباين العينة العشوائية من الحجم n من توزيع $N(\mu,\sigma^2)$. نعلم أن :

$$V_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

ومن نظرية النزعة المركزية فإن :

$$\frac{V_n-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

وعلى ذلك :

$$\frac{\sqrt{n-1}[S_n^2-\sigma^2]}{\sigma^2\sqrt{2}} \xrightarrow{d} Z$$

أو تقريبا :

$$S_n^2 \sim N\left(\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{n-1}\right)$$

أيضا من الممكن إثبات أن متغير عشوائي يتبع توزيع t له نهاية توزيع طبيعي قياسي عندما تزيد درجات الحرية ν . بفرض أن $T_\nu \sim t(\nu)$ حيث :

$$T_\nu = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2_{(\nu)}/\nu}}$$

نعلم أن $E(\chi^2_{(\nu)}/\nu)=1$, $Var(\chi^2_{(\nu)}/\nu)=2/\nu$ وباستخدام متباينة تشيبيشف فإن :

$$P\left[\ \left|\chi^2_{(\nu)}/\nu-1\right|<\epsilon\right]\geq 1-2/\nu\ \ \epsilon^2$$

وعلى ذلك $\chi^2_{(\nu)}/\nu \xrightarrow{P} 1$ عندما $\nu\to\infty$.

وعلى ذلك توزيع t له نهاية توزيع يتبع الطبيعى القياسى (من نظرية (٩-٨) الجزء ت) أى أن :

$$T_\nu=\frac{Z}{\sqrt{\chi^2_{(\nu)}/\nu}}\xrightarrow{d} Z\sim N(0,1)$$

أي أن المئينات لتوزيع t تقريبا تساوى مئينات التوزيع الطبيعى القياسى عندما ν كبيرة والتي تؤدى إلى الصف الأخير من جدول توزيع t فى ملحق (٩) .

أيضا بفرض أن :

$$X_{\nu_1,\nu_2}=(V_1/\nu_1)/(V_2/\nu_2)$$

فإن $V_2/\nu_2\to 1$ عندما $\nu_2\to\infty$ وعلى ذلك إذا كانت ν_1 ثابتة فإن $X_{\nu_1,\nu_2}\xrightarrow{d} V_1/\nu_1$ عندما $\nu_2\to\infty$ أي أن مئينات توزيع F هى $F_{1-\alpha}(\nu_1,\nu_2)\approx\chi^2_{1-\alpha}(\nu_1)/\nu_1$ عندما ν_2 كبيرة يمكن الحصول على صيغة مشابهة عندما ν_1 كبيرة أي أن $F_{1-\alpha}(\nu_1,\nu_2)\approx\nu_2/\chi^2_\alpha(\nu_2)$.

(١٠-٨) توزيعات الإحصاءات المرتبة

Distributions of Order Statistics

يتناول هذا البند تعريف الإحصاءات المرتبة ودراسة بعد خصائصها . هذه الإحصاءات ذات أهمية كبيرة فى الإحصاء الاستدلالى وذلك لان بعض خصائصها لا تعتمد على التوزيع الذى اختيرت منه العينة . ليكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من الحجم n من توزيع له

دالة كثافة احتمال من النوع المتصل $f(x)$ والتى تكون موجبة فى الفترة $a < x < b$. بفرض أننا رتبنا المشاهدات ترتيبا تصاعدياً وبكتابة $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ كترتيب للعينة العشوائية فإن $Y_1 \le Y_2 \le \ldots \le Y_n$ وعليه فإن Y_i حيث $i = 1,2,\ldots,n,$ تسمى بالإحصاءه ذات المرتبة i للعينة العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$. وحيث أن العينة عشوائية فإن المتغيرات تعد متغيرات عشوائية مستقلة متطابقة التوزيع بدالة كثافة احتمال f ولكن الإحصاءات المرتبة رغم أنها تمثل قيم نفس العينة مرتبة بشكل تصاعدى إلا أنه لا يمكن اعتبارها متغيرات مستقلة بسبب اعتماد القيمة اللاحقة فى الترتيب على سابقتها . دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات :
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ تعطى كالآتى :

$$g\ (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (n!)\, f(y_1)\, f(y_2) \ldots f(y_n)\,,$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}\,.$$

سوف نثبت ذلك فقط عند $n = 3$. عندما $n = 3$ فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات X_1, X_2, X_3 هي $f(x_1)\ f(x_2)\ f(x_3)$. الاحتمال

$$P\,(a < X_1 = X_2 < b\,,\ a < X_3 < b)$$

يمكن حسابه كالتالى :

$$\int_a^b \int_a^b \int_{x_2}^{x_2} f(x_1) f(x_2) f(x_3) dx_1\ dx_2\ dx_3 = 0,$$

وذلك لأن :

$$\int_{x_2}^{x_2} f(x_1)\ dx_1 = 0$$

وعليه سوف نفترض أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $X_1,\ X_2,\ X_3,$ ستكون مساوية للصفر عند جميع النقاط $(x_1\,,\, x_2, x_3)$ التى تكون فيها على الأقل اثنين من أحداثياتهما متساويين . وعليه فإن :

$$f(x_1, x_2 x_3) = f(x_1) f(x_2) f(x_3)\ a < x_1 \ne x_2 \ne x_3 < b$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}\,.$$

وحيث أننا بصدد ترتيب هذه القيم الثلاثة $x_1\,,\, x_2, x_3$ من الأصغر إلى الأكبر وهذا يعنى أنه بإمكاننا ترتيب هذه القيم بست طرق مختلفة $6 = (2)\,(3) = 3!$ بحيث أن كل ترتيب منها يتم تمثيله بمجموعة غير مرتبطة بأى ترتيب آخر وعليه فإن الفضاء R حيث :
$f(x_1) f(x_2) f(x_3) > 0$ هو الاتحاد لستة فئات متنالية هى :

$$A_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) | \; a < x_1 < x_2 < x_3 < b \}$$
$$A_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) | \; a < x_2 < x_1 < x_3 < b \}$$
$$A_3 = \{ (x_1, x_2, x_3) | \; a < x_1 < x_3 < x_2 < b \}$$
$$A_4 = \{ (x_1, x_2, x_3) | \; a < x_2 < x_3 < x_1 < b \}$$
$$A_5 = \{ (x_1, x_2, x_3) | \; a < x_3 < x_1 < x_2 < b \}$$
$$A_6 = \{ (x_1, x_2, x_3) | \; a < x_3 < x_2 < x_1 < b \}.$$

وعليــه فــإن :

$$A_1 = \{y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3\},$$
$$A_2 = \{y_1 = x_2, y_2 = x_1, y_3 = x_3\}$$
$$A_3 = \{y_1 = x_1, y_2 = x_3, y_3 = x_2\}$$
$$A_4 = \{y_1 = x_2, y_2 = x_3, y_3 = x_1\}$$
$$A_5 = \{y_1 = x_3, y_2 = x_1, y_3 = x_2\}$$
$$A_6 = \{y_1 = x_3, y_2 = x_2, y_3 = x_1\}$$

وبالحل بالنسبة إلى قيم x نجد أن :

$$A_1 = \{x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3\}$$
$$A_2 = \{x_2 = y_1, x_1 = y_2, x_3 = y_3\}$$
$$A_3 = \{x_1 = y_1, x_3 = y_2, x_2 = y_3\}$$
$$A_4 = \{x_2 = y_1, x_3 = y_2, x_1 = y_3\}$$
$$A_5 = \{x_3 = y_1, x_1 = y_2, x_2 = y_3\}$$
$$A_6 = \{x_3 = y_1, x_2 = y_2, x_1 = y_3\}$$

وعليه فإن :

جاكوبيان التحويل للمجموعة A_1 هو:

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow |J_1| = 1$$

وجاكوبيان التحويل للمجموعة A_2 هو :

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow |J_2| = 1$$

أذن :

$$|J_1| = |J_2| = \dots = |J_6| = 1$$

وعليه فإن :

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = |J_1| f(y_1)\ f(y_2) f(y_3) + |J_2| f(y_2)\ f(y_1) f(y_3) + \dots$$

$$+ |J_6| f(y_3)\ f(y_2) f(y_1), \quad a < y_1 < y_2 < y_3 < b$$

$$= (3!) f(y_1)\ f(y_2)\ f(y_3), a < y_1 < y_2 < y_3 < b,$$

$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

ف الحالة العامة n سوف يكون لدينا !n من المجموعات . وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ هي :

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i), \quad a < y_1 < y_2 < \dots < y_n < b$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

مثال (١٠-٢٥) إذا كان X متغيرا عشوائيا من النوع المتصل بدالة كثافة احتمال f (x) والتي تكون موجبة ومتصلة في الفترة $a < x < b$, 0 غير ذلك . دالة التوزيع F (x) يمكن كتابتها على الشكل :

$$F(x) = \int_a^x f(w)\ dw \qquad a < x < b.$$

إذا كانت $x \le a$ فإن $F(x) = 0$ وإذا كانت $b \le x$ فإن $F(x) = 1$. وعلى ذلك يوجد وسيط وحيد m حيث $F(m) = \frac{1}{2}$. إذا كانت X_1, X_2, X_3 تمثل عينة عشوائية من هنا التوزيع وإذا كانت Y_1, Y_2, Y_3 تمثل العينة المرتبة ، سوف نحسب احتمال أن $Y_2 \le m$.

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات المرتبة الثلاثة هي :

$$g(y_1, y_2, y_3) = 6\ f(y_1)f(y_2)f(y_3) \quad a < y_1 < y_2 < y_3 < b$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_2 هى :

$$h(y_2) = 6\ f(y_2) \int_{y_2}^{b} \int_{a}^{y_2} f(y_1)f(y_3)\ dy_1\ dy_3$$
$$= 6\ f(y_2)F(y_2)[1 - F(y_2)], \quad a < y_2 < b$$
$$= 0 \text{ elsewhere} .$$

تبعا لذلك فـــإن :

$$P(Y_2 \le m) = 6 \int_{a}^{m} \{F(y_2)f(y_2) - [F(y_2)]^2 f(y_2)\}\ dy_2$$
$$= 6\left\{\frac{[F(y_2)]^2}{2} - \frac{[F(y_2)]^3}{3}\right\}_a^m = \frac{1}{2}.$$

الطريقة المستخدمة فى مثال (١٠ – ٢٥) يمكن استخدمها لإيجاد صيغة لدالة كثافة الاحتمال الهامشية للإحصاءات المرتبة . بفرض أن X متغيراً عشوائياً من النوع المتصل له دالـــة كثافـــة الاحتمال $f(x)$ الموجبة والمتصلة فى الفترة $a < x < b$ وصفر غير ذلك . وعلى ذلك دالـــــة التوزيع التجميعى $F(x)$ يمكن كتابتها على الشكل :

$$F(x) = 0 \qquad x \le a$$
$$= \int_{a}^{x} f(w)\ dw \qquad a < x < b$$
$$= 1 \qquad b \le x.$$

تبعـــا لذلك $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ ، $a < x < b$. بالإضافة إلى ذلك إذا كانت $a < x < b$ فإن

$$1 - F(x) = F(b) - F(x)$$

$$= \int_a^b f(w)\ dw - \int_a^x f(w)\ dw$$

$$= \int_x^b f(w)\ dw.$$

بفرض أن $X_1, X_2, \dots X_n$ عينة عشوائية من الحجم n من هذا التوزيع وإذا كانت : $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ تمثل الإحصاءات المرتبة لهذه العينة العشوائية فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ هي :

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = n!\ f(y_1) f(y_2) \dots f(y_n),$$
$$a < y_1 < y_2 < \dots < y_n < b$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

سوف نوجد الدالة الهامشية للمتغير Y_n بدلالة دالة التوزيع التجميعى $F(x)$ ودالة كثافة الاحتمال $f(x)$ للمتغير X . إذا كانت $a < y_n < b$ فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_n تعطى كالتالي :

$$g_n(y_n) = \int_a^{y_n} \dots \int_a^{y_4} \int_a^{y_3} \int_a^{y_2} n!\ f(y_1) f(y_2) \dots f(y_n) dy_1\ dy_2\ dy_3 \dots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n} \dots \int_a^{y_4} \int_a^{y_3} n! \left(\int_a^{y_2} f(y_1)\ dy_1 \right) f(y_2) \dots f(y_n)\ dy_2 \dots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n} \dots \int_a^{y_4} \int_a^{y_3} n!\ F(y_2)\ f(y_2) \dots\ f(y_n)\ dy_2 \dots dy_{n-1}$$

لأن :

$$F(x) = \int_a^x f(w)\ dw$$

الآن :

$$\int_a^{y_3} F(y_2)\ f(y_2)\ dy_2 = \frac{[F(y_2)]^2}{2} \Big|_a^{y_3}$$

$$= \frac{[F(y_3)]^2}{2},$$

حيث أن $F(a) = 0$. تبعاً لذلك :

$$g_n(y_n)=\int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_4} n!\frac{[F(y_3)]^2}{2}\ f(y_3)\ldots f(y_n)\,dy_3\ldots dy_{n-1}.$$

ولكـــن :

$$\int_a^{y_4}\frac{[F(y_3)]^2}{2}\ f(y_3)\ dy_3=\frac{[F(y_3)]^3}{2.3}\ \Big|_a^{y_4}=\frac{[F(y_4)]^3}{2.3}\ ,$$

وعلـــى ذلك :

$$g_n(y_n)=\int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_5} n!\ \frac{[F(y_4)]^3}{3!}\ f(y_4)\ldots f(y_n)\ dy_4\ldots dy_{n-1}\,.$$

وبإجراء التكامل على y_{n-1} , ... , y_4 فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_n سوف تكون على الشكل :

$$\begin{aligned} g_n(y_n) &= n!\ \frac{[F(y_n)]^{n-1}}{(n-1)!}\ f(y_n) \\ &= n\ \left[F(y_n)\right]^{n-1}\ f(y_n) \qquad a<y_n<b \\ &= 0\ \ \text{elsewhere}\,.\,. \end{aligned}$$

دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_1 يمكن الحصول عليها كالتالى :

$$g_1(y_1)=\int_{y_1}^{b}\ldots\int_{y_{n-3}}^{b}\int_{y_{n-2}}^{b}\int_{y_{n-1}}^{b} n!\ f(y_1)\ f(y_2)\ldots f(y_n)\ dy_n\ dy_{n-1}\ldots dy_2$$

$$=\int_{y_1}^{b}\ldots\int_{y_{n-3}}^{b}\int_{y_{n-2}}^{b} n!\ f(y_1)\ f(y_2)\ \ldots f(y_{n-1})\ [1-F(y_{n-1})]dy_{n-1}\ldots dy_2\,.$$

ولكـــن :

$$\int_{y_{n-2}}^{b}\left[1-F(y_{n-1})\right]f(y_{n-1})\ dy_{n-1}$$

$$= -\frac{[1-F(y_{n-1})]^2}{2} \Big|_{y_{n-2}}^{b}$$

$$= \frac{[1-F(y_{n-1})]^2}{2}$$

أى أن :

$$g_1(y_1) = \int_{y_1}^{b} \dots \int_{y_{n-3}}^{b} n!\ f(y_1)\dots\ f(y_{n-2})\frac{[1-F(y_{n-2})]^2}{2}\ dy_{n-2}\dots dy_2$$

وفى النهاية :

$$g_1(y_1) = n[1-F(y_1)]^{n-1}\ f(y_1)\quad a < y_1 < b$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere.}$$

يلاحظ أن :

$$\int_{a}^{x} [F(w)]^{\alpha-1} f(w)\ dw = \frac{[F(x)]^{\alpha}}{\alpha},\quad \alpha > 0$$

$$\int_{y}^{b} [1-F(w)]^{\beta-1} f(w)dw = \frac{[1-F(y)]^{\beta}}{\beta},\quad \beta > 0$$

وعلى ذلك يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_k بدلالة $F(x)$ و $f(x)$ وهنا يحدث بتقدير التكامل :

$$g_k(y_k) = \int_{a}^{y_k} \dots \int_{a}^{y_2} \int_{y_k}^{b} \dots \int_{y_{n-1}}^{b} n!\ f(y_1)\ f(y_2)\dots f(y_n)\ dy_n \dots$$
$$\times dy_{k+1}\ dy_1 \dots\ dy_{k-1}$$

النتيجــة أن :

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\ [F(y_k)]^{k-1}[1-F(y_k)]^{n-k}$$
$$\times f(y_k) \qquad a < y_k < b$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere.} \qquad (١٠-٦)$$

أخيراً دالة كثافة الاحتمال المشتركة بين إحصائيين مرتبتين وليكن $Y_i < Y_j$ بدلالة $f(x)$, $F(x)$ هو :

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \int_a^{y_1} \dots \int_a^{y_2} \int_{y_i}^{y_j} \dots \int_{y_{j-2}}^{y_j} \int_{y_j}^{b} \dots \int_{y_{n-1}}^{b} n!\ f(y_1) \dots f(y_n)\, dy_n \dots$$

$$dy_{j+1} dy_{j-1} \dots dy_{i+1}\ dy_1 \dots dy_{i-1}.$$

وعلى ذلك للقيد $\nu > 0$ فـإن :

$$\int_x^y [F(y) - F(w)]^{\nu-1} f(w)\ dw = -\frac{[F(y) - F(w)]^{\nu}}{\nu} \Bigg|_x^y$$

$$= \frac{[F(y) - F(x)]^{\nu}}{\nu}$$

ومنها فإن دالة كثافة الاحتمال المتغيرة للمتغيرين Y_i, Y_j هي :

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}$$
$$\times\ [F(y_i)]^{i-1} [F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} [1 - F(y_j)]^{n-j} f(y_i) f(y_j),$$

حيث : $a < y_i < y_j < b$

$= 0$ elsewhere.

مثال (١٠ - ٢٦) إذا كان $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ تمثل الإحصاءات المرتبة لعينة عشوائية من الحجم 4 من توزيع له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere}.$$

أوجد $g_3(y_3)$ وأوجد $P(\frac{1}{2} < Y_3)$.

الحـــل :

$$g_3(y_3) = \frac{4!}{2!\ 1!} \left(y_3^2\right)^2 (1 - y_3^2)(2y_3) \qquad 0 < y_3 < 1$$

$= 0$ elsewhere.

و

$$P\left(\frac{1}{2} < Y_3\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} g_3(y_3)\ dy_3$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 24(y_3^5 - y_3^7)\ dy_3 = \frac{243}{256}.$$

مثال (١٠ – ٢٧) إذا كان $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_5$ تمثل إحصاءات مرتبة مأخوذة مـــن عينـــة عشوائية من الحجم $n = 5$ من توزيع له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \bar{e}^{x} \qquad 0 < x < \infty$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

أوجد (أ) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_2, Y_4 .

(ب) أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين $Z_1 = Y_2$, $Z_2 = Y_4 - Y_2$

الحـــل :

(أ)
$$g_{24}(y_2, y_4) = \frac{5!}{1!\ 1!\ 1!}\left(1 - \bar{e}^{y_2}\right)\left(\bar{e}^{y_2} - \bar{e}^{y_4}\right)$$
$$\times \left(\bar{e}^{y_4}\right) \bar{e}^{y_2 - y_4} \qquad , \quad 0 < y_2 < y_4 < \infty$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

(ب) التحويلة تصبح $z_1 = y_2$, $z_2 = y_4 - y_2$.

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Z_1, Z_2 هي :

$$h(z_1, z_2) = 120\ \bar{e}^{4z_1}\left(1 - \bar{e}^{z_1}\right)\bar{e}^{2z_2}\left(1 - \bar{e}^{z_2}\right),$$
$$0 < z_1 < \infty \ , \ 0 < z_2 < \infty$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

مثال (١٠-٢٨) إذا كان Y_1 , Y_2 , Y_3 إحصاءات مرتبـــة مأخوذة من عينة عشوائية مــن الحجم $n = 3$ من توزيع له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير $Z_1 = Y_3 - Y_1$ أى المدى .

الحـــــل :

$$g_{13}(y_1 , y_3) = 6 (y_3 - y_1) \qquad 0 < y_1 < y_3 < 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

بفرض أنه بالإضافة إلى $Z_1 = Y_3 - Y_1$ فإن $Z_2 = Y_3$ وبالتالي فإن $z_1 = y_3 - y_1$ و $z_2 = y_3$ وعلى ذلك $y_1 = z_2 - z_1$ و $y_3 = z_2$. جاكوبيان التحويل هي :

$$J = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 .$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Z_1, Z_2 هي :

$$h(z_1, z_2) = |-1| \ 6z_1 = 6z_1 , \quad 0 < z_1 < z_2 < 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمدى $Z_1 = Y_2 - Y_1$ لعينة عشوائية من الحجم $n = 3$ هي :

$$h_1(z_1) = \int_{z_1}^{1} 6z_1 \ dz_2 = 6z_1(1 - z_1) \qquad 0 < z_1 < 1$$
$$= 0 \ \text{elsewhere}.$$

(١٠-٩) تقريبات لبعض الإحصاءات المرتبة

Asymptotic Distributions of Some Order Statistics

فى الفصل التاسع تناولنا عدة أمثله تشمل إحصاءات مرتبه مثل أصغر أو أكبر الإحصاءات المرتبة بنهايات توزيعات غير طبيعية . تحت ظروف معينة يمكن إثبات أن الإحصاءات المرتبة ذات المرتبة k لها تقريباً توزيع طبيعي .

نظرية (١٠-٩) إذا كانت $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ عينة عشوائية من توزيع متصل بدالة كثافة احتمال $f(x)$ متصلة ولا تساوى صفر عند الميتن من الرتبة p ، حيث $0 < p < 1$. وإذا كان $k/n \to p$ (حيث $k - np$ محدودة) ، فإن المتابعة من الإحصاءات المرتبة من المرتبة $X_{k:n}$ لها توزيع طبيعي محازى بمتوسط x_p وتباين c^2/n حيث :

$$c^2 = \frac{p(1-p)}{[f(x_p)]^2}$$

مثال (١٠-٢٩) إذا كانت $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ عينة عشوائية من توزيع له دالة كثافة احتمال آسيه حيث $X_i \sim Exp(1)$ وعلى ذلك

$$x > 0 \quad , \quad F(x) = 1 - \bar{e}^{x} \quad , \quad f(x) = \bar{e}^{x}$$

وبفرض أن n فردية ، وإذا كان $k = (n+1)/2$ فإن $Y_n = X_{k:n}$ هو وسيط العينة . إذا كانت $p = 0.5$ فإن الوسيط هو $x_{0.5} = -\ln(0.5) = \ln 2$ وبالتالى فإن :

$$c^2 = \frac{0.5 \ (1-0.5)}{[f(\ln 2)]^2} = \frac{0.25}{(0.5)^2} = 1.$$

وعلى ذلك $X_{k,n}$ (وسيط العينة) له توزيع طبيعي محازى بمتوسط مجازى $x_{0.5} = \ln 2$ وتباين محازى $c^2/n = 1/n$.

مثال (١٠-٣٠) إذا كانت $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ عينة عشوائية من الحجم n من توزيع منتظم حيث $X_i \sim UNIF(0,1)$ وعلى ذلك :

$$0 < x < 1 \quad , \quad F(x) = x \quad , \quad f(x) = 1$$

وبفرض أن n فردية $k = (n+1)/2$ وعلى ذلك $Y_n = X_{k:n}$ هو وسيط العينة .
تعطى المعادلة (١٠-٦) دالة كثافة الاحتمال للإحصاءة المرتبة من المرتبة k. وبوضع :
$k-1 = n - k = (n-1)/2$ في المعادلة (١٠-٦) فإن دالة كثافة الاحتمال في هذا المثال سوف تكون على الشكل :

$$g_n(y) = \frac{n!}{\{[(n-1)/2]!\}^2}[y(1-y)]^{(n-1)/2} \qquad 0 < y < 1.$$

(٧-١٠)

تبعاً لنظرية (١٠-٩) وعند $p = 0.5$ فإن المتين من الرتبة 50 هو $x_{0.5} = 0.5$, $c^2 = .5(1-.5)/[1]^2 = 0.25$ وعلى ذلك :

$Z_n = \sqrt{n}(X_{k:n} - .5)/0.5 \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$. وفي الحقيقة يمكن الحصول عليها من المعادلة (١٠-٧) وذلك بوضع $z = \sqrt{n}(y - 0.5)/0.5$ ومنها $y = 0.5 + 0.5\ z/\sqrt{n}$ و الجاكوبيان هو $J = 1/\sqrt{n}$. وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z هو :

$$g_n(z) = \frac{n!(0.5)^{n-1}}{\sqrt{n}\{[(n-1)/2]!\}^2}\left(1 - \frac{z^2}{n}\right)^{(n-1)/2} \qquad |z| < \sqrt{n}. \qquad (٨-١٠)$$

بتطبيق الصيغة $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{c}{n}\right)^{nb} = e^{cb}$ والحقيقة أن $(1 - z^2/n)^{-1/2} \to 1$ فإن :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n}\right)^{(n-1)/2} = e^{-z^2/2}$$

ويمكن إثبات أن الثابت في المعادلة (١٠-٨) يؤول إلى $1/\sqrt{2\pi}$ عندما $n \to \infty$ ، وعلى ذلك $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$.

(١٠-١٠) نهايات التوزيعات لأكبر الإحصاءات المرتبة .

Limiting Distributions of Maximum .

ليكن $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ الإحصاءات المرتبة لعينة عشوائية من الحجم n من توزيع له دالة التوزيع التجميعي $F(x)$. يقال للإحصاءة المرتبة $X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ أن لها نهاية توزيع $G(y)$ (التقارب ليس في الاحتمال) إذا وجدت متتابعة من الثوابت المعايرة (القياسية) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ حيث $a_n > 0$ بحيث أن المتغير المعاير (القياسي) .

$$Y_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y \sim G(y)$$

أي أن المتغير Y_n له نهاية توزيع (التقارب ليس فى الاحتمال) . أي نهاية التوزيع من النوع الغير خامل. كما علمنا من نظرية (٩-١) و (٩-٢) أنه إذا كانت $G(y)$ من النوع المتصل فإن المتابعة من الثوابت المعايرة لن تكون وحيدة . وبذلك فإنه يمكن تغيير نهاية التوزيع بتغيير الثوابت المعايرة .

مرة أخرى التوزيع بالضبط للمتغير $X_{n:n}$ يعطى كالتالي :

$$F_{n:n}(x)=[F(x)]^n \qquad (٩-١٠)$$

بوضع :

$$Y_n=(X_{n:n}-b_n)/a_n,$$

فإن التوزيع بالضبط للمتغير Y_n سوف يكون :

$$G_n(y)=P[Y_n \le y]=F_{n:n}(a_n y+b_n)=[F(a_n y+b_n)]^n.$$

وعلى ذلك نهاية توزيع المتغير $X_{n:n}$ (أو بصورة أدق Y_n) يعطى كالتالى :

$$G(y)=\lim_{n\to\infty} G_n(y)=\lim_{n\to\infty}[F(a_n y+b_n)]^n \qquad (١٠-١٠)$$

وعلى ذلك المعادلة (١٠-١٠) تعطى طريقة مباشرة لتقدير نهاية التوزيع للمتغير $X_{n:n}$ وذلك إذا كانت المتابعة $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ يمكن الحصول عليها والتى تجعل النهاية الغير تصادفيه .

مرة أخرى من مثال (٩-٩) ، $X \sim Exp(1)$ وبوضع $a_n=1$, $b_n=\ln n$ فـإن :

$$G_n(y)=[F(y+\ln\ n)]^n=\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)\ \bar{e}^y\right]^n.$$

وعلى ذلك:

$$G(y)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)\ \bar{e}^y\right]^n=\exp\left(-\ \bar{e}^y\right).$$

هناك ثلاثة أنواع من نهايات التوزيعات تعطى من النظريات الثلاث التالية وسوف نقدمهم بدون برهان .

نظرية (١٠-١٠) إذا كان $Y_n = (X_{n:n} - b_n) / a_n$ له نهاية توزيع $G(y)$ فإن $G(y)$ سوف تكون واحد من الأنواع الثلاثة التالية :

١- النوع I (النوع الآسي exponential type)

$$G^{(1)}(y) = \exp(-\bar{e}^{y}) \qquad -\infty < y < \infty$$

٢- النوع II (النوع الكوشى Cauchy type)

$$G^{(2)}(y) = \exp(-\bar{y}^{\gamma}) \qquad y > 0 , \gamma > 0$$

٣- النوع III (النوع المحدود limited type)

$$G^{(3)}(y) = \exp[-(-y^{\gamma})] \qquad y < 0, \gamma > 0$$
$$= 1 \qquad y \geq 0$$

نهايات التوزيع للمتغير $X_{n:n}$ من دوال كثافة احتمال مثل التوزيع الطبيعى ، اللوغاريتمى الطبيعى ، اللوجستك ، جاما يتبع النوع I. هذا النوع يضم معظم التوزيعات المعروفة ويعطى نماذج مفيدة . النوع II من نهايات التوزيع نحصل عليه من التوزيعات التى لها ذيل أكثر سمكاً مثل توزيع كوشى . النوع III من نهايات التوزيعات نحصل عليه من التوزيعات التى تعطى نهاية توزيع محدودة من أعلى .

نظرية (١٠-١١) عند تقدير نهاية التوزيع للمتغير $Y_n = (X_{n:n} - b_n) / a_n$ فإن :

$$\lim_{n\to\infty} G_n(y) = \lim_{n\to\infty} \left[F(a_n \ y + b_n)\right]^n = G(y)$$

إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1 - F(a_n \ y + b_n)\right] = -\ln \ G(y)$$

تعريف : أكبر قيمة مميزة the characteristic largest value ، u_n لدالة التوزيع التجميعى $F(x)$ تعرف بالمعادلة :

$$n \left[1 - F(u_n) \right] = 1$$

نظرية (١٠-١٢) إذا كان $X \sim F(x)$ ويفرض أن $Y_n = (X_{n:n} - b_n)/a_n$ لها نهايـــة توزيع .

١- إذا كانت $F(x)$ متصلة ومتزايدة بإضطراد فإن نهاية التوزيع للمتغير Y_n تكون من النـوع الأول إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1 - F(a_n\ y + b_n)\right] = \bar{e}^{y} \qquad -\infty < y < \infty$$

حيث $b_n = u_n$ و a_n هو الحل للمعادلة $F(a_n + u_n) = 1 - (ne)^{-1}$.

٢- تكون $G(y)$ من النوع الثاني إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1 - F(y)}{1 - F(ky)} = k^{\gamma} \qquad k > 0, \gamma > 0$$

وفى هذه الحالة $a_n = u_n$, $b_n = 0$.

٣- تكون $G(y)$ من النوع الثالث إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{1 - F(ky + x_0)}{1 - F(y + x_0)} = k^{\gamma} \qquad k > 0$$

حيث $x_0 = \max\{\ x \mid F(x) < 1\ \}$ ، أى النهاية العليا من x . أيضا $a_n = x_0 - u_n$ $b_n = x_0$.

مثال (١٠-٣١) مرة أخرى إذا كان $X \sim Exp(\theta)$ وإذا كان اهتمامنا فى المتغير العشـوائى $X_{n:n}$ لعينة عشوائية من الحجم n . يمكن الحصول على أكبر قيمة مميزة u_n من الصيغـــة التالية :

$$n\,[\,1 - F(u_n)\,] = n\ [\,1 - (\,1 - \bar{e}^{u_n/\theta})\,] = 1$$

والتى تعطى :

$$u_n = \theta\ \ln\ n.$$

سوف نثبت أن التوزيع الآسي يقع في النوع الأول. بمـــا أن $b_n = u_n = \theta\ \ln\ n$ و a_n يمكن تقديرها من الصيغة التالية :

$$\begin{aligned} F(a_n + u_n) &= 1 - \bar{e}^{(a_n + \theta \ln\ n)/\theta} \\ &= 1 - (1/n)\ \bar{e}^{a_n/\theta} \\ &= 1\ -\ 1/(n\ e) \end{aligned}$$

والتي تعطى :

$$a_n = \theta \; .$$

وعلى ذلك إذا كانت دالة التوزيع الأسى من النوع الأول فإننا نعلم أن :

$$Y_n = \frac{X_{n:n} - \theta \ln n}{\theta} \xrightarrow{d} Y \sim G^{(1)}(y)$$

ويمكن التحقيق من ذلك بسهولة وذلك باستخدام الشرط الأول من نظرية (١٠-١٢) لأن :

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n y + b_n)] = \lim_{n\to\infty} n\left[\bar{e}^{(y+\ln n)}\right] = \lim_{n\to\infty} \bar{e}^{y}$$

$$= \bar{e}^{y} \qquad -\infty < y < \infty \; .$$

مثال (١٠-٣٢) دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي الذى له دالة توزيع تجميعى على الشكل :

$$F(x) = 1 - x^{-\theta} \qquad x \geq 1$$

لها ذيل سميك ناحية اليمين وعلى ذلك سوف نتوقع أن نهاية التوزيع سوف يكون من النوع الثانى (النوع الكوشى) . باختبار الشرط الثانى المعطى فى نظرية (١٠-١٢) نحصل على :

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1 - F(y)}{1 - F(ky)} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^{-\theta}}{(ky)^{-\theta}} = k^{\theta} .$$

وعلى ذلك نهاية التوزيع سوف يكون من نوع الثانى (النوع الكوشى) حيث $\gamma = \theta$. أيضا : $n\;[1 - F(u_n)] = n\;u_n^{-\theta} = 1$ والتي تعطى $u_n = n^{1/\theta} = a_n$, $b_n = 0$ وعلى ذلك :

$$Y_n = \frac{X_{n:n}}{n^{1/\theta}} \xrightarrow{d} Y \sim G^{(2)}(y)$$

أيضا يمكن الحصول على نفس النتيجة من نظرية (١٠-١١) حيث :

$$\lim_{n\to\infty} n\;\left[1 - F(a_n\;y + b_n)\right] = \lim_{n\to\infty} \bar{y}^{\theta} = -\ln G(y)$$

وعلى ذلك $G(y) = \exp(-y^{-\theta})$ والتي من نوع كوشي حيث $\gamma = \theta$.

مثال (١٠-٣٣) إذا كان $X \sim UNIF\ (0, 1)$ حيث $F(x) = x\ ,\ 0 < x < 1$ فإننا نتوقع أن نهاية التوزيع من النوع III .

بما أن $n\ [1 - F(u_n)] = n\ (1 - u_n) = 1$ و التي تعطى $u_n = 1 - 1/n$. وعلى ذلك $a_n = x_0 - u_n = 1/n\ ,\ b_n = x_0 = 1$. وباختبار الشرط الثالث من نظرية (١٠-١٢) :

$$\lim_{y \to 0^-} \frac{1 - F(ky + x_0)}{1 - F(y + x_0)} = \lim_{y \to 0^-} \frac{1 - (ky + x_0)}{1 - (y + x_0)} = \lim_{y \to 0^-} \frac{ky}{y} = k\,.$$

وعلى ذلك نهاية التوزيع للمتغير $Y_n = n(X_{n:n} - 1)$ من النوع III حيث $\gamma = 1$. مرة أخرى ومن نظرية (١٠-١١) نجد أن :

$$\lim_{n \to \infty} n[1 - F(a_n y + b_n)] = \lim_{n \to \infty} n\left[1 - (\frac{y}{n} + 1)\right] = -y$$
$$= -\ln\ G(y)\,,$$

و $Y_n = n(X_{n:n} - 1) \xrightarrow{d} Y \sim G(y)$ حيث :

$$G(y) = G^{(3)}(y) = e^{y} \qquad y < 0$$
$$= 1 \qquad 0 \le y\,.$$

(١٠ - ١١) نهايات التوزيعات لاصغر الإحصاءات المرتبة

Limiting Distributions of Minimum

إذا وجد نهاية التوزيع لاصغر الإحصاءات المرتبة لعينة عشوائية من الحجم n فسوف يكون واحد من ثلاثة أنواع . في الحقيقة يوجد علاقة بين توزيع أصغر الإحصاءات المرتبة وأكبر الإحصاءات المرتبة حيث :

$$\min(x_1, \ldots, x_n) = -\max(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \qquad (١٠-١١)$$

وعلى ذلك كل النتائج التي تم الحصول عليها لأكبر الإحصاءات المرتبة يمكن تعديلها لتطبيقـــها على أصغر الإحصاءات المرتبة .

ليكن X متغير عشوائي من النوع المتصل وإذا كان $X \sim F_X(x)$ و إذا كان :

$$Z = -X \sim F_Z(Z) = 1 - F_X(-z)$$

تذكر أن $X_{1:n} = -z_{n:n}$

الآن بفرض أن :

$$W_n = (X_{1:n} + b_n)/a_n$$

فـــإن :

$$G_{W_n}(w) = P\left[\frac{X_{1:n} + b_n}{a_n} \le w\right].$$

$$= P\left[\frac{-Z_{n:n} + b_n}{a_n} \le w\right]$$

$$= P\left[\frac{Z_{n:n} - b_n}{a_n} \ge -w\right]$$

$$= P\left[\, Y_n \ge -w \,\right]$$

$$= 1 - G_{Y_n}(-w).$$

وعلى ذلك نهاية توزيع W_n ، ليكن $H(w)$ ، يعطى كالتالي :

$$H(w) = \lim_{n\to\infty} G_{W_n}(w) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - G_{Y_n}(-w)\right]$$

$$= 1 - G(-w)$$

حيث $G(y)$ هو نهاية التوزيع للمتغير $Y_n = (Z_{n:n} - b_n)/a_n$.

وعلى ذلك لإيجاد توزيع النهاية لاصغر الإحصاءات المرتبة ، $H(w)$ ، فإن الخطوة الأولى هو حساب :

$$F_Z(z) = 1 - F_X(-z)$$

ثم تقدير b_n , a_n ونهاية التوزيع $G(y)$ بالطرق التي تناولناها في حالة أكبر الإحصاءات المرتبة وذلك على $F_Z(z)$. وبالتالي فإن نهاية التوزيع للمتغير W_n هو :

$$H(w) = 1 - G(-w) . \qquad (١٠-١٢)$$

ويجب أن نتذكر أنه إذا كان $F_X(x)$ ينتمي إلى نوع ما من النهايات فإنه من الممكن أن تنتمي $F_Z(z)$ إلى نوع آخر . على سبيل المثال ، نهاية التوزيع لأكبر الإحصاءات المرتبة في حالة التوزيع الآسي يكون من النوع I بينما $F_Z(z)$ سوف يكون لها نهاية توزيع من النوع III .

وبصورة مختصرة لتقدير b_n , a_n , $H(w)$ أولا فإننا نوجد $F_Z(z)$ وبتطبيق الطرق المستخدمة فى حالة أكبر الإحصاءات المرتبة وذلك لإيجاد $G(y)$ للمتغير $Y_n = (Z_{n:n} - b_n)/a_n$ ثم استخدام المعادلة (١٠-١٢) للحصول على $H(w)$. أيضا يمكن الحصول على النتائج وذلك باستخدام الدوال الأصلية $F_X(x)$.

تعريف : أقل قيمة مميزة هى القيمة s_n والتي تعرف كالتالى : $n\, F(s_n) = 1$.

ومن المعادلة (١٠-١١) فإن $s_n(x) = -u_n(z)$ وبنفس الشكل الشرط $F_Z(a_n + u_n(z)) = 1 - 1/(n e)$ يصبح $F_X(-a_n + s_n) = 1/(n e)$ ، وهكذا .

نظرية (١٠-١٣) إذا كان $W_n = (X_{1:n} + b_n)/a_n$ لها نهاية توزيع $H(w)$ فإن $H(w)$ لابد أن تكون واحدة من الأنواع الثلاثة التالية :

١- النوع I (النوع الآسي) في هذه الحالة $b_n = -s_n$, a_n تعرف كالتالى :

$$F(s_n - a_n) = \frac{1}{ne}, \qquad W_n = \frac{X_{1:n} - s_n}{a_n},$$

$$H_W^{(1)}(w) = 1 - G^{(1)}(-w) = 1 - \exp(-e^{w}) \qquad -\infty < w < \infty$$

إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} nF(-a_n y + s_n) = \bar{e}^{y}.$$

١- النوع II (النوع الكوشى)

في هذه الحالة :

$$W_n = -X_{1:n} / s_n \quad , \; b_n = 0 \quad , \; a_n = -s_n$$

و

$$H_W^{(2)}(w) = 1 - G^{(2)}(-w) = 1 - \exp[-(-w)^{-\gamma}] \qquad w < 0, \gamma > 0$$

إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{y\to\infty} \frac{F(-y)}{F(-ky)} = k^{\gamma} \qquad k > 0, \gamma > 0$$

أو

$$\lim_{n\to\infty} n\; F(s_n\; y) = y^{-\gamma} \qquad y > 0$$

٣- النوع III (النوع المحدود) إذا كان $x_1 = \min\{x | F(x) > 0\}$ يمثل الحد الأدنـــى من x (أي أن $x_1 = -x_0$) وعلى ذلك :

$$b_n = -x_1 \quad , \; a_n = -x_1 + s_n \quad , \; W_n = \frac{X_{1:n} - x_1}{s_n - x_1} \; ,$$

$$H_W^{(3)}(w) = 1 - G^{(3)}(-w) = 1 - \exp(-w^{\gamma}) \qquad w > 0, \gamma > 0$$

إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{y\to 0} \frac{F(ky + x_1)}{F(y + x_1)} = k^{\gamma} \; k > 0$$

أو

$$\lim_{n\to\infty} n\; F[(x_1 - s_n)y + x_1] = (-y)^{\gamma}$$

يسمى النوع I لاصغر الإحصاءات المرتبـــة بـــالنوع I للقيمـــة المتطرفـــة للتوزيـــع extreme – value distribution . أيضا النوع III لاصغر الإحصاءات المرتبة هـــو توزيع وايبل . مرة أخرى فإن نهاية التوزيع لاكبر الإحصـــاءات المرتبـــة للنـــوع الأول يخص معظم التوزيعات بينما نهاية التوزيع لأصغر الإحصاءات المرتبة يخص النوع

III لمعظم التوزيعات مثل التوزيع الأسى وجاما .

مثـــال (١٠-٣٤) بفـــرض أن عينــة عشـــوائية مـــن الحجـــم n حيـــث $X_i \sim Exp(\theta)$, $i = 1,2,...,n$. من المعروف أن $X_{1:n} \sim Exp(\theta/n)$ وعلى ذلك $n\ X_{1:n}/\theta \sim Exp(1)$ وعلى ذلك نهاية التوزيع للمتغير $n\ X_{1:n}/\theta$ أيضـا يتبـع Exp(1) والذى ينتمى إلى النوع III حيث $\gamma = 1$. إذا لم نكن على علم بالإجابـة فإننـا سوف نخمن أن نهاية التوزيع سوف يكون سوف يكون من النوع III وذلك لان المـدى للمتغير $Z = -X$ هو محدود من جهة اليمين . باختبار الشرط 3 فى نظريـة (١٠-١٣) فإن $x_1 = 0$ و

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{F(ky + x_1)}{F(y + x_1)} = \lim_{y\to 0^-} \frac{1-\exp(-ky)}{(1-\exp(-y))} = \lim_{y\to 0^-} \frac{k\ \ \exp(-ky)}{\exp(-y)} = k\ .$$

وبما أن $H_W(w) = 1 - e^{-w}$ حيث :

$$W_n = \frac{X_{1:n} - x_1}{s_n{}' - x_1} = \frac{X_{1:n}}{s_n}$$

في هذه الحالة فإن s_n يمكن الحصول عليها كالتالى :

$$F(s_n) = 1 - e^{-s_n/\theta} = \frac{1}{n}$$

أو :

$$s_n = -\theta\ \ \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

تمـــــارين :

١- إذا كان $\overline{X}$ هو المتوسط لعينة عشوائية من الحجم $n = 5$ مأخوذة من توزيـــع طبيعـــى بمتوسط $\mu = 0$ وتباين $\sigma^2 = 125$. أوجد c بحيث أن $P(\overline{X} < c) = 0.9$.

٢- إذا كان $\overline{X}$ هو المتوسط لعينة عشوائية من الحجم n من توزيع طبيعى بمتوســط μ وتباين 100 أوجد n بحيث أن $P(\mu - s < X < \mu + s) = 0.954$.

٣- إذا كـــان X_1 , X_2 متغـــيرين عشـــوائيين مســـتقلين وإذا كــــان كـــل مـــن X_1 , $Y = X_1 + X_2$ لهما توزيع بواسون بمعلمتيـــن μ, μ_1 علـــى التوالـــي . هنـــا $\mu_2 < \mu_1$ اثبت أن X_2 له توزيع بواسون بمعلمة $\mu - \mu_1$.

٤- إذا كان $X_1 , X_2 , \ldots, X_{25}$ و $y_1 , y_2, \ldots ,y_{25}$ عينتين عشوائيين مـــن توزيعيـــن طبيعيين مستقلين $N(0, 16)$, $N(1, 9)$ على التوالى . إذا كان $\overline{Y}, \overline{X}$ همـــا متوسطي العينتين . احسب $P(\overline{X} > \overline{Y})$.

٥- إذا كان S^2 هو التباين لعينة عشوائية من الحجم $n = 6$ مأخوذة من توزيـــع طبيعـــى $N(\mu,12)$ أوجد $P(2.3 < S^2 < 22.2)$.

٦- إذا كان $S^2, \overline{X}$ هما المتوسط والتباين لعينة عشوائية من الحجم $n = 25$ مأخوذة مـــن توزيع طبيعى $N(3, 100)$ أحسب $P(0 < X < 6)$, $P(22.2 < S^2 < 145.6)$.

٧- إذا كان Y_2 يمثل الوسيط لعينة عشوائية X_1 , X_2, X_3 من الحجم $n = 3$ من توزيـــع متصل منتظم فى الفترة $(0,\theta)$. احسب $E(Y_2)$ و $E(\overline{X})$ حيث $\overline{X}$ تمثـــل متوســـط التوزيع .

٨- إذا كان Y_2 يمثل الوسيط لعينة عشوائية X_1, X_2, X_3 من الحجم $n = 3$ من توزيع له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

قارن بين $E(Y_2)$ و $E(\overline{X})$ حيث $\overline{X}$ هو متوسط العينة العشوائية .

٩- أحسب المتوسط والتباين للمتوسط $\overline{X}$ لعينة عشوائية من الحجم $n = 9$ مأخوذة من توزيع له دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = 4x^3 \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{elsewhere}.$$

١٠- إذا كان Y , X متغيرين عشوائيين حيث $\mu = 1$ و $\mu_2 = 4$, $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_2^2 = 6$, $\rho = \frac{1}{2}$. أوجد المتوسط والتباين للمتغير $Z = 3k - 2Y$.

١١- إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع وايبل حيث $X_i \sim WEI(1,2)$ ، أوجد القيمة a, b بحيث عندما $n = 35$ فإن :

(أ) $P(a < Y < b) \approx .95$

(ب) $P(a < Y < b) \approx .95$

حيث $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

١٢- إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع أسى حيث $X_i \sim EXP(1)$ وإذا كان $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$

(أ) أوجد تقريب للاحتمال $P[Y \geq 110]$.

(ب) أوجد تقريب للاحتمال $P(1.11 < \overline{X} < 1,2)$ إذا كان $\overline{X}$ هو متوسط العينة .

١٣- إذا كان X يمثل الوزن بالرطل لصندوق قمح حيـــث $X_i \sim N(101,4)$ مـــا هـــو احتمال أن 20 صندوق يكون وزنهم على الأقل طن ؟

١٤- إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots, X_n$ عينة عشوائية من الحجم n من توزيع طبيعى وإذا كـــان $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ وإذا كان $V = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $W = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

(أ) أوجد التوزيع للإحصاء W , V

(ب)أوجـد الإحصـــاء الـــذى يكـــون دالـــة فـــى V , w بحيـــث أن $E(u(W,V)) = 2\mu - S\sigma^2$.

(ج) أوجد الإحصاء الذى توقعه $\sigma^2 + \mu^2$.

١٥- إذا كان $X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$ وإذا كان X , Y مســـتقلين أثبـــت أن $Y - X \sim \chi^2$ إذا كانت $n > m$.

١٦-إذا كان $X \sim \chi^2(m)$, $S = X + Y \sim \chi^2(m+n)$ و X , Y مستقلين اســـتخدم الدالة المولدة للعزوم لاثبات أن $S - X \sim \chi^2(n)$.

١٧- إذا اختيرت عينة عشوائية من توزيع EXP (6) حيث n = 15 . أوجد القيمة c بحيـــث أن $P[c\overline{X} < \theta) = 0.95$ حيث $\overline{X}$ متوسط العينة .

١٨- إذا كان $Z \sim N(0, 1)$ أوجد :

(أ) $P[Z^2 < 3.84]$ باستخدام جداول التوزيع الطبيعى القياسى .

(ب) $P[Z^2 < 3.84]$ باستخدام جداول مربع كاى .

١٩- إذا كـــان $D = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ حيـــث X_1 , X_2 متغـــيرين مســـتقلين حيـــث $X_i \sim N(0,25)$ أوجد $P[D \le 12.25]$.

٢٠- إذا كان $Z_1 , Z_2 , \dots, Z_n$ وإذا كان $\overline{Z}$ هو متوسط العينة . أوجد :

(أ) $P[\overline{Z} < \frac{1}{2}]$.

(ب) $P [Z_1 - Z_2 < 2]$

(ج) $P\left[\sum_{i=1}^{16} Z_i^2 < 32\right]$

٢١- إذا كان $T \sim t(r)$ أوجد توزيع T^2 .

٢٢- إذا كان $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ إحصاءات مرتبه مأخوذة من عينة عشوائية من الحجم $n = 4$ من توزيع له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = e^{-x} \qquad x > 0$$
$$= 0 \text{ elsewhere.}$$

أوجد $P(3 \le y_4)$

٢٣- إذا كان X_1 , X_2 , X_3 عينة عشوائية من توزيع له دالة كثافة الاحتمال من النوع المتصل حيث

$$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \text{ elsewhere .}$$

أحسب الاحتمال أن $Y_1 = X_{1:n}$ يزيد عن وسيط التوزيع .

٢٤- بفرض أن 45% من المكالمات التي يستقبلها عامل تليفون في شركة ما من مسافات بعيدة. ما هو احتمال الحصول على 11 مكالمة من مسافة بعيدة من بين 20 مكالمة يستقبلهم ، استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين.

٢٥ - تستهلك شركة ما كمية من الثلج يوميا في المتوسط 600 رطل بانحراف معياري 25 رطل. فإذا كانت الكمية المستهلكة يوميا تتبع التوزيع الطبيعي. أوجد :

(ا) احتمال أن تستهلك الشركة اكثر من 700 رطل يوميا

(ب) احتمال أن تستهلك من 500 إلى 800 يوميا٠

٢٦- إذا كانت $p=0.3$ استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين لتقدير احتمال الحصول على 140 وحدة تالفة من بين 500 وحدة تالفة منتجة من إحدى المصانع٠

٢٧- إذا كان معروف أن نقطة الذوبان للذهب هي $1.06c^{\circ}$(في المتوسط) بانحراف معياري $0.3\ c^{\circ}$ أوجد احتمال $P(X>1.77)$ ٠

٢٨- إذا كان الطلب على اللحوم في مخزن لبيع اللحوم، خلال أسبوع ، تقريبا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 5000 رطل وانحراف معياري 300 رطل أوجدي $P(X>5300)$ في اسبوع٠

٢٩- إذا كان احتمال أن تنجب سيدة مولود ذكر 0.5٠ فإذا كان هناك 100 سيدة في هذه القرية حوامل وبافتراض أن X ترمز لعدد المواليد الذكور أوجد:

(ا) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

(ب) احتمال أن تنجب على الأقل 3 مواليد ذكور

(جـ) احتمال عدم إنجاب طفل ذكر (استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين)٠

٣٠- صممت سيارة جديدة تحت فرض أن 70% من المبيعات سوف تكون للسيدات٠ إذا اختيرت عينة عشوائية من 500 مشترى٠ ما هو احتمال أنه على الأقل 270 منهم سيدات٠(استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين)٠

٣١- إذا كان احتمال بقاء مريض لأكثر من ثمانية وأربعين ساعة فى قسم العناية المركزة بمستشفى هو 0.055 ، المطلوب ايجاد احتمال أن يمكث عشرة مرضى أكثر من ثمانية وأربعين ساعة من بين خمسين مريضا الحقوا بالقسم في يوم محدد (استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين) ٠

٣٢- إذا ألقيت زهرة نرد 400 مرة. استخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لذي الحدين لإيجاد احتمال ظهور الرقم واحد (أ) 185 إلى210 مرة (ب) بالضبط 205 مرة.

(جـ) أقل من 176 مرة .

٣٣- في مدينة ما وجد أن 10% من المدخنين مصابون بالسرطان. أخذت عينة من هذه المدينة من 300 مدخن وفحصوا للتحقق من إصابتهم بالسرطان المطلوب:

(أ) احتمال أن تحتوى العينة على 25 شخص مصاب بالسرطان .

(ب) ستون شخصا على الأقل مصابا بالسرطان .

(باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لذي الحدين) .

٣٤- ألقيت قطعة نقود 20 مرة. احسب احتمال الحصول على 8 صور باستخدام:

(ا) توزيع ذي الحدين (ب) التوزيع الطبيعي كتقريب لذي الحدين .

٣٥- إذا كان % 70 من الطلاب الملتحقين بالكليات يحصلون على مؤهلاتهم. أوجد احتمال أنه من بين 20 طالبا مختارين عشوائيا من الملتحقين حديثا سوف يحصل على أكثر من 10 طلاب منهم على المؤهل (باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لذي الحدين) .

REFERENCES المراجع

أولا : المراجع العربيـــة :

١-أحمد عودة ، (١٩٩١) ، مقدمة في النظرية الإحصائية ، جامعة الملك ســعود - عمـــاده شؤون المكتبات .

٢-أمير حنا هرمز ، ١٩٩٠ ، الإحصاء لرياضى - مديرية دار الكتب للطباعـــة والنشـــر - الجمهورية العراقية - الموصل .

٣-جلال الصياد ، (١٩٨٨) ، نظرية الاحتمالات - الطبعة الثانية - دار الشـــروق - جـــدة - المملكة العربية السعودية .

٤-على عبد السلام العماوى وعلى حسين العجيلى ، (١٩٩٨) ، أساسيات الإحصاء الرياضى ، إدارة المطبوعات والنشر - جامعة الفاتح .

ثانيا : المراجع الأجنبية :

1- Ashour, S. K. and Salem, S. A. (1990) An Introduction to Mathematical Statistics, I.S.S.R., Cairo University .

2- Bain, E. (1992) Introduction to Probability and Mathematical Statistics (Second Edition). The Duxbury Advanced Series in Statistics and Decision Sciences .

3- El - Mawaziny, A. H. (1976) Theory of Distribution I.S.S.R., Cairo University .

4- Frank, H. and Althoen, S.C (1997) Statistics- Concepts and Applications, Cambridge University Press.

5- Hogg, R. V. and Graig, A. T. (1970) Introduction to Mathematical Statistics. Maxwell Macmillan International.

6- Hogg, R. V. and Tanis, E. A. (1989) Probability and Statistical Inference (3rd Edition) . Maxwell Macmillan International .

7- Lindgren , B. W. (1976) Statistical Theory (3rd Edition) Macmillan Publishing Co. Inc. New York.

8- Mood , A . M. , Graybill , F. A. and Boes , D. C. (1974) Introduction to the Theory of Statistics (3rd Edition) .McGraw-Hill.

9- Olkin, I. , Gleser, L. J. and Derman, C. (1980) Probability Models and Applications. Macmillan Publishing Co. Inc. New York.

10- Parzen, E. (1960) Modern Probability Theory and its Applications . John Wiley & Sons, Inc.

11- Quirin, W.L (1978) Probability and Statistics. Harper & rows Publishers, New York, Hagerstown , San francisco, London,

12- Stirzaker, D. (1993) Elementary Probability. Cambridge University Press.

13- Young, D.H. and Al-Saadi, S. D. (1983). Statistical Theory and Methods, مطابع الرسالة – الكويت .

الملاحق

ملحق (١) جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين .

ملحــق (٢) جدول لقيم دالة كثافة الاحتمال ($h\ (x;\ n,\ p,\ N)$ (للاختصار $f(x)$) للتوزيــع الهندسي الزائدى لقيم $N = 2(1)9$ وقيم مختارة من p , n .

ملحق (٣) جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} p(k;\mu)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون .

ملحق (٤) جدول لقيم دالة كثافة الاحتمال $b^{**}(y\ ,\ k\ ,\ p)$ لتوزيع ذي الحدين السالب حيث $p = .2\ ,\ .4\ ,\ .5\ ,\ .6\ ,\ .8\ ,\ \ k = 2,\ 3,\ 4,\ 5$

ملحق (٥) جدول قيم دالة جاما الناقصة (الغير كاملة) $F(x,\ k)$.

ملحق (٦) جدول القيم الحرجة $\chi^2_\alpha(\nu)$ لتوزيع χ^2.

ملحق (٧) جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي $P(0 < Z < z)$.

ملحق (٨) جدول الأعداد العشوائية في الفترة $(1\ ,0)$.

ملحق (٩) جدول القيم الحرجة $t_\alpha(\nu)$ لتوزيع t .

ملحق (١٠) جدول القيم الحرجة $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$ لتوزيع F عند $(\alpha = 0.05)$.

ملحق (١١) جدول القيم الحرجة $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$ لتوزيع F عند $(\alpha = 0.01)$.

ملحق (١)

جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

a. n=5

		p														
		0.01	0.05	0.1	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
x	0	.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.999	.977	.919	.737	.633	.528	.337	.188	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000
	2	1.00	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001	.000
	3	1.00	1.00	1.00	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023	.001
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226	.049

b. n=10

		p														
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
x	0	.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	1.00	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.00	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000	.000
	4	1.00	1.00	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000	.000
	5	1.00	1.00	1.00	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000	.000
	6	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001	.000
	7	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.264	.086	.004
	9	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096

تابع ملحق (١)

جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

c. n=15

		p														
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
x	0	.860	.463	.206	.035	.013	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.990	.829	.549	.167	.080	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	1.00	.964	.816	.398	.236	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.00	.995	.944	.648	.461	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	1.00	.999	.987	.836	.686	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.00	1.00	.998	.939	.852	.722	.403	.151	.034	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	6	1.00	1.00	1.00	.982	.943	.869	.610	.304	.095	.015	.004	.001	.000	.000	.000
	7	1.00	1.00	1.00	.996	.983	.950	.787	.500	.213	.050	.017	.004	.000	.000	.000
	8	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.985	.905	.696	.390	.131	.057	.018	.000	.000	.000
	9	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.966	.849	.597	.278	.148	.061	.002	.000	.000
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.991	.941	.783	.485	.314	.164	.013	.001	.000
	11	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.982	.909	.703	.539	.352	.056	.005	.000
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.996	.973	.873	.764	.602	.184	.036	.000
	13	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.995	.965	.920	.833	.451	.171	.010
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.995	.987	.965	.794	.537	.140

المصدر : عن [Devore(1995)]

تابع ملحق (١)

جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

d. n=20

	p														
x	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.818	.358	.122	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.983	.736	.392	.069	.024	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.999	.925	.677	.206	.091	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.00	.984	.867	.411	.225	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.00	.997	.957	.630	.415	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.00	1.00	.989	.804	.617	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.00	1.00	.998	.913	.786	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.00	1.00	1.00	.968	.898	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000	.000
8	1.00	1.00	1.00	.990	.959	.887	.596	.252	.057	.005	.001	.000	.000	.000	.000
9	1.00	1.00	1.00	.997	.986	.952	.755	.412	.128	.017	.004	.001	.000	.000	.000
10	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.983	.872	.588	.245	.048	.014	.003	.000	.000	.000
11	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.995	.943	.748	.404	.113	.041	.010	.000	.000	.000
12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.979	.868	.584	.228	.102	.032	.000	.000	.000
13	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.994	.942	.750	.392	.214	.087	.002	.000	.000
14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.979	.874	.584	.383	.196	.011	.000	.000
15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.994	.949	.762	.585	.370	.043	.003	.000
16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.984	.893	.775	.589	.133	.016	.000
17	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.996	.965	.909	.794	.323	.075	.001
18	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.992	.976	.931	.608	.264	.017
19	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.997	.988	.878	.642	.182

تابع ملحق (١) جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

d. n=25

x \ p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.778	.277	.072	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.974	.642	.271	.027	.007	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.998	.873	.537	.098	.032	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.00	.966	.764	.234	.096	.033	.002	.000	.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.00	.993	.902	.421	.214	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.00	.999	.967	.617	.378	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.00	1.00	.991	.780	.561	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.00	1.00	.998	.891	.727	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
8	1.00	1.00	1.00	.953	.851	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
9	1.00	1.00	1.00	.983	.929	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000	.000	.000
10	1.00	1.00	1.00	.994	.970	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000	.000	.000
11	1.00	1.00	1.00	.998	.980	.956	.732	.345	.078	.006	.001	.000	.000	.000	.000
12	1.00	1.00	1.00	1.00	.997	.983	.846	.500	.154	.017	.003	.000	.000	.000	.000
13	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.994	.922	.655	.268	.044	.020	.002	.000	.000	.000
14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.966	.788	.414	.098	.030	.006	.000	.000	.000
15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	.885	.575	.189	.071	.017	.000	.000	.000
16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.996	.946	.726	.323	.149	.047	.000	.000	.000
17	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.978	.846	.488	.273	.109	.002	.000	.000
18	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.993	.926	.659	.439	.220	.009	.000	.000
19	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.971	.807	.622	.383	.033	.001	.000
20	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	.910	.786	.579	.098	.007	.000
21	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.967	.904	.766	.236	.034	.000
22	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	.968	.902	.463	.127	.002
23	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.993	.973	.729	.358	.026
24	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.928	.723	.222

ملحق (٢)

جدول لقيم دالة كثافة الاحتمال (h (x; n, p, N

(للاختصار (f(x) للتوزيع الهندسى الزائدى لقيم

N = 2(1) 9 وقيم مختارة من p , n

n	Np	x	f(x)
	N = 2		
1	1	0	0.5000
		1	0.5000
	N = 3		
1	1	0	0.6667
		1	0.3333
2	1	0	0.3333
		1	0.6667
2	2	1	0.6667
		2	0.3333
	N = 4		
1	1	0	0.75000
		1	0.25000
2	1	0	0.5000
		1	0.5000
2	2	0	0.1667
		1	0.6667
		2	0.1667
3	1	0	0.2500
		1	0.7500
3	2	1	0.5000
		2	0.5000
3	3	2	0.7500
		3	0.2500
	N = 5		
1	1	0	0.8000
		1	0.2000
2	1	0	0.6000
		1	0.4000
2	2	0	0.3000
		1	0.6000
		2	0.1000

N	Np	x	f(x)
3	1	0	0.4000
		1	0.6000
3	2	0	0.1000
		1	0.6000
		2	0.3000
3	3	1	0.3000
3	3	2	0.6000
		3	0.1000
4	1	0	0.2000
		1	0.8000
4	2	1	0.4000
		2	0.6000
4	3	2	0.6000
		3	0.4000
4	4	3	0.8000
		4	0.2000
	N = 6		
1	1	0	0.8333
		1	0.1667
2	1	0	0.6667
		1	0.3333
2	2	0	0.4000
		1	0.5333
		2	0.0667
3	1	0	0.5000
		1	0.5000
3	2	0	0.2000
		1	0.6000
		2	0.2000
3	3	0	0.0500
		1	0.4500
		2	0.4500
		3	0.0500

n	Np	x	f(x)
4	1	0	0.3333
		1	0.6667
4	2	0	0.0667
		1	0.5333
		2	0.4000
4	3	1	0.2000
		2	0.6000
		3	0.2000
4	4	2	04000
		3	0.5333
		4	0.0667
5	1	0	0.1667
		1	0.8333
5	2	1	0.3333
		2	0.6667
5	3	2	0.5000
		3	0.5000
5	4	3	0.6667
		4	0.3333
5	5	4	0 8333
		5	0.1667
	N = 7		
1	1	0	0.8571
		1	0.1429
2	1	0	0.7143
		1	0.2857
2	2	0	0.4762
		1	0.4762
		2	0.0476
3	1	0	0.5714
		1	0.4286
3	2	0	0.2857
		1	0.5714
		2	0.1429
3	3	0	0.1143
		1	0.5143

Oklin et al (1980)

تابع : ملحق (٢)

جدول لقيم دالة كثافة الاحتمال (x; n, p, N)

(للاختصار (f(x) للتوزيع الهندسى الزائدى لقيم

$N = 2(1)\,9$ وقيم مختارة من n , p

n	Np	x	f(x)	N	Np	X	f(x)	n	Np	x	f(x)
		2	0 3429	6	5	4	0 7143	5	1	0	0 3750
		3	0 0286			5	0.2857			1	0 6250
				6	6	5	0 8571	5	2	0	0 1071
4	1	0	0 4286			6	0.1429			1	0 5357
		1	0.5714							2	0.3571
4	2	0	0.1429		N	= 8		5	3	0	0.0179
		1	0.5714	1	1	0	0 8750			1	0.2679
		2	0.2857			1	0.1250			2	0.5357
4	3	0	0.0286							3	0 1786
		1	0.3429	2	1	0	0.7500	5	4	1	0 0714
		2	0 5143			1	0.2500			2	0.4286
		3	0.1143	2	2	0	0.5357			3	0 4286
4	4	1	0.1143			1	0.4286			4	0 0714
		2	0.5143			2	0.0357	5	5	2	0.1786
		3	0.3429							3	0.5357
		4	0.0286	3	1	0	0 6250			4	0.2679
5	1	0	0.2857			1	0 3750			5	0 0179
		1	0.7143	3	2	0	0.3571				
5	2	0	0 0476			1	0 5357	6	1	0	0.2500
		1	0 4762			2	0 1071			1	0.7500
		2	0.4762	3	3	0	0 1786	6	2	0	0.0357
5	3	1	0.1429	3	3	1	0.5357			1	0 4286
		2	0 5714			2	0 2679			2	0 5357
		3	0 2857			3	0 0179	6	3	1	0 1071
5	4	2	0.2857					6	3	2	0 5357
		3	0 5714	4	1	0	0.5000			3	0 3571
		4	0.1429			1	0 5000	6	4	2	0 2143
5	5	3	0.4762	4	2	0	0.2143			3	0.5714
		4	0.4762			1	0 5714			4	0 2143
		5	0.0476			2	0 2143	6	5	3	0 3571
				4	3	0	0 0714			4	0 5357
6	1	0	0.1429			1	0.4286			5	0 1071
		1	0.8571			2	0 4286	6	6	4	0.5357
6	2	1	0.2857			3	0.0714			5	0.4286
		2	0.7143	4	4	0	0.0143			6	0.0357
6	3	2	0.4286			1	0.2286				
		3	0.5714			2	0.5143	7	1	0	0.1250
6	4	3	0.5714			3	0.2286			1	0.8750
		4	0.4286			4	0.0143	7	2	1	0.2500

تابع : ملحق (٢)

جدول لقيم دالة كثافة الاحتمال (x; n, p, N)

(للاختصار (px(x) للتوزيع الهندسى الزائدى لقيم

N = 2(1)9 وقيم مختارة من p , n

n	Np	X	f(x)
		2	0.7500
7	3	2	0.3750
		3	0 6250
7	4	3	0.5000
		4	0.5000
7	5	4	0 6250
		5	0.3750
7	6	5	0 7500
		6	0.2500
7	7	6	0.8750
		7	0.1250
	N	= 9	
1	1	0	0 8889
		1	0 1111
2	1	0	0.7778
		1	0.2222
2	2	0	0.5833
		1	0 3889
		2	0.0278
3	1	0	0 6667
		1	0.3333
3	2	0	0 4167
		1	0 5000
		2	0 0833
3	3	0	0.2381
		1	0 5357
3	3	2	0 2143
		3	0.0119
4	1	0	0 5556
		1	0 4444
4	2	0	0 2778
		1	0 5556
		2	0 1667
4	3	0	0 1190
		1	0.4762
		2	0 3571
		3	0 0476

N	Np	X	f(x)
4	4	0	0 0397
		1	0.3175
		2	0 4762
		3	0 1587
		4	0 0079
5	1	0	0 4444
		1	0.5556
5	2	0	0.1667
		1	0.5556
		2	0.2778
5	3	0	0 0476
		1	0.3571
		2	0 4762
		3	0 1190
5	4	0	0 0079
		1	0.1587
		2	0 4762
		3	0.3175
		4	0 0397
5	5	1	0 0397
		2	0 3175
		3	0 4762
		4	0.1587
		5	0 0079
6	1	0	0 3333
		1	0 6667
6	2	0	0 0833
		1	0 5000
		2	0 4167
6	3	0	0 0119
		1	0 2143
		2	0 5357
		3	0.2381
6	4	1	0 0476
		2	0 3571
		3	0 4762
		4	0.1190
6	5	2	0 1190
		3	0 4762

n	Np	X	f(x)
		4	0 3571
		5	0 0476
6	6	3	0 2381
		4	0 5357
		5	0.2143
		6	0 0119
7	1	0	0.2222
		1	0 7778
7	2	0	0.0278
		1	0 3889
		2	0.5833
7	3	1	0 0833
		2	0 5000
		3	0.4167
7	4	2	0 1667
		3	0 5556
		4	0.2778
7	5	3	0.2778
		4	0 5556
		5	0 1667
7	6	4	0 4167
		5	0 5000
		6	0 0833
7	7	5	0 5833
		6	0 3889
		7	0 0278
8	1	0	0 1111
		1	0 8889
8	2	1	0 2222
		2	0 7778
8	3	2	0 3333
		3	0 6667
8	4	3	0 4444
		4	0 5556
8	5	4	0 5556
		5	0 4444
8	6	5	0 6667
		6	0 3333
8	7	6	0 7778
		7	0.2222
8	8	7	0 8889
		8	0.1111

ملحق (٣)

جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} f(k;\mu)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون

		μ									
		.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1 0
	0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368
	1	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736
	2	1.00	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920
x	3		1.00	1.00	.999	998	997	994	.991	.987	981
	4				1.00	1.00	1.00	.999	.999	.998	.996
	5							1.00	1.00	1.00	.999
	6										1 00

المصدر عن : [Devore (1995)]

تابع ملحق (٣) جدول حساب $\sum_{k=0}^{k} f(k;\mu)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون

		μ										
		2 0	3.0	4.0	5.0	6 0	7.0	8 0	9.0	10.0	15 0	20 0
	0	.135	.050	.018	.007	002	001	.000	.000	.000	.000	000
	1	.406	.199	.092	.040	.017	.007	.003	.001	000	.000	.000
	2	677	.423	.238	125	062	030	.014	006	003	.000	.000
	3	857	.647	.433	.265	151	082	.042	.021	.010	.000	.000
	4	.947	.815	.629	440	.285	173	.100	.055	.029	.001	.000
	5	.983	.916	.785	.616	446	.301	.191	116	.067	.003	.000
	6	.995	.966	.889	.762	606	450	.313	.207	.130	008	.000
	7	999	.988	.949	867	744	599	453	324	.220	018	001
	8	1.00	.996	.979	.932	.847	729	.593	456	.333	.037	.002
	9		.999	.992	.968	.916	.830	.717	.587	.458	.070	.005
	10		1.00	.997	.986	.957	.901	.816	.706	.583	.118	011
	11			.999	.995	980	.947	.888	803	.697	185	.021
	12			1 00	.998	.991	.973	936	876	792	.268	.039
	13				.999	996	987	.966	926	.864	363	.066
	14				1 00	999	.994	983	.959	.917	.466	.105
	15					.999	.998	.992	978	.951	.568	.157
	16					1 00	999	996	989	.973	.664	.221
	17						1 00	.998	.995	986	749	.297
X	18							999	.998	993	819	.381
	19							1 00	.999	.997	875	.470
	20								1 00	998	917	.559
	21									999	947	644
	22									1 00	967	721
	23										.981	787
	24										989	843
	25										994	888
	26										997	.922
	27										998	948
	28										999	966
	29										1 00	978
	30											.987
	31											.992
	32											.995
	33											997
	34											999
	35											999
	36											1 00

ملحق (٤)

جدول لقيم دالة كثافة الاحتمال $b^{**}(y, k, p)$ لتوزيع ذي الحدين السالب حيث

$p = .2, .4, .5, .6, .8$, $k = 2, 3, 4, 5$

	k = 2				
	p				
y	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
0	0.0400	0.1600	0.2500	0.3600	0.6400
1	0.0640	0.1920	0.2500	0.2880	0.2560
2	0.0768	0 1728	0.1875	0.1728	0 0768
3	0.0819	0.1382	0.1250	0.0922	0.0205
4	0.0819	0 1037	0.0781	0.0461	0 0051
5	0.0786	0.0746	0.0469	0.0221	0.0012
6	0.0734	0.0523	0 0273	0.0103	0.0003
7	0 0671	0 0358	0 0156	0.0047	0.0001
8	0 0604	0.0242	0 0088	0.0021	
9	0.0537	0.0161	0 0049	0 0009	
10	0.0472	0 0106	0.0027	0 0004	
11	0.0412	0 0070	0.0015	0 0002	
12	0.0357	0 0045	0.0008	0.0001	
13	0.0308	0 0029	0 0004		
14	0.0264	0.0019	0 0002		
15	0 0225	0.0012	0 0001		
16	0 0191	0.0008	0 0001		
17	0 0162	0.0005			
18	0 0137	0.0003			
19	0 0115	0.0002			
20	0 0097	0.0001			
21	0 0081	0 0001			
22	0.0068				
23	0.0057				
24	0.0047				
25	0.0039				
26	0.0033				
27	0.0027				
28	0.0022				
29	0.0019				
30	0.0015				

،Oklin et al (1980)

تابع : ملحق (٤)

جدول قيم b**(y, k,p) لتوزيع ذى الحدين السالب حيث
p = .2 , .4 , .5 , .6 , .8 , k = 2, 3, 4, 5

	k = 3				
	p				
y	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
0	0.0080	0.0640	0.1250	0.2160	0.5120
1	0.0192	0.1152	0.1875	0.2592	0.3072
2	0.0307	0.1382	0.1875	0.2074	0.1229
3	0.0410	0.1382	0 1562	0.1382	0.0410
4	0.0492	0.1244	0.1172	0.0829	0.0123
5	0.0551	0.1045	0.0820	0.0464	0.0034
6	0.0587	0.0836	0.0547	0.0248	0.0009
7	0.0604	0.0645	0.0352	0.0127	0.0002
8	0.0604	0 0484	0.0220	0 0064	0.0001
9	0 0591	0.0355	0.0134	0.0031	
10	0.0567	0.0255	0.0081	0 0015	
11	0.0536	0.0181	0.0048	0.0007	
12	0.0500	0.0127	0.0028	0.0003	
13	0.0462	0.0088	0.0016	0 0002	
14	0.0422	0.0060	0.0009	0.0001	
15	0 0383	0.0041	0.0005		
16	0.0345	0.0028	0.0003		
17	0.0308	0.0019	0.0002		
18	0.0274	0.0012	0.0001		
19	0.0242	0.0008	0.0001		
20	0.0213	0.0005			
21	0 0187	0.0004			
22	0.0163	0.0002			
23	0 0142	0.0002			
24	0 0123	0.0001			
25	0.0106	0.0001			
26	0.0091				
27	0 0079				
28	0.0067				
29	0.0058				
30	0.0049				

تابع : ملحق (٤)

جدول قيم b(y, k,p) لتوزيع ذى الحدين السالب حيث**

p = .2 , .4 , .5 , .6 , .8 , k = 2, 3, 4, 5

	k = 4				
	p				
y	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
0	0.0016	0.0256	0.0625	0.1296	0.4096
1	0.0051	0.0614	0.1250	0.2074	0.3277
2	0 0102	0.0922	0.1562	0.2074	0 1638
3	0.0164	0 1106	0.1562	0.1659	0 0655
4	0.0229	0.1161	0.1367	0.1161	0.0229
5	0.0294	0.1115	0.1094	0.0743	0.0073
6	0.0352	0.1103	0.0820	0.0446	0.0022
7	0.0403	0 0860	0.0586	0.0255	0.0006
8	0.0443	0 0709	0.0403	0.0140	0.0002
9	0.0472	0.0568	0.0269	0.0075	
10	0.0491	0.0443	0.0175	0.0039	
11	0.0500	0.0338	0.0111	0.0020	
12	0.0500	0.0254	0.0069	0.0010	
13	0.0493	0.0187	0.0043	0.0005	
14	0.0479	0.0136	0.0026	0.0002	
15	0.0459	0.0098	0.0016	0.0001	
16	0.0436	0.0070	0.0009	0.0001	
17	0.0411	0.0049	0.0005		
18	0.0383	0 0035	0 0003		
19	0.0355	0.0024	0.0002		
20	0 0327	0.0017	0.0001		
21	0.0299	0.0011			
22	0 0272	0.0008			
23	0.0246	0.0005			
24	0.0221	0.0004			
25	0.0198	0 0002			
26	0.0177	0.0002			
27	0.0157	0.0001			
28	0.0139	0.0001			
29	0.0123				
30	0.0108				

تابع : ملحق (٤)

جدول قيم b**(y,-k,p) لتوزيع ذى الحدين السالب حيث

p = .2 , .4 , .5 , .6 , .8 , k = 2, 3, 4, 5

	k=5				
	p				
y	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
0	0.0003	0.0102	0.0312	0.0778	0.3277
1	0.0013	0.0307	0.0781	0 1555	0.3277
2	0.0031	0.0553	0.1172	0 1866	0.1966
3	0 0057	0.0774	0.1367	0 1742	0.0918
4	0.0092	0.0929	0.1367	0.1393	0.0367
5	0.0132	0.1003	0.1230	0.1003	0 0132
6	0.0176	0.1003	0.1025	0.0669	0.0044
7	0.0221	0.0946	0 0806	0.0420	0.0014
8	0 0266	0.0851	0.0604	0 0252	0.0004
9	0.0307	0.0738	0.0436	0.0146	0.0001
10	0.0344	0.0620	0.0305	0 0082	
11	0.0375	0.0507	0.0208	0.0045	
12	0.0400	0.0406	0.0139	0 0024	
13	0.0419	0.0318	0.0091	0.0012	
14	0.0431	0.0246	0.0058	0.0006	
15	0.0436	0.0187	0.0037	0.0003	
16	0.0436	0.0140	0.0023	0.0002	
17	0.0431	0.0104	0.0014	0.0001	
18	0 0422	0 0076	0 0009		
19	0 0408	0 0055	0.0005		
20	0.0392	0 0040	0.0003		
21	0.0373	0.0028			
22	0 0353	0.0020			
23	0.0332	0 0014			
24	0 0309	0 0010			
25	0 0287	0.0007			
26	0.0265	0.0005			
27	0.0243	0.0003			
28	0.0223	0.0002			
29	0.0203	0.0002			
30	0.0184	0.0001			

ملحق (٥)

جدول قيم دالة جاما الناقصة (الغير كاملة)

F(x, k)

	k				
x	1	2	3	4	5
0.2	0.18127	0.01752	0.00115	0 00006	0.00000
0.4	0.32968	0.06155	0.00793	0.00078	0.00006
0.6	0.45119	0.12190	0.02312	0.00336	0.00039
0.8	0.55067	0.19121	0.04742	0.00908	0.00141
1.0	0.63212	0.26424	0.08030	0 01899	0.00366
1.2	0.69881	0.33737	0.12051	0.03377	0.00775
1.4	0.75340	0.40817	0.16650	0.05372	0.01425
1.6	0.79810	0.47507	0.21664	0.07881	0.02368
1.8	0.83470	0.53716	0.26938	0.10871	0.03641
2.0	0.86466	0.59399	0.32332	0.14288	0.05265
2.2	0.88920	0.64543	0.37729	0.18065	0.07250
2.4	0.90928	0.69516	0.43029	0.22128	0.09587
2.6	0.92573	0.73262	0.48157	0.26400	0.12258
2.8	0.93919	0.76892	0.53055	0.30806	0.15232
3.0	0.95021	0.80085	0.57681	0.35277	0.18474
3.2	0.95924	0.82880	0.62010	0.39748	0.21939
3.4	0.96663	0.85316	0.66026	0.44164	0.25582
3.6	0.97268	0.87431	0.69725	0.48478	0.29356
3.8	0.97763	0.89262	0.73110	0.52652	0.33216
4.0	0.98168	0.90842	0.76190	0.56653	0.37116
4.2	0.98500	0.92202	0.78976	0.60460	0.41017
4 4	0.98772	0.93370	0.81486	0.64055	0 44882
4.6	0.98995	0.94371	0.83736	0 67429	0 48677
4.8	0.99177	0.95227	0.85746	0.70557	0 52374
5.0	0.99326	0.95957	0.87535	0.73497	0 55951
5.2	0.99448	0.96580	0.89121	0.76193	0.59387
5.4	0.99548	0.97109	0.90524	0.78671	0.62669
5.6	0.99630	0.97559	0.91761	0 80938	0.65785
5.8	0.99697	0.97941	0.92849	0.83004	0.68728
6.0	0.99572	0.98265	0.93803	0.84880	0.71494

Oklin et al (1980)

ملحق (٥)

جدول قيم دالة جاما الناقصة (الغير كاملة)

F(x, k)

x	k				
	6	7	8	9	10
1.0	0.00059	0.00008	0.00001		
1.2	0.00150	0.00025	0.00004		
1.4	0.00320	0.00062	0.00011	0.00002	
1.6	0.00604	0.00134	0.00026	0.00005	0.00001
1.8	0.01038	0.00257	0.00056	0.00011	0.00002
2.0	0.01656	0.00453	0.00110	0.00024	0.00005
2.2	0.02491	0.00746	0.00198	0.00047	0.00010
2.4	0.03567	0.01159	0.00334	0.00086	0.00020
2.6	0.04904	0.01717	0.00533	0.00149	0.00038
2.8	0.06511	0.02441	0.00813	0.00243	0.00066
3.0	0.08392	0.03351	0.01190	0.00380	0.00110
3.2	0.10541	0.04462	0.01683	0.00571	0.00176
3.4	0.12946	0.05785	0.02307	0.00829	0.00271
3.6	0.15588	0.07327	0.03079	0.01167	0.00402
3.8	0.18444	0.09089	0.04011	0.01598	0.00580
4.0	0.21487	0.11067	0.05113	0.02136	0.00813
4.2	0.24686	0.13254	0.06394	0.02793	0.01113
4.4	0.28009	0.15635	0.07858	0.03580	0.01489
4.6	0.31424	0.18197	0.09505	0.04507	0.01953
4.8	0.34899	0.20920	0.11333	0.05582	0.02514
5.0	0.38404	0.23782	0.13337	0.06809	0.03183
5.2	0.41909	0.26761	0.15508	0.08193	0.03967
5.4	0.45387	0.29833	0.17834	0.09735	0.04875
5.6	0.48814	0.32974	0.20302	0.11432	0.05913
5.8	0.52169	0.36161	0.22897	0.13281	0.07084
6.0	0.55432	0.39370	0.25602	0.15276	0.08392
6.2	0.58589	0.42579	0.28398	0.17409	0.09838
6.4	0.61626	0.45767	0.31268	0.19669	0.11420
6.6	0.64533	0.48916	0.34192	0.22044	0.13136
6.8	0.67302	0.52008	0.37151	0.24523	0.14982

ملحق (٥)

جدول قيم دالة جاما الناقصة (الغير كاملة)

F(x, k)

	k				
x	1	2	3	4	5
6.2	0.99797	0.98539	0.94638	0.86577	0.74082
6.4	0.99834	098770	0.95368	0.88108	0.76493
6.6	0.99864	0.98966	0.96003	0.89485	0.78730
6.8	0.99889	0.99131	0.96556	0.90719	0.80797
7.0	0.99909	0.99270	0.97036	0.91823	0.82701
7.2	0.99925	0.99388	0.97453	0.92808	0 84448
7.4	0.99939	0.99487	0.97813	0.93685	0 86047
7.6	0.99950	0.99570	0.98124	0.94463	0.87506
7.8	0.99959	0.99639	0.98393	0.95152	0.88833
8.0	0.99966	0.99698	0.98625	0.95762	0 90037
8.5	0.99980	0.99807	0.99072	0.96989	0 92564
9.0	0.99988	0.99877	0.99377	0.97877	0.94504
9.5	0.99993	0.99921	0.99584	0.98514	0.95974
10.0	0.99995	0.99950	0.99723	0.98966	0.97075
10.5	0.99997	0.99968	0.99817	0.99285	0.97891
11.0	0.99998	0.99980	0.99879	0.99508	0.98490
11.5	0.99999	0.99987	0.99920	0.99664	0.98925
12.0	0.99999	0 99992	0.99948	0.99771	0.99240
12.5	1.00000	0.99995	0 99966	0.99845	0 99465
13 0	1.00000	0.99997	0.99978	0.99895	0.99626
13 5	1.00000	0 99998	0.99986	0.99929	0 99740
14 0	1.00000	0.99999	0 99991	0.99953	0.99819
14.5	1.00000	0.99999	0 99994	0.99968	0.99875
15.0	1.00000	1. 0000	0.99996	0.99979	0.99914

ملحق (م)

جدول قيم دالة جاما الناقصة (الغير كاملة)

F(x, k)

x	k: 6	7	8	9	10
7.0	0.69929	0.55029	0.40129	0.27091	0.16950
7.2	0.72410	0.57964	0.43106	0.29733	0.19035
7.4	0.74744	0.60804	0.46067	0.32435	0.21226
7.6	0.76932	0.63538	0.48996	0.35181	0.23515
7.8	0.78975	0.66159	0.51879	0.37956	0.25889
8.0	0.80876	0.68663	0.54704	0.40745	0.28338
8.5	0.85040	0.74382	0.61440	0.47689	0.34703
9.0	0.88431	0.79322	0.67610	0.54435	0.41259
9.5	0.91147	0.83505	0 73134	0.60818	0.47817
10.0	0.93291	0.86986	0.77978	0 66718	0.54207
10.5	0.94962	0.89837	0.82149	0.72059	0.60287
11.0	0.96248	0.92439	0.85681	0.76801	0.65949
11.5	0.97227	0.93973	0.88627	0.80941	0.71121
12.0	0.97966	0.95418	0.91050	0.84497	0.75761
12 5	0.98518	0.96543	0.93017	0.87508	0.79857
13.0	0.98927	0.97411	0.94597	0.90024	0.83419
13.5	0.99227	0.98075	0.95852	0.92100	0.86474
14.0	0.99447	0.98577	0.96838	0.93794	0.89060
14.5	0.99606	0.98955	0.97606	0.95162	0.91224
15.0	0.99721	0.99237	0.98200	0 96255	0.93015
15.5	0.99803	0.99446	0.98654	0 97121	0.94481
16 0	0 99862	0.99599	0.99000	0 97801	0.95670
16 5	0.99903	0.99712	0.99261	0.98331	0.96626
17 0	0.99933	0.99794	0.99457	0 98741	0 97388

ملحق (٥)

جدول قيم دالة جاما الناقصة (الغير كاملة)

F(x, k)

	k				
x	11	12	13	14	15
4.0	0.00284	0.00091	0.00027	0.00008	0.00002
4.5	0.00667	0.00240	0.00081	0.00025	0.00007
5.0	0.01370	0.00545	0.00202	0.00070	0.00023
5.5	0.02525	0.01099	0.00445	0.00169	0.00060
6.0	0.04262	0.02009	0.00883	0.00363	0.00140
6.5	0.06684	0.03388	0.01603	0.00710	0.00296
7.0	0.09852	0.05335	0.02700	0.01281	0.00572
7.5	0.13776	0.07924	0.04267	0.02156	0.01026
8.0	0.18411	0 11192	0.06380	0.03418	0.01726
8.5	0.23664	0.15134	0.09092	0.05141	0.02743
9.0	0.29401	0.19699	0.12423	0.07385	0.04147
9.2	0.31797	0.21682	0.13926	0.08438	0.05999
9.4	0.34236	0.23743	0.15524	0.09581	0.05590
9.6	0.36705	0.25876	0.17212	0 10815	0.06428
9.8	0.39195	0.28072	0.18988	0.12139	0.07346
10.0	0.41696	0.30322	0.20844	0.13554	0.08346
10.2	0.44197	0.32618	0.22777	0.15055	0.09429
10.4	0.46687	0.34951	0.24779	0.16641	0.10596
10.6	0.49159	0.37310	0.26843	0 18309	0.11847
10.8	0.51603	0.39687	0.28963	0.20054	0.11318
11.0	0.54011	0.42073	0.31130	0.21871	0 14596
11 2	0.56376	0 44459	0.33337	0.23756	0.16090
11.4	0 58690	0 46837	0.35576	0 25702	0 17661
11.6	0.60949	0.49198	0.37839	0 27703	0 19305
11.8	0 63146	0.51535	0.40117	0.29754	0.21019
12.0	0.65277	0.53840	0.42403	0.31846	0.22798
12.2	0.67338	0.56108	0.44690	0.33974	0 24637
12.4	0.69327	0.58331	0.46968	0.36130	0.26531
12.6	0.71239	0.60504	0.49232	0.38307	0.28474
12.8	0.73075	0.62623	0.51475	0.40498	0.30462

ملحق (٥)

جدول قيم دالة جاما الناقصة (الغير كاملة)

F(x, k)

x	k 11	12	13	14	15
13 0	0.74832	0.64684	0.53690	0.42696	0.32487
13.2	0.76510	0.66681	0.55870	0.44893	0.34543
13.4	0.78108	0.68614	0.58012	0.47084	0.36625
13.6	0.79627	0.70478	0.60110	0.49262	0.38725
13 8	0.81068	0.72273	0.62158	0 51421	0.40838
14.0	0.82432	0.73996	0.64154	0.53555	0.42956
14.2	0.83720	0.75647	0.66094	0.55659	0.45075
14.4	0.84934	0.77225	0.67975	0.57728	0.47188
14.6	0.86076	0.78731	0.69793	0.59756	0.49289
14.8	0.87149	0.80164	0.71549	0.61741	0.51373
15.0	0.88154	0.81525	0.73239	0.63678	0.53435
15.5	0.90388	0.84622	0.77173	0.68292	0.58459
16.0	0.92260	0.87301	0 80688	0 72549	0.63247
16.5	0.93813	0.89593	0.83790	0.76426	0.67746
17.0	0.95088	0.91533	0 86498	0.79913	0.71917
17.5	0.96126	0.93160	0.88835	0 83013	0.75736
18.0	0.96963	0.94511	0.90833	0 85740	0 79192
18.5	0.97635	0.95624	0.92525	0.88114	0.82286
19.0	0.98168	0.96533	0.93944	0.90160	0.85025
19.5	0.98589	0.97269	0.95125	0.91908	0 87427
20.0	0.98919	0.97861	0.96099	0.93387	0.89514
20.5	0.99176	0.98355	0.96897	0 94630	0.91310
21.0	0 99375	0.98710	0 97545	0 95664	0 92843
21 5	0.99528	0.99005	0 98069	0 96520	0 94141
22.0	0.99645	0.99237	0.98488	0 97222	0.95231
22 5	0.99735	0.99418	0.98823	0.97794	0.96140
23.0	0.99802	0.99557	0.99088	0.98257	0.96893
23 5	0.99853	0.99665	0 99297	0 98630	0.97512
24 0	0.99892	0.99748	0.99460	0.98928	0.98018
24.5	0.99920	0.99811	0.99587	0.99166	0.98428

ملحق (٦)

جدول القيم الحرجة $\chi^2_\alpha(v)$ لتوزيع $\chi^2(v)$

	α									
v	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.440	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.688	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.147	17.708	19.768	39.087	42.557	45.772	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.584	19.960	22.105	24.075	26.492	48.363	52.192	55.667	59.891	62.880
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.994	21.425	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.119	62.426	65.473
40	20.706	22.164	24.433	26.509	29.050	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

المصدر : عن [Devore(1995)]

ملحق (٧)

جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي

P(0<Z<z)

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	0040	.0080	0120	0160	.0199	0239	.0279	.0319	.0359
0.1	0398	0438	.0478	0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0 8	.2881	2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0 9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	4162	.4177
1 4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1 5	4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1 6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1 7	.4554	4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	4772	4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	4904	.4906	.4909	4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	4927	.4929	.4931	.4932	.4934	4936
2 5	.4938	.4940	.4941	4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2 6	4953	.4955	.4956	4957	.4959	4960	.4961	.4962	4963	.4964
2 7	.4965	4966	.4967	.4968	.4969	.4970	4971	.4972	.4973	.4974
2 8	4974	4975	.4976	.4977	.4977	4978	.4979	4979	.4980	.4981
2.9	.4981	4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

المصدر : عن [Daniel (1978)]

ملحق (٨)

جدول الأعداد العشوائية فى الفترة (1 ,0)

3407	1440	6960	8675	5649	5793	1514
5044	9859	4658	7779	7986	0520	6697
0045	4999	4930	7408	7551	3124	0527
7536	1448	7843	4801	3147	3071	4749
7653	4231	1233	4409	0609	6448	2900
6157	1144	4779	0951	3757	9562	2354
6593	8668	4871	0946	3155	3941	9662
3187	7434	0315	4418	1569	1101	0043
4780	1071	6814	2733	7968	8541	1003
9414	6170	2581	1398	2429	4763	9192
1948	2360	7244	9682	5418	0596	4971
1843	0914	9705	7861	6861	7865	7293
4944	8903	0460	0188	0530	7790	9118
3882	3195	8287	3298	9532	9066	8225
6596	9009	2055	4081	4842	7852	5915
4793	2503	2906	6807	2028	1075	7175
2112	0232	5334	1443	7306	6418	9639
0743	1083	8071	9779	5973	1141	4393
8856	5352	3384	8891	9189	1680	3192
8027	4975	2346	5786	0693	5615	2047
3134	1688	4071	3766	0507	2142	3492
0633	9002	1305	2256	5956	9256	8979
8771	6069	1598	4275	6017	5946	8189
2672	1304	2186	8279	2430	4896	3698
3136	1916	8886	8617	9312	5070	2720
6490	7491	6562	5355	3794	3555	7510
8628	0501	4618	3364	6709	1289	0543
9270	0504	5018	7013	4423	2147	4089
5723	3807	4997	4699	2231	3193	8130
6228	8874	7271	2621	5746	6333	0345
7645	3379	8376	3030	0351	8290	3640
6842	5836	6203	6171	2698	4086	5469
6126	7792	9337	7773	7286	4236	1788
4956	0215	3468	8038	6144	9753	3131
1327	4736	6229	8965	7215	6458	3937
9188	1516	5279	5433	2254	5768	8718
0271	9627	9442	9217	4656	7603	8826
2127	1847	1331	5122	8332	8195	3322
2102	9201	2911	7318	7670	6079	2676
1706	6011	5280	5552	5180	4630	4747
7501	7635	2301	0889	6955	8113	4364
5705	1900	7144	8707	9065	8163	9846
3234	2599	3295	9160	8441	0085	9317
5641	4935	7971	8917	1978	5649	5799
2127	1868	3664	9376	1984	6315	8396

ملحق (٩)

جدول القيم الحرجة $t_{\alpha}(v)$ لتوزيع $t(v)$

	α						
v	10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3 182	4.541	5 841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2 776	3 747	4.604	7 173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6 869
6	1 440	1.943	2.447	3 143	3 707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1 356	1.782	2.179	2 681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1 771	2.160	2 650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2 602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2 120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1 740	2.110	2.567	2.898	3 646	3.965
18	1.330	1 734	2 101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1 325	1.725	2 086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2 080	2.518	2 831	3.527	3.819
22	1 321	1.717	2.074	2 508	2 819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1 711	2 064	2.492	2.797	3.467	3 745
25	1.316	1.708	2.060	2 485	2 787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2 479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1 703	2 052	2.473	2 771	3 421	3 690
28	1.313	1 701	2 048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2 462	2 756	3.396	3.659
30	1 310	1 697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1 303	1 684	2 021	2 423	2.704	3.307	3 551
60	1.296	1 671	2.000	2.390	2 660	3.232	3.460
120	1.289	1 658	1.980	2 358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1 645	1.960	2 326	2.576	3.090	3.291

المصدر : عن [Devore (1995)]

ملحق (١٠)

جدول القيم الحرجة $F_\alpha(v_1, v_2)$ لتوزيع F عند $(\alpha = 0.05)$

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.636
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.07
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1 78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.58	1.80	1 75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.48	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.84	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

المصدر : عن [Devore (1995)]

ملحق (١١)

جدول القيم الحرجة $F_{\alpha}(v_1, v_2)$ لتوزيع F عند $(\alpha = 0.01)$

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.57	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.369
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.41	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.86	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	3.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	3.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	3.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	3.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

رقم الإيـداع بدار الكتب ١٩٦١٨ لسنة ٢٠٠٠
الترقيـم الدولـى I.S.B.N. 977-05-1798-4

مطبعة أبناء وهبة حسان
٢٤١ (أ) ش الجيش – ميدان الجيش
٥٩٢٥٥٤٠ / القاهرة



Bibliotheca Alexandrina
0314282